

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

Предисловие	7
-----------------------	---

РАЗДЕЛ I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Глава 1. Виды систем автоматического регулирования	9
§ 1.1. Понятие о замкнутых автоматических системах	9
§ 1.2. Классификация автоматических систем по характеру внутренних динамических процессов	15
§ 1.3. Примеры непрерывных автоматических систем	18
§ 1.4. Примеры дискретных и релейных автоматических систем	24
Глава 2. Программы и законы регулирования. Адаптивные системы	32
§ 2.1. Программы регулирования	32
§ 2.2. Линейные и нелинейные законы регулирования	35
§ 2.3. Системы с переменной структурой	39
§ 2.4. Системы с самонастройкой программы (экстремальные системы)	40
§ 2.5. Системы с самонастройкой параметров (собственно самонастраивающиеся системы)	41
§ 2.6. Системы с самонастройкой структуры (самоорганизующиеся системы)	46

РАЗДЕЛ II

ОБЫКНОВЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Глава 3. Линеаризация дифференциальных уравнений систем автоматического регулирования	49
§ 3.1. Линеаризация уравнений	49
§ 3.2. О записи линеаризованных уравнений звеньев	52
Глава 4. Динамические звенья и их характеристики	56
§ 4.1. Общие понятия	56
§ 4.2. Временные характеристики	58
§ 4.3. Частотная передаточная функция и частотные характеристики	61
§ 4.4. Логарифмические частотные характеристики	65
§ 4.5. Позиционные звенья	69
§ 4.6. Интегрирующие звенья	81
§ 4.7. Дифференцирующие звенья	87
§ 4.8. Неустойчивые и неминимально-фазовые звенья	90
§ 4.9. Звенья с модулированным сигналом	93
Глава 5. Составление исходных дифференциальных уравнений систем автоматического регулирования	102
§ 5.1. Общий метод составления исходных уравнений	102
§ 5.2. Передаточные функции систем автоматического регулирования	104

§ 5.3. Законы регулирования	107
§ 5.4. Использование структурных схем и графов	113
§ 5.5. Многомерные системы регулирования	119
§ 5.6. Управляемость и наблюдаемость	124
§ 5.7. Уравнения следящей системы	127
Глава 6. Критерии устойчивости	133
§ 6.1. Понятие об устойчивости систем регулирования	133
§ 6.2. Критерий устойчивости Гурвица	139
§ 6.3. Критерий устойчивости Михайлова	143
§ 6.4. Построение областей устойчивости. <i>D</i> -разбиение	148
§ 6.5. Критерий устойчивости Найквиста	151
§ 6.6. Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам	161
§ 6.7. Устойчивость двумерных систем с антисимметричными связями	165
Глава 7. Построение кривой переходного процесса в системах автоматического регулирования	168
§ 7.1. Общие соображения	168
§ 7.2. Непосредственное решение исходного дифференциального уравнения	171
§ 7.3. Сведение неоднородного уравнения к однородному	172
§ 7.4. Использование преобразований Фурье, Лапласа и Карсона — Хевисайда	176
§ 7.5. Использование вещественных частотных характеристик	183
§ 7.6. Использование вычислительных машин	187
Глава 8. Оценка качества регулирования	201
§ 8.1. Общие соображения	201
§ 8.2. Точность в типовых режимах	202
§ 8.3. Коэффициенты ошибок	207
§ 8.4. Определение запаса устойчивости и быстродействия по переходной характеристике	209
§ 8.5. Приближенная оценка вида переходного процесса по вещественной частотной характеристике	210
§ 8.6. Корневые методы	213
§ 8.7. Диаграмма Вышнеградского	219
§ 8.8. Интегральные оценки	222
§ 8.9. Частотные критерии качества	232
§ 8.10. Чувствительность систем регулирования	239
Глава 9. Повышение точности систем автоматического регулирования	244
§ 9.1. Общие методы	244
§ 9.2. Теория инвариантности и комбинированное управление	252
§ 9.3. Неединичные обратные связи	259
Глава 10. Улучшение качества процесса регулирования	262
§ 10.1. О корректирующих средствах	262
§ 10.2. Последовательные корректирующие звенья	265
§ 10.3. Параллельные корректирующие звенья	271
§ 10.4. Обратные связи	273
§ 10.5. Методы повышения запаса устойчивости	282
§ 10.6. Примеры	288
Глава 11. Случайные процессы в системах автоматического регулирования	293
§ 11.1. Вводные замечания	293
§ 11.2. Случайные процессы	305
§ 11.3. Стационарные случайные процессы	308
§ 11.4. Корреляционная функция	310
§ 11.5. Спектральная плотность стационарных процессов	314

§ 11.6. Канонические разложения случайных функций	324
§ 11.7. Прохождение случайного сигнала через линейную систему	326
§ 11.8. Расчет установившихся ошибок в автоматических системах	330
§ 11.9. Расчеты по минимуму среднеквадратичной ошибки	333

Глава 12. Методы синтеза систем автоматического регулирования	338
§ 12.1. Общие соображения	338
§ 12.2. Корневой метод	339
§ 12.3. Метод корневых годографов	342
§ 12.4. Метод стандартных переходных характеристик	346
§ 12.5. Метод логарифмических амплитудных характеристик	<u>350</u>
§ 12.6. Синтез систем автоматического регулирования на основе частотных критериев качества	355
§ 12.7. Об оптимальном синтезе	374
§ 12.8. Использование классических вариационных методов	378
§ 12.9. Динамическое программирование	383
§ 12.10. Аналитическое конструирование регуляторов	387

РАЗДЕЛ III

ОСОБЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Глава 13. Системы с переменными параметрами	391
§ 13.1. Основные понятия	391
§ 13.2. Нахождение функции веса и построение переходных процессов	394
§ 13.3. Передаточные функции	403
§ 13.4. Устойчивость и качество регулирования	407
§ 13.5. О синтезе систем с переменными параметрами	409

Глава 14. Системы с запаздыванием и системы с распределенными параметрами	413
§ 14.1. Уравнения линейных систем с запаздыванием	413
§ 14.2. Уравнения линейных систем с распределенными параметрами	418
§ 14.3. Исследование устойчивости и качества регулирования	425

Глава 15. Импульсные системы	430
§ 15.1. Общие сведения	430
§ 15.2. Использование z-преобразования	435
§ 15.3. Передаточные функции	453
§ 15.4. Устойчивость и качество импульсных систем регулирования	463
§ 15.5. Случайные процессы в импульсных системах	469

РАЗДЕЛ IV

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Глава 16. Составление уравнений нелинейных систем автоматического регулирования	473
§ 16.1. Общие понятия	473
§ 16.2. Уравнения систем с нелинейностью релейного типа	489
§ 16.3. Уравнения систем с нелинейностью в виде сухого трения и зазора	492
§ 16.4. Уравнения систем с нелинейностями других видов	495
Глава 17. Точные методы исследования устойчивости и автоколебаний	499
§ 17.1. Фазовые траектории и метод точечных преобразований	499
§ 17.2. Теоремы прямого метода Ляпунова и их применение	512
§ 17.3. Определение автоколебаний релейных систем методом припасовывания	523
§ 17.4. Частотный метод В. М. Попова	533
§ 17.5. Исследование систем с переменной структурой	537

Глава 18. Приближенные методы исследования устойчивости и автоколебаний	540
§ 18.1. Гармоническая линеаризация нелинейностей	540
§ 18.2. Алгебраические способы определения автоколебаний и устойчивости в нелинейных системах первого класса	547
§ 18.3. Примеры исследования нелинейных систем первого класса	557
§ 18.4. Нелинейные системы второго класса	571
§ 18.5. Вычисление высших гармоник и уточнение первой гармоники автоколебаний	582
§ 18.6. Частотный метод определения автоколебаний	590
Глава 19. Медленно меняющиеся процессы в автоколебательных системах	602
§ 19.1. Статические и скоростные ошибки автоколебательных систем	602
§ 19.2. Прохождение медленно меняющихся сигналов в автоколебательных системах	614
§ 19.3. Гармоническая линеаризация нелинейностей при несимметричных колебаниях	616
Глава 20. Оценка качества нелинейных процессов регулирования	623
§ 20.1. Приближенное исследование колебательных переходных процессов	623
§ 20.2. Примеры исследования колебательных переходных процессов	630
§ 20.3. Система с нелинейным корректирующим устройством	637
§ 20.4. Применение логарифмических частотных характеристик для исследования нелинейных законов регулирования	642
Глава 21. Вынужденные колебания нелинейных систем	648
§ 21.1. Симметричные одночастотные вынужденные колебания	648
§ 21.2. Несимметричные вынужденные колебания с медленно меняющейся составляющей	654
§ 21.3. Зависимость устойчивости и качества нелинейных систем от внешних вибраций	660
Глава 22. Случайные процессы в нелинейных системах	667
§ 22.1. Статистическая линеаризация нелинейностей	667
§ 22.2. Простейшие случайные процессы в нелинейных системах	673
§ 22.3. Пример исследования влияния случайных помех на динамику нелинейной системы	677
Глава 23. Нелинейная оптимизация систем автоматического регулирования	682
§ 23.1. Общие положения	682
§ 23.2. Синтез оптимальной системы с использованием принципа максимума	683
§ 23.3. Последовательная оптимизация на базе нелинейного программирования	689
 РАЗДЕЛ V	
ЦИФРОВЫЕ И АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ	
Глава 24. Системы регулирования с цифровыми вычислительными машинами	693
§ 24.1. Общие понятия	693
§ 24.2. О синтезе систем регулирования с ЦВМ	700
§ 24.3. Дискретная коррекция	711
§ 24.4. Периодические режимы, обусловленные квантованием по уровню	717
Глава 25. Адаптивные системы	733
§ 25.1. Системы экстремального регулирования	733
§ 25.2. Самонастраивающиеся системы	744
Приложение 1. Таблица h -функций	750
Приложение 2. Таблица интегралов	752
Литература	754
Предметный указатель	759

В.А.Бесекерский,
Е.П.Попов

Теория систем автоматического регулирования

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1975

Теория систем автоматического регулирования, издание третье, исправленное. Б е с е к е р с к и й В. А., П о п о в Е. П., издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1975, 768 стр.

Книга представляет собой монографию, посвященную систематическому изложению теории автоматического регулирования и управления.

Книга содержит все основные разделы теории автоматического регулирования: теорию обыкновенных и особых линейных систем, теорию нелинейных, адаптивных и цифровых систем.

Книга рассчитана на преподавателей и студентов, специализирующихся в области автоматического регулирования и управления, и может быть также использована инженерами и научными работниками при самостоятельном изучении вопросов теории.

Табл. 39. Илл. 524. Библ. 153 назв.

Совершенствование технологии и повышение производительности труда во всех отраслях народного хозяйства относятся к важнейшим задачам технического прогресса нашего общества. Решение этих задач возможно лишь при широком внедрении систем автоматического регулирования и управления как отдельными объектами, так и производством, отраслью и всем народным хозяйством в целом. Поэтому изучение основ автоматического регулирования и управления предусматривается в настоящее время при подготовке выпускников практических всех инженерных специальностей.

Содержание книги близко к программам курсов теории автоматического регулирования и управления, читаемых в высших технических учебных заведениях. Гряд вопросов освещен более широко. Подробные примеры по всем разделам книги читатель может найти в «Сборнике задач по теории автоматического регулирования и управления» («Наука», изд. 4-е, 1972).

В первом разделе книги даны общие сведения о системах автоматического регулирования, их классификация, понятия о программах и законах регулирования и понятия о различных структурах используемых на практике систем. Изложение иллюстрируется примерами.

Второй раздел представляет систематическое изложение теории линейных (точнее, линеаризованных) систем автоматического регулирования. Он начинается с рассмотрения таких вопросов, как составление и линеаризация исходных уравнений движения и типовые динамические звенья. Затем излагаются возможные подходы, которые используются при анализе замкнутых систем регулирования. Раздел завершается рассмотрением применяемых в практике методов синтеза.

В третьем разделе изложена теория особых линейных систем, к которым относятся системы с переменными параметрами, системы с постоянным временным запаздыванием, системы с распределенными параметрами и импульсные системы регулирования. Необходимо отметить, что излагаемая в этом разделе теория импульсных систем служит базой для рассматриваемых ниже систем регулирования, содержащих в своем контуре цифровые вычислительные машины.

Четвертый раздел содержит сведения о нелинейных системах автоматического регулирования. Здесь последовательно излагается теория нелинейных систем, которая начинается с рассмотрения методики составления исходных уравнений движения. Далее излагаются точные, а затем приближенные методы исследования устойчивости и автоколебаний, методы анализа качества нелинейных систем в различных режимах и при различных входных воздействиях. Раздел заканчивается изложением вопросов нелинейной оптимизации систем автоматического регулирования.

Пятый раздел посвящен рассмотрению основ теории систем регулирования, содержащих в своем контуре цифровые вычислительные машины, и адаптивных (приспосабливающихся) систем.

Научно-техническая революция, вызванная созданием цифровых вычислительных машин, сказалась на развитии многих отраслей науки и техники. Особо сильному влиянию подверглись теория и практика автоматического регулирования и управления объектами и совокупностями объектов как в гражданской, так и в военной технике.

Применение цифровой вычислительной техники открывает большие возможности при управлении такими сложными устройствами и системами, как прокатные станы, доменные, бумагоделательные машины, поточные линии, подвижные объекты (самолеты, ракеты, космические корабли и др.), автоматизированные системы управления производством, железнодорожным транспортом, воздушным движением и т. п. В связи с этим в книге уделено значительное внимание вопросам теории работы систем управления с цифровыми вычислительными машинами.

Предполагается, что читатели знакомы с преобразованиями Лапласа, Карсона-Хевисайда и Фурье, которые излагаются и используются в курсах высшей математики, теоретической механики и теоретических основ электротехники. Поэтому в соответствующих разделах книги даются лишь краткие напоминания основ их применения. Более подробно изложен математический аппарат, используемый для исследования импульсных и цифровых систем управления.

Разделы II, III и V написаны В. А. Бесекерским, а разделы I и IV — Е. П. Поповым.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

ГЛАВА 1

ВИДЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 1.1. Понятие о замкнутых автоматических системах

Существует чрезвычайно большое разнообразие автоматических систем, выполняющих те или иные функции по управлению самыми различными физическими процессами во всех областях техники. В этих системах сочетаются весьма разнообразные по конструкции механические, электрические и другие устройства, составляя, в общем, сложный комплекс взаимодействующих друг с другом звеньев.

Примерами автоматических систем могут служить:

- а) автомат включения освещения, в котором имеется фотоэлемент, реагирующий на силу дневного света, и специальное устройство для включения освещения, срабатывающее от определенного сигнала фотоэлемента;
- б) автомат, выбрасывающий какие-либо определенные предметы (билеты, поклад) при опускании в него определенной комбинации монет;
- в) станок-автомат, автоматические линии станков и автоматические цехи на заводах;
- г) системы телеуправления, в которых от нажатия кнопки или от легкого поворота ручки на пульте управления совершается определенная комбинация мощных и сложных операций в управляемом объекте;
- д) автоматический регулятор скорости вращения двигателя, поддерживающий постоянную угловую скорость двигателя независимо от внешней нагрузки (аналогично регуляторы температуры, давления, напряжения, частоты и пр.);
- е) автопилот, поддерживающий определенный курс и высоту полета самолета без помощи летчика;
- ж) следящая система, на выходе которой с определенной точностью копируется произвольное во времени изменение какой-нибудь величины, поданной на вход;
- з) система сопровождения, в которой ствол наземного орудия автоматически поворачивается за летящим самолетом;
- и) вычислительное устройство, выполняющее определенную математическую операцию (дифференцирование, интегрирование, решение уравнений и т. п.);
- к) измерительные приборы, работающие по так называемому компенсационному принципу;
- л) система самонаведения снаряда на цель и пр.

Все эти и им подобные автоматические системы можно разделить на два больших класса:

- 1) автоматы, выполняющие определенного рода одноразовые или много-разовые операции; сюда относятся, например, автомат включения освещения, билетный автомат, станок-автомат, ружье-автомат, автомат переключения скоростей и т. п.;

2) автоматические системы, которые в течение достаточно длительного времени нужным образом изменяют (или поддерживают неизменными) какие-либо физические величины (координаты движущегося объекта, скорость движения, электрическое напряжение, частоту, температуру, давление, громкость звука и пр.) в том или ином управляемом процессе. Сюда относятся автоматические регуляторы, следящие системы, автопилоты, некоторые вычислительные устройства, некоторые измерительные приборы, системы дистанционного управления, телеуправления, самонаведения и т. п.

В данной книге будут рассматриваться только автоматические системы второго класса. Эти последние делятся в свою очередь на незамкнутые и замкнутые автоматические системы.

Общая структурная схема незамкнутой системы в двух вариантах представлена на рис. 1.1, а и б. Это — простейшие схемы управления: полуавтоматические, когда источником воздействия является человек,



Рис. 1.1.

и автоматические, если источником воздействия является изменение каких-либо внешних условий, в которых работает данная система (температура или давление окружающей среды, электрический ток, освещенность, изменение частоты и т. п.).

Структурная схема, показанная на рис. 1.1, б, отличается от схемы на рис. 1.1, а тем, что кроме органов управления имеются еще контрольные приборы, которые дают возможность наблюдать за протеканием процесса в управляемом объекте.

Характерным для незамкнутой системы является то, что процесс работы системы не зависит непосредственно от результата ее воздействия на управляемый объект.

Естественным дальнейшим усовершенствованием автоматической системы является замыкание ее выхода (контрольные приборы) со входом (источник воздействия) таким образом, чтобы контрольные приборы, измерив некоторые величины, характеризующие определенный процесс в управляемом объекте, сами служили бы одновременно и источником воздействия на систему, причем величина этого воздействия зависела бы от того, насколько отличаются измеренные величины на управляемом объекте от требуемых значений.

Таким образом возникает замкнутая автоматическая система. В наиболее компактной форме она представлена на рис. 1.2. Более развернутая функциональная блок-схема замкнутой автоматической системы дана на рис. 1.3 и в другом варианте — на рис. 1.4, где замкнутый контур скомбинирован с разомкнутыми каналами. На этих схемах стрелками обозначены направления воздействий или передачи информации с одного блока системы на другой.

Очевидно, что в замкнутой автоматической системе имеется полная взаимозависимость работы всех звеньев друг от друга. Протекание всех процессов в замкнутой системе коренным образом отличается от процессов в незамкнутой системе. Замкнутая система совершенно по другому реаги-

рует на внешние возмущающие воздействия. Различные ценные свойства замкнутых автоматических систем делают их незаменимыми во многих случаях, когда требуется точность и быстродействие для управления, измерения или для производства математических вычислений. Поэтому при

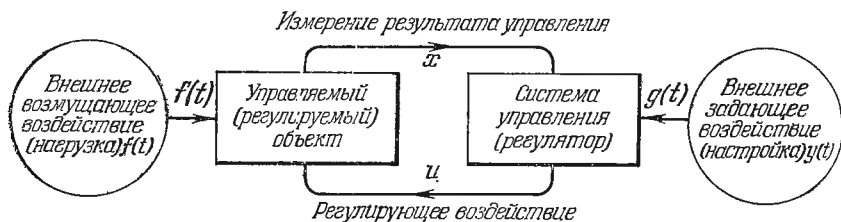


Рис. 1.2.

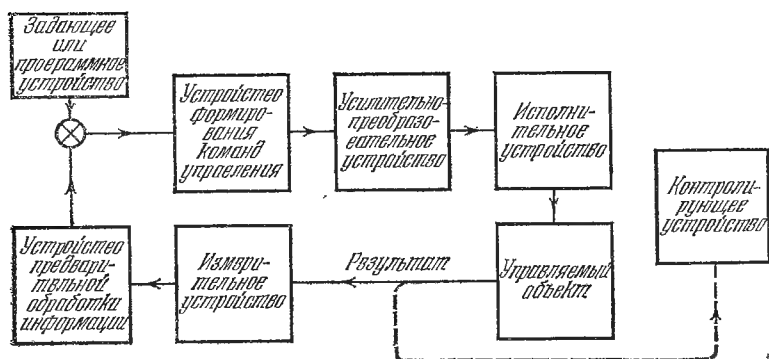


Рис. 1.3.

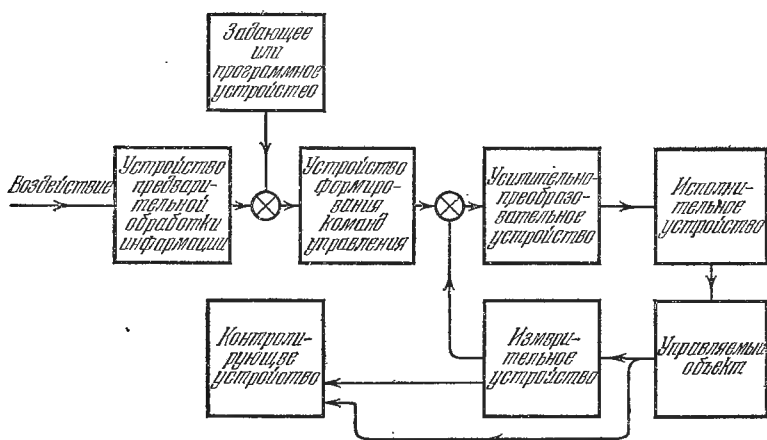


Рис. 1.4.

создании всяких замкнутых автоматических систем особое значение приобретают динамические расчеты.

Замкнутые автоматические системы существуют в технике в виде различных автоматических систем управления, систем автоматического регулирования, следящих систем, вычислительных систем, компенсационных систем измерения, систем автоматического пилотирования, систем

стабилизации, систем самонаведения, телеуправления, автономного управления и т. п.

Введем общую терминологию для следящих систем, систем регулирования и управления, изобразив общую схему в виде рис. 1.5.

В следящей системе выходная величина $y(t)$ воспроизводит изменение входной величины $g(t)$, причем автоматическое устройство реагирует на рассогласование $x(t)$ между выходной и входной величинами. Условимся величины y и g называть соответственно *регулируемой величиной* и *задающим воздействием*.

Следящая система имеет обратную связь δ выхода со входом, которая, по сути дела, служит для измерения результата действия системы. На входе

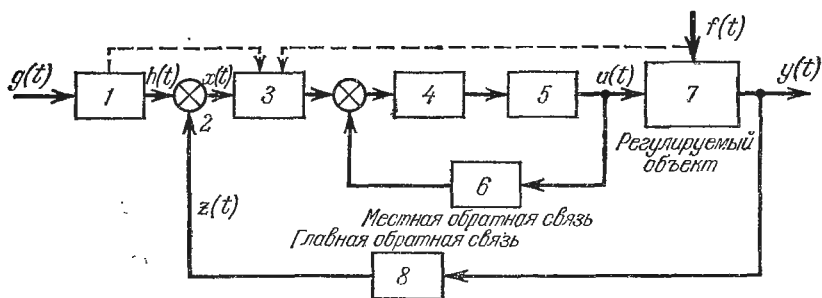


Рис. 1.5.

системы производится вычитание $x = h - z$. Устройство, производящее это вычитание, будем называть *датчиком рассогласования*. Величина рассогласования x и воздействует на промежуточные устройства, а через них — на управляемый объект. Система работает так, чтобы все время сводить к нулю рассогласование x .

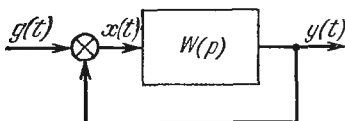


Рис. 1.6.

Упрощенную схему следящей системы можно изобразить в виде рис. 1.6, где $h = g$ и $z = y$ (единичная обратная связь).

Источником воздействия на задающее устройство может быть либо человек, либо специальное устройство, либо изменение внешних условий, в которых работает система.

Для систем автоматического регулирования введем следующую терминологию (рис. 1.5).

Агрегат 7, в котором происходит процесс, подлежащий регулированию, называется *регулируемым объектом*. Для краткости будем говорить просто *объект*. Величина y , которую необходимо в этом агрегате регулировать, т. е. поддерживать постоянной или изменять по заданной программе, называется *регулируемой величиной*.

Автоматически действующее устройство, предназначенное для выполнения задачи регулирования, называется *автоматическим регулятором* (впоследствии для краткости будем говорить просто *регулятор*). На рис. 1.5 он разбит на ряд звеньев. Автоматический регулятор включает в себя измерительное устройство 3, т. е. чувствительный элемент, реагирующий на отклонение регулируемой величины y . Далее ставится усилительно-преобразовательное и исполнительное устройства (звенья 4, 5, 6 на рис. 1.5, см. также рис. 1.2). Они служат для формирования регулирующего воздействия $u(t)$ на объект, для возможно более точного выполнения задачи регулирования при реально имеющемся возмущающем воздействии $f(t)$.

Автоматический регулятор вместе с регулируемым объектом называется *системой автоматического регулирования*.

Системы автоматического регулирования, поддерживающие постоянное (в частности, нулевое) значение регулируемой величины, называют также *системами стабилизации*. Часто этот термин применяется для систем автоматического регулирования и управления, включающих в себя гироскопические устройства (гиростабилизация), но и во многих других случаях говорят также о стабилизации скорости, напряжения и т. п. при помощи автоматических регуляторов. Система автоматического регулирования, изменяющая значения регулируемой величины по заранее заданной программе, называется *системой программного регулирования*.

Регулятор, в котором имеется усилительно-преобразовательное устройство, питаемое извне от добавочного источника энергии (рис. 1.5), называется *регулятором непрямого действия*. В простейших регуляторах, как увидим ниже, усилительно-преобразовательного устройства и привода может и не быть вовсе, т. е. измерительное устройство может непосредственно (без дополнительного источника энергии) воздействовать на регулирующий орган (рис. 1.7). Такой регулятор называется *регулятором прямого действия*. Питание регулятора прямого действия энергией идет не извне, а целиком за счет энергии самого регулируемого объекта, подаваемой через измерительное устройство.

Но существуют, наоборот, и более сложные регуляторы. Так, кроме одиночных систем регулирования, о которых здесь идет речь, состоящих из одного регулируемого объекта и одного регулятора, существуют так называемые связанные или многомерные системы регулирования. Многомерными системами регулирования называются такие, в которых имеется несколько регулируемых величин или в единый автоматически работающий комплекс связаны несколько регуляторов на одном объекте или несколько регуляторов и несколько объектов с перекрестными связями между ними.

Те же общие принципы используются в разного рода системах автоматического управления. Управление — более общий термин, чем регулирование, стабилизация, слежение, ориентация, наведение. Система автоматического управления может решать любую из этих задач, но может решать также и совокупность такого рода задач и иметь различные дополнительные функции.

Обратимся, например, к системе автоматического управления полетом самолета (система самолет — автопилот). Автопилот имеет три канала управления: управление движением в вертикальной плоскости (по тангажу), управление движением в горизонтальной плоскости (по курсу) и управление поворотом вокруг собственной оси (по крену). Для примера на рис. 1.8 изображен один канал автопилота — курсовой. Здесь корпус самолета 1 является объектом управления, гироскоп 2 с потенциометрической схемой служит измерительным устройством. Далее идут усилитель 3, приводной двигатель 4 с редуктором 5 (рулевая машинка) и, в качестве регулирующего органа, руль 6.

Гироскоп сохраняет неизменное направление в пространстве. Поэтому при отклонении самолета на угол ψ от заданного курса движок, связанный

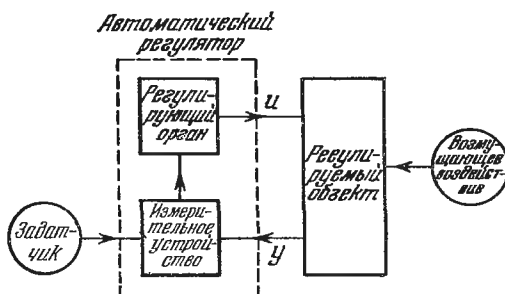


Рис. 1.7.

с гироскопом, смещается с нулевой точки. В результате на усилитель подается напряжение, пропорциональное углу отклонения ψ . Оно приводит в движение исполнительное устройство 3—5. При этом вследствие отклонения руля на угол δ самолет возвратится в требуемое положение (позднее будет показано, что одного сигнала гироскопа для управления самолетом недостаточно).

Аналогично устроены и два других канала автопилота.

Очевидно, что если с помощью автопилота надо поддерживать неизменный курс или надо разворачивать самолет по заданной программе, то данная система управления будет работать по общей схеме системы автоматического регулирования — либо в режиме стабилизации постоянной величины, либо в режиме программного регулирования. Если же самолет надо наводить

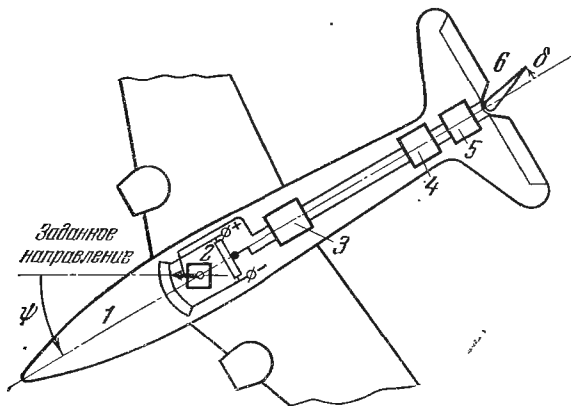


Рис. 1.8.

на какую-либо цель, причем заданное направление (рис. 1.8) вместо гироскопа (или в дополнение к нему) определяется каким-нибудь визирующим цель устройством (оптическим или радиолокационным), то данная система управления будет работать как следящая система.

Аналогично обстоит дело и по каналу тангажа. В канале крена обычно имеет место автоматическая стабилизация нулевого угла крена. При этом каждый из трех каналов управления действует на свой руль (руль направления, руль высоты,

элероны), т. е. имеется три отдельных регулятора на одном объекте. Однако между ними часто вводятся еще перекрестные связи. Например, для улучшения поворота самолета по курсу полезно самолет несколько накренить. Поэтому полезно сигнал отклонения курса подавать не только на руль направления, но также и в канал крена (так называемый координированный разворот).

Кроме того, данная система автоматического управления полетом самолета может выполнять и некоторые другие функции, связанные со стабилизацией скорости и линии пути и с анализом обстановки на местности и в воздухе на основе обработки информации от разных измерителей на борту, от команд с земли и т. п.

Большое значение в технике управления имеют системы комбинированного действия с регулированием по возмущению (пунктирные линии на рис. 1.5). Все большую роль начинают играть адаптивные системы, т. е. самонастраивающиеся, самооптимизирующиеся и самоорганизующиеся системы, а также системы с переменной структурой, о которых будет идти речь во второй главе книги.

Для систем автоматического регулирования и для следящих систем (равно как и для всех замкнутых автоматических систем вообще) существуют практически единые методы динамических расчетов.

Большое различие в теорию систем вносят не только функциональные признаки, но и характер внутренних процессов: непрерывный — дискретный (импульсный), линейный — нелинейный и т. п. Этим объясняется и деление данной книги на соответствующие крупные разделы.

§ 1.2. Классификация автоматических систем по характеру внутренних динамических процессов

Каждая автоматическая система состоит из целого ряда блоков или звеньев, различно соединенных между собой (см. рис. 1.3—1.5). Каждое отдельно взятое звено имеет вход и выход (рис. 1.9, а) в соответствии со стрелками на рис. 1.3—1.5, обозначающими воздействие или передачу информации с одного звена на другое. В общем случае звено может иметь несколько входов и выходов, но сейчас это несущественно. Входная величина x_1 и выходная x_2 могут иметь любую физическую природу (ток, напряжение, перемещение, температура, освещенность и т. п.).

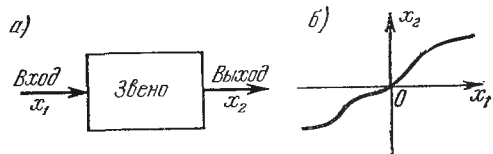


Рис. 1.9.

В процессе работы автоматической системы величины x_1 и x_2 изменяются во времени. Динамика процесса преобразования сигнала в данном звене описывается некоторым уравнением (или экспериментально снятой характеристикой), связывающим выходную переменную x_2 с входной переменной x_1 . Совокупность уравнений и характеристик всех звеньев описывает динамику процессов управления или регулирования во всей системе в целом. Существуют различные характеристики звеньев: статические, переходные, частотные и др. Далее все они будут изучены.

Основными признаками деления автоматических систем на большие классы по характеру внутренних динамических процессов являются следующие:

- 1) непрерывность или дискретность (прерывистость) динамических процессов во времени,
- 2) линейность или нелинейность уравнений, описывающих динамику процессов регулирования.

По первому признаку автоматические системы делятся на системы *непрерывного* действия, системы *дискретного* действия (импульсные и цифровые) и системы *релейного* действия.

По второму признаку каждый из указанных классов, кроме релейного, делится на системы *линейные* и *нелинейные*. Системы же релейного действия относятся целиком к категории нелинейных систем.

Дадим определение каждого класса автоматических систем, а затем рассмотрим их примеры.

Системой непрерывного действия называется такая система, в каждом из звеньев которой непрерывному изменению входной величины во времени соответствует непрерывное изменение выходной величины. При этом закон изменения выходной величины во времени может быть произвольным, в зависимости от формы изменения входной величины и от вида уравнения динамики (или характеристики) звена.

Чтобы автоматическая система в целом была непрерывной, необходимо прежде всего, чтобы статические характеристики всех звеньев были непрерывными. Примеры непрерывных статических характеристик показаны на рис. 1.10.

Системой дискретного действия называется такая система, в которой хотя бы в одном звене при непрерывном изменении входной величины выходная величина изменяется не непрерывно, а имеет вид отдельных импульсов, появляющихся через некоторые промежутки времени (рис. 1.11). Звено, преобразующее непрерывный входной сигнал в последовательность импульсов,

называется импульсным. Если последующее звено системы тоже дискретное, то для него не только выходная, но и входная величина будет дискретной (импульсной). К дискретным автоматическим системам относятся системы

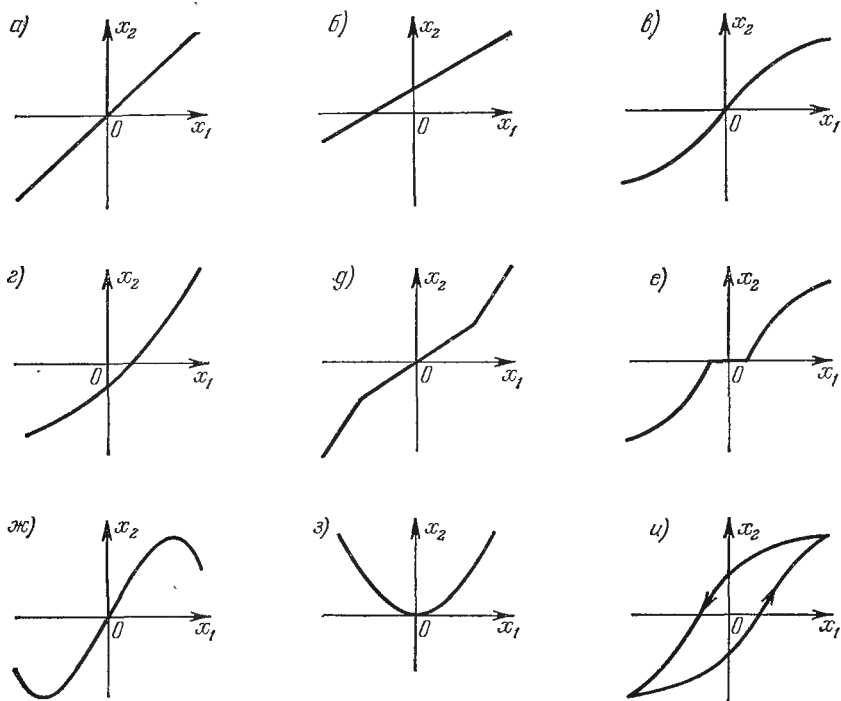


Рис. 1.10.

импульсного регулирования (т. е. системы с импульсным звеном), а также системы с цифровыми вычислительными устройствами. Эти последние дают результат вычисления на выходе дискретно, через определенные промежутки времени, в виде чисел для отдельных дискретных числовых значений входной величины.

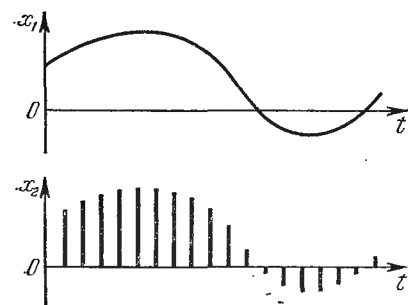


Рис. 1.11.

Системой релейного действия называется такая система, в которой хотя бы в одном звене при непрерывном изменении входной величины выходная величина в некоторых точках процесса, зависящих от значения входной величины, изменяется скачком. Такое звено называется релейным звеном. Статическая характеристика релейного звена имеет точки разрыва, как показано в различных вариантах на рис. 1.12.

Обратимся теперь ко второму признаку классификации автоматических систем.

Линейной системой называется такая система, динамика всех звеньев которой вполне описывается линейными уравнениями (алгебраическими и дифференциальными или разностными). Для этого необходимо прежде всего, чтобы статические характеристики всех звеньев системы были линейными, т. е. имели вид прямой линии (рис. 1.10, а и б).

Если динамика всех звеньев системы описывается обыкновенными линейными дифференциальными (и линейными алгебраическими) уравнениями с постоянными коэффициентами, то систему называют *обыкновенной линейной системой*.

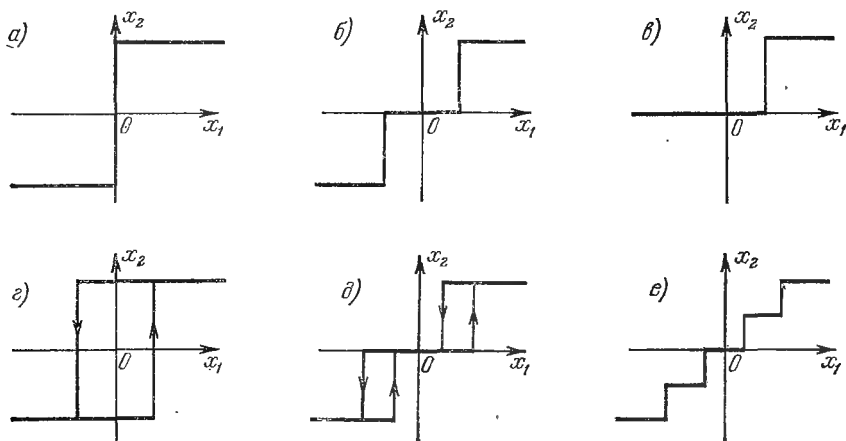


Рис. 1.12.

Если в уравнении динамики какого-либо звена линейной системы имеется хотя бы один или несколько переменных во времени коэффициентов, то получается *линейная система с переменными параметрами*. Если какое-либо звено описывается линейным уравнением в частных производных (например, имеют место волновые процессы в трубопроводе или в электрической линии), то система будет *линейной системой с распределенными параметрами*. В отличие от этого обыкновенная линейная система является *системой с сосредоточенными параметрами*. Если динамика какого-либо звена системы описывается линейным уравнением с запаздывающим аргументом (т. е. звено обладает чисто временным запаздыванием или временной задержкой τ передачи сигнала (рис. 1.13)), то система называется *линейной системой с запаздыванием*. Динамика *линейных импульсных систем* описывается линейными разностными уравнениями. Все эти системы объединяются общим названием *особые линейные системы*, в отличие от обыкновенной линейной системы, указанной выше.

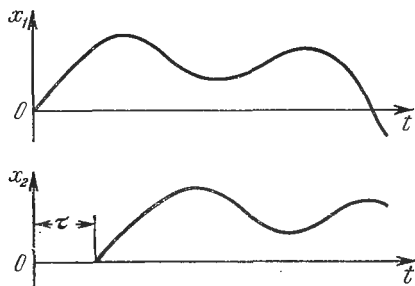


Рис. 1.13.

Заметим, что хотя классификация систем и производится по уравнениям динамики звеньев, в дальнейшем будет применяться исследование динамических процессов не только с помощью аппарата уравнений, но также и с помощью эквивалентного ему частотного аппарата, в большинстве случаев более удобного для практических приложений.

Нелинейной системой называется такая система, в которой хотя бы в одном звене нарушается линейность статической характеристики или же имеет место любое другое нарушение линейности уравнений динамики звена (произведение переменных или их производных, корень, квадрат или более высокая степень переменной, любая другая нелинейная связь переменных и их производных).

Следовательно, к нелинейным системам относятся, в частности, все системы, в звеньях которых имеются статические характеристики любого из многих видов, показанных на рис. 1.10, *в—и*. К ним же относятся и все системы релейного действия (рис. 1.12).

Нелинейными могут быть, разумеется, также и системы с переменными параметрами, с распределенными параметрами, с запаздыванием, импульсные и цифровые системы, если в них где-либо нарушается линейность уравнений динамики (в цифровых системах это связано, в частности, с квантованием сигнала по уровню).

При исследовании, расчете и синтезе автоматических систем нужно иметь в виду, что наиболее полно разработаны теория и различные прикладные методы для обыкновенных линейных систем. Поэтому в интересах простоты расчета всегда желательно (там, где это допустимо) сводить задачу

к такой форме, чтобы максимально использовать методы исследования обыкновенных линейных систем. Обычно уравнения динамики всех звеньев системы стараются привести к обыкновенным линейным, и только для некоторых звеньев, где это недопустимо или где специально вводится особое линейное или нелинейное звено, учитываются эти особые их свойства. Тогда при наличии одного такого звена система при расчете разбивается на два блока (рис. 1.14), в одном из которых объединяется весь комплекс обыкновенных линейных звеньев.

Однако это вовсе не значит, что при проектировании новых автоматических систем нужно стремиться к обыкновенным линейным системам. Наоборот, уже из приведенных выше определений совершенно очевидно, что обыкновенные линейные системы обладают ограниченными возможностями. Введение особых линейных и нелинейных звеньев может придать системе лучшие качества. Особенно богатыми возможностями обладают системы со специально вводимыми нелинейностями и дискретные системы, в том числе с цифровыми вычислительными устройствами, а также адаптивные, т. е. самонастраивающиеся, экстремальные, самоорганизующиеся системы.

§ 1.3. Примеры непрерывных автоматических систем

Один из первых в истории техники автоматических регуляторов был изобретен И. И. Ползуновым в 1765 г. Это был автоматический регулятор уровня воды в котле его паровой машины (рис. 1.15). Здесь полностью осуществлен общий принцип действия любого автоматического регулятора прямого действия (рис. 1.7). Измерительное устройство (поплавок), измеряющее регулируемую величину (высоту уровня воды в котле), непосредственно перемещает регулирующий орган (клапан питания котла водой). Котел является регулируемым объектом.

Изменение величины отбора пара из котла в паровую машину является основным возмущающим воздействием на регулируемый объект. Если отбор пара увеличится, испарение воды ускорится, уровень воды H (регулируемая величина) начнет уменьшаться. Тогда поплавок, опускаясь, будет шире открывать регулирующий клапан, усилится приток питающей воды, и уровень ее будет автоматически восстанавливаться. Кроме изменения отбора

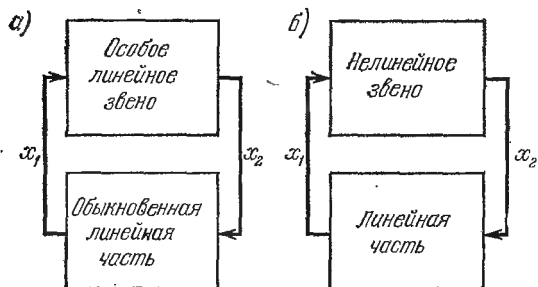


Рис. 1.14.

пара, возмущающее воздействие на объект будет проявляться также и в изменении условий теплового режима работы котла (интенсивность топки, температура питающей воды и окружающего пространства). Регулятор во всех случаях будет действовать так, чтобы ликвидировать нежелательное отклонение уровня воды, по каким бы причинам оно ни возникало.

Следующим в истории техники автоматическим регулятором, получившим широкое распространение, был центробежный регулятор скорости вращения вала паровой машины, изобретенный Уаттом в 1784 г. (рис. 1.16). Этот регулятор имеет другую конструкцию и другую природу регулируемой величины (угловая скорость ω), но совершенно тот же общий принцип действия регулятора прямого действия (рис. 1.7). Измерительное устройство регулятора (центробежный механизм) реагирует на изменение регулируемой величины ω . Так, если угловая скорость вала ω увеличивается, шары центробежного механизма расходятся, муфта поднимается и перемещает непосредственно регулирующий орган (например, заслонку в трубе питания машины паром). Это изменяет приток энергии в машину, чем автоматически уничтожается нежелательное отклонение угловой скорости ω .

Основным возмущающим воздействием на регулируемый объект здесь является изменение нагрузки на валу паровой машины. Кроме этого, может

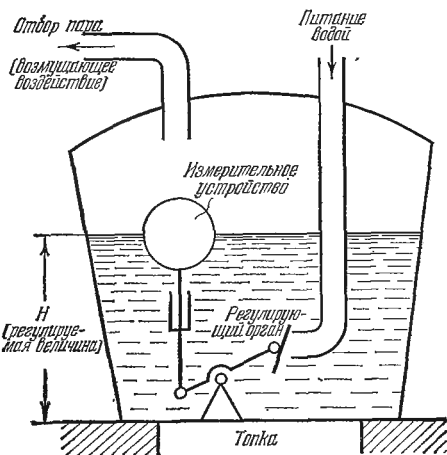


Рис. 1.15.

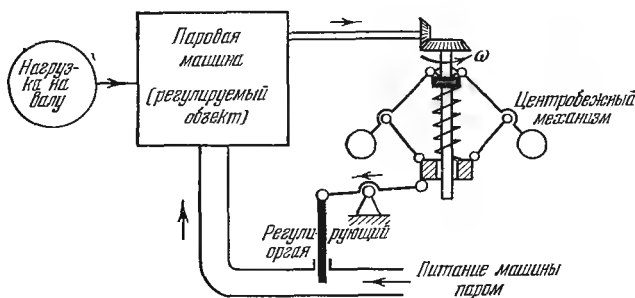


Рис. 1.16.

иметь место и другое возмущающее воздействие в виде нарушения нормальных параметров пара в трубе питания машины. Регулятор гасит влияние любого воздействия (в определенных пределах), стремясь все время ликвидировать отклонение, по какой бы причине оно ни возникало.

После изобретения этих первых автоматических регуляторов, чисто механических, в течение XIX в. в связи с потребностями промышленности, транспорта и энергетики появляется много различных конструкций регуляторов, сначала механических, а затем и электрических. Дальнейшее развитие автоматики, особенно в XX в., идет все больше и больше по пути электрификации систем автоматического регулирования, в том числе и для механических, тепловых и химических объектов.

Для иллюстрации общности принципов построения систем автоматического регулирования, относящихся к самым разнообразным техническим объектам, приведем еще несколько конкретных примеров.

На рис. 1.17 изображена схема автоматического регулирования температуры воды или масла в тепловом двигателе. Нагретая вода из двигателя

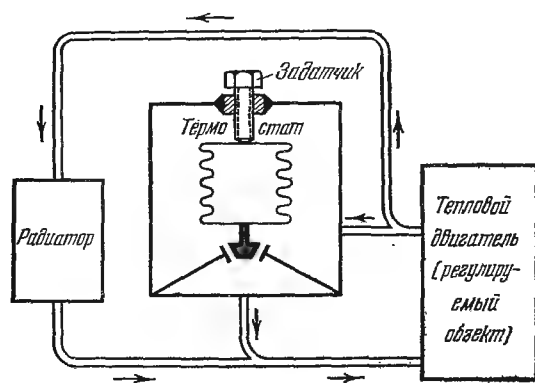


Рис. 1.17.

(регулируемый объект) поступает в термостат (измерительное устройство регулятора). Если температура воды повышается, то под действием увеличения давления паров специальной легко испаряющейся жидкости, находящейся в сильфоне термостата, прикрывается клапан прямого возврата воды в двигатель. Вследствие этого большее количество воды пойдет в обход — через радиатор, где она охлаждается. Таким образом автоматически поддерживается постоянная температура воды в системе охлаждения теп-

лового двигателя (в частности, автомобильного). Это — регулятор прямого действия, работающий по той же общей схеме (рис. 1.7).

На рис. 1.18 показана схема автоматического регулирования угловой скорости ω вращения вала электродвигателя (Дв). Последний является регулируемым объектом. Данная система работает согласно общей схеме автоматического регулятора непрямого действия (рис. 1.5).

Здесь изменение нагрузки на валу электродвигателя является возмущающим воздействием. Измерительным устройством служит тахогенератор Тг (электрический тахометр), вырабатывающий напряжение U_1 , пропорциональное регулируемой величине — угловой скорости ω . На потенциометре задатчика устанавливается напряжение U_0 , соответствующее требуемому значению угловой скорости ω . Рассогласование $U_2 = U_0 - U_1$ подается на электромашинный усилитель (ЭМУ). Может быть введен также предварительный электронный усилитель (показан пунктиром). Электромашинный усилитель в соответствии с поступающим в его обмотку возбуждения сигналом U_3 изменяет ток в цепи якоря электродвигателя. Это является регулирующим воздействием, которое ликвидирует создавшееся отклонение угловой скорости ω .

Для иллюстрации комбинированной системы с регулированием по возмущению возьмем ту же систему регулирования скорости электродвигателя (рис. 1.18) и, сохранив целиком всю прежнюю цепь регулирования по отклонению регулируемой величины, добавим к ней новую цепь регулирования по возмущающему воздействию (рис. 1.19). Эта новая дополнительная цепь состоит из моментной муфты, которая измеряет возмущающее воздействие в виде отклонения момента нагрузки от номинального значения, и из специального корректирующего устройства.

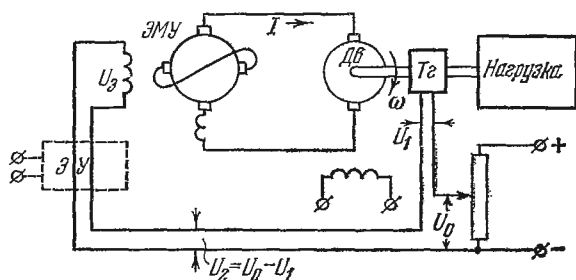


Рис. 1.18.

По принципу обычной системы регулирования работает также система автоматического управления торпеды по курсу (рис. 1.20). Гироскоп 2, сохраняя неизменное направление, измеряет отклонение торпеды ψ от заданного курса. С гироскопом жестко связана заслонка, открывающая доступ

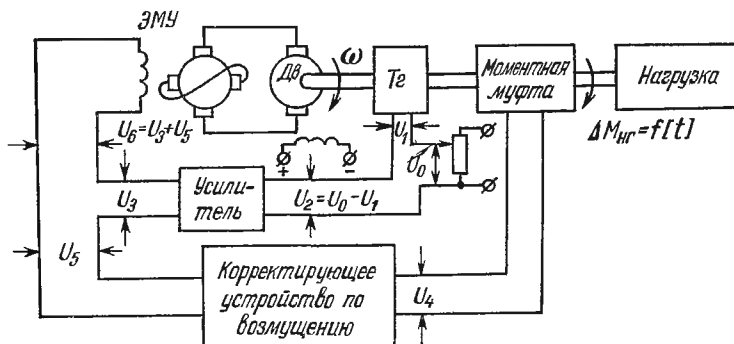


Рис. 1.19.

воздуха под давлением в пневматическую рулевую машинку 3 (исполнительное устройство), которая поворачивает руль 4, возвращая тем самым торпеду на заданный курс.

Рассмотрим еще упрощенную схему автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока при помощи электронного регулятора (рис. 1.21). В данном случае регулируемым объектом является генератор постоянного тока, регулируемой величиной — напряжение U на клеммах генератора, внешним возмущающим воздействием — нагрузка в сети, на которую работает генератор. Измерительным устройством регулятора служит сетка лампы, а исполнительным устройством — анодная цепь лампы. При нежелательном изменении напряжения U появляется напряжение U_g на сетке и пропорциональное ему изменение тока I_a в анодной цепи, а следовательно, и в обмотке возбуждения генератора, которая включена в анодную цепь. Этим изменением тока возбуждения ликвидируется нежелательное отклонение регулируемого напряжения.

Рассмотренные примеры относятся к одиночным системам автоматического регулирования.

Примерами связанных систем регулирования являются системы регулирования напряжения и частоты переменного тока, регулирования скорости и температуры в реактивных двигателях, регулирования различных величин в энергетической системе, состоящей из нескольких параллельно

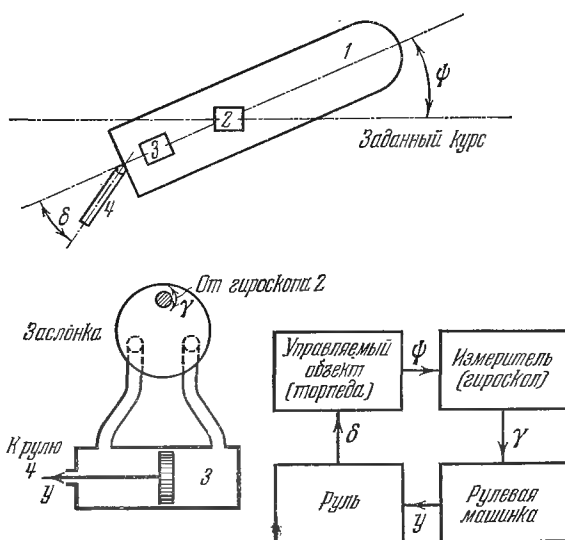


Рис. 1.20.

работающих объектов. Связанная система управления получается и при рассмотрении работы всего автопилота на самолете в целом.

Пример электромеханической следящей системы показан на рис. 1.22. Принцип ее действия следующий. На входе вращением рукоятки задается

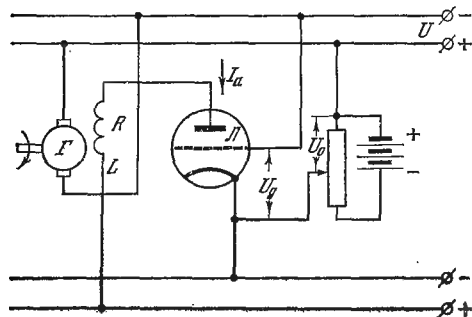


Рис. 1.21.

произвольный закон для угла поворота во времени $\varphi_0(t)$. Тот же самый закон угла поворота во времени должен быть автоматически воспроизведен на выходе системы, т. е. на управляемом объекте: $\varphi_1 = \varphi_0(t)$. Для этой цели угол поворота на выходе φ_1 передается при помощи вала обратной связи на вход системы, где он вычитается из задаваемого угла φ_0 . Это вычитание осуществляется при помощи механического дифференциала. Если угол на выходе φ_1 не равен углу на входе φ_0 , то третий валик дифференциала повернется на

разность этих углов $x = \varphi_0 - \varphi_1$ (рассогласование). Пропорциональное ей напряжение U подается через усилитель на приводной двигатель, который вращает выходной вал системы. Если же $\varphi_1 = \varphi_0$, то двигатель обесточен

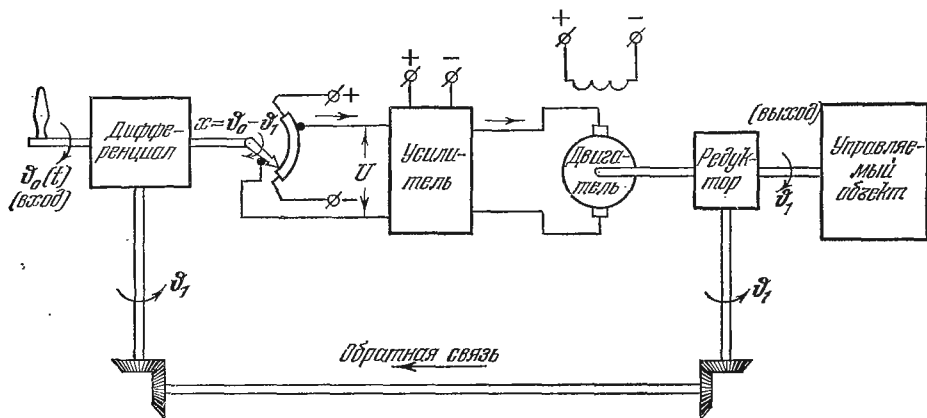


Рис. 1.22.

и вращения не будет. Следовательно, система все время работает на уничтожение рассогласования $x = \varphi_0 - \varphi_1$, решая, таким образом, задачу воспроизведения на выходе φ_1 произвольно задаваемой на входе величины $\varphi_0(t)$. Такая система позволяет при незначительной мощности на входе управлять любыми мощными или тяжелыми объектами (орудийными башнями и т. п.).

Очень часто следящие системы применяются для дистанционного управления самыми разнообразными объектами, а также для телеуправления. Дистанционное управление трудно осуществить при механической обратной связи, показанной на рис. 1.22. В этом случае применяется реостатная обратная связь на постоянном токе (рис. 1.23) или сельсинная обратная связь на переменном токе (рис. 1.24), т. е. механический вал обратной связи заменяется электрической передачей. При этом пульт управления (вход системы) и управляемый объект (выход) могут находиться на некотором расстоянии друг от друга. Здесь рассогласование получается непосредственно в виде электрической величины $U = U_0 - U_1$ (рис. 1.23).

Все три примера относятся к электромеханическим следящим системам. Существуют также электрогидравлические, электропневматические и чисто гидравлические или пневматические следящие системы, в зависимости от вида применяемых в них усилительных устройств. Общий принцип действия во всех случаях остается тем же самым.

Телеуправление применяется, когда пульт управления относится на большие расстояния. Он может быть неподвижным, а управляемый объект может

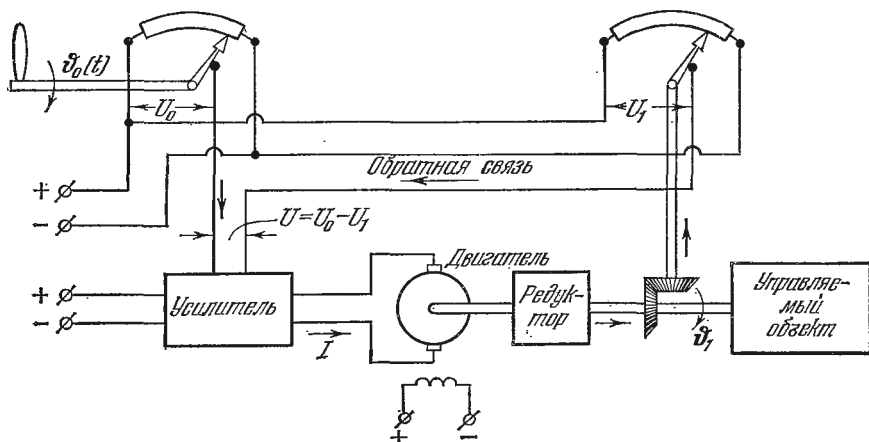


Рис. 1.23.

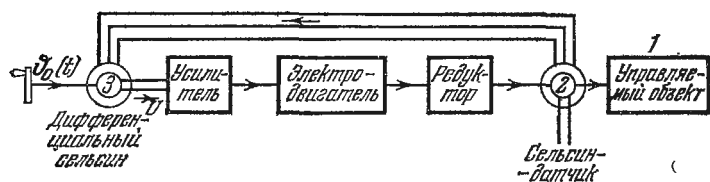


Рис. 1.24.

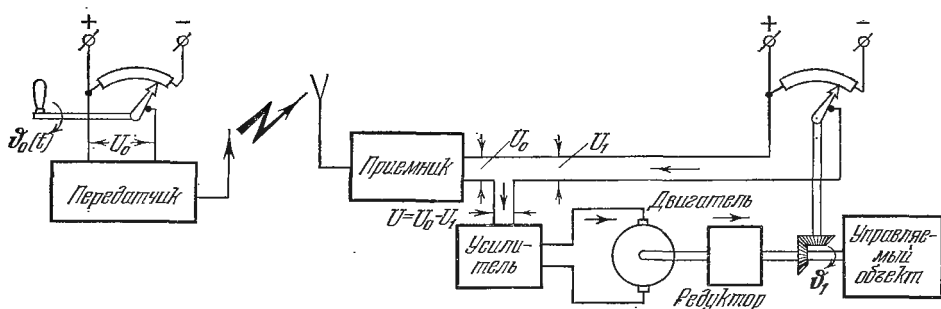


Рис. 1.25.

двигаться в пространстве. В этом случае между задатчиком величины $\varphi_0(t)$, помещаемым в пульте управления, и входом следящей системы вводится радиолиния или другая линия связи для передачи задаваемой величины $\varphi_0(t)$ в виде электрической величины $U_0(t)$ (рис. 1.25).

Входная и выходная величины следящей системы могут быть не только механические, как в примерах на рис. 1.22—1.25; они могут иметь любую физическую природу. В соответствии с этим конструкции тоже могут быть весьма разнообразными. Следящие системы, у которых входная и выходная

величины представляют собой механические перемещения (вращения), иногда называются сервомеханизмами.

По принципу следящей системы работают многие системы дистанционного управления различными объектами, радиолокационные системы сопровождения самолетов, многие счетно-решающие устройства (например, интегрирующее устройство, схема которого дана на рис. 1.26), усилители

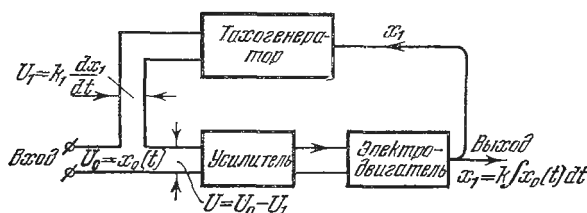


Рис. 1.26.

с отрицательной обратной связью, многие точные измерительные системы, радиоконпас, радиодальномер и т. п.

В настоящее время во многих областях техники существует огромное количество самых разнообразных систем автоматического управления, использующих принцип следящих систем. Он применяется почти везде, где нужно добиться высокой точности и надежности автоматического управления.

§ 1.4. Примеры дискретных и релейных автоматических систем

Чтобы наглядно представить себе принцип работы простейшей импульсной системы регулирования, покажем, как ее можно получить из обыкновенных линейных систем регулирования непрерывного действия, т. е. из тех систем, которые рассматривались в предыдущих параграфах.

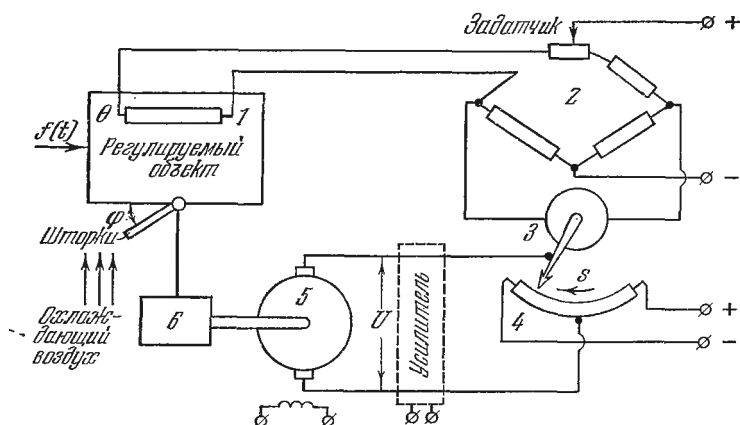


Рис. 1.27.

Возьмем систему регулирования температуры непрерывного действия (рис. 1.27). Она работает согласно общей схеме (рис. 1.5). Необходимо поддерживать постоянную температуру объекта, охлаждаемого воздухом. Регулирующим органом являются шторки, угловое положение которых φ определяет собой интенсивность поступления охлаждающего воздуха.

Измерительное устройство регулятора состоит из термометра сопротивления 1, включенного в качестве одного из плеч моста 2, и гальванометра 3, измеряющего ток в диагонали моста. Мост 2 настраивается так, что при заданной температуре, которую надо поддерживать неизменной, ток в диагонали моста отсутствует. Таким образом, измерительное устройство (1, 2, 3) регулятора дает на выходе перемещение стрелки s , пропорциональное отклонению температуры θ .

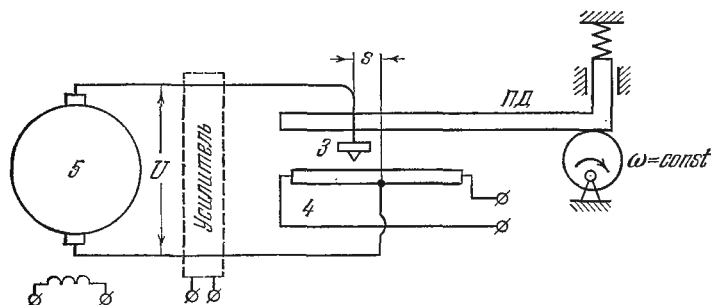


Рис. 1.28.

Стрелка скользит по потенциометру 4, управляющему работой двигателя 5. Якорь двигателя питается через потенциометр (иногда дополненный усилителем). Двигатель 5 через редуктор 6 вращает штурвалы.

Существенным недостатком данной конкретной системы является то, что стрелка гальванометра 3 имеет значительную механическую нагрузку

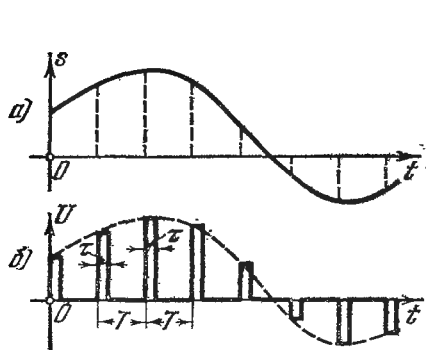


Рис. 1.29.

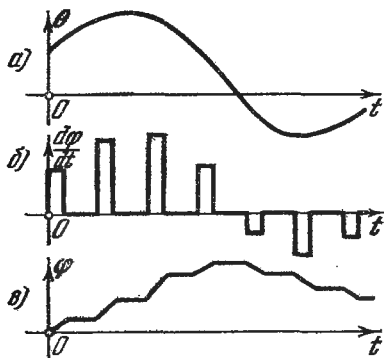


Рис. 1.30.

в виде трения об обмотку потенциометра. Это заметно снижает чувствительность измерителя, а значит, и всего регулятора к малым отклонениям регулируемой величины θ . Целесообразно было бы предоставить стрелке гальванометра возможность двигаться свободно без нагрузки. Это делается следующим образом.

На рис. 1.28 изображен вид на стрелку гальванометра 3 с торца (с носика). Носик стрелки движется вправо и влево свободно, не прикасаясь к обмотке потенциометра. Над стрелкой помещена так называемая падающая дужка ПД, опирающаяся на эксцентрик, который вращается с постоянной угловой скоростью ω . Когда падающая дужка приходит в нижнее положение, она прижимает стрелку гальванометра 3 к обмотке потенциометра 4 на короткое время. В течение остального периода колебаний дужки стрелка 3 свободна.

В результате при непрерывном перемещении стрелки s напряжение U , питающее цепь якоря двигателя, будет подаваться с потенциометра в виде коротких импульсов (рис. 1.29).

Постоянный период чередования импульсов T задается системе принудительно извне и определяется величиной угловой скорости ω вращения эксцентрика независимым от данной системы приводом. Длительность импульсов τ тоже постоянна.

Поскольку перемещение стрелки s пропорционально отклонению регулируемой температуры θ , а скорость вращения вала электродвигателя $d\varphi/dt$ примерно пропорциональна питающему напряжению U , то в первом приближении получается импульсная зависимость скорости вращения привода регулирующего органа от отклонения регулируемой величины, показанная на рис. 1.30, б. Там же изображен вытекающий отсюда закон движения самого регулирующего органа — перемещение шторок $\varphi(t)$. В первом приближении они равномерно движутся во время подачи импульса и затем стоят на месте в промежутке между импульсами.

На самом же деле, конечно, за счет инерционности двигателя при подаче импульса напряжения нарастание и убывание скорости $d\varphi/dt$ будет происходить не мгновенно, как на рис. 1.30, б, а по некоторой кривой (рис. 1.31, а).

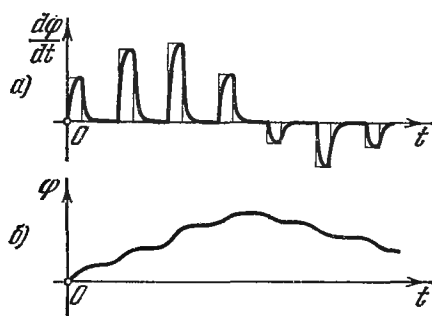


Рис. 1.31.

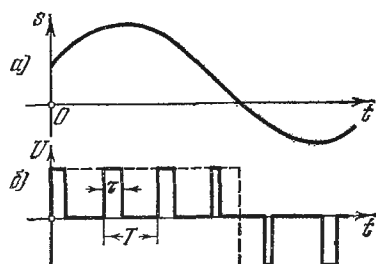


Рис. 1.32.

Поэтому регулирующее воздействие $\varphi(t)$ на объект со стороны реального импульсного регулятора будет иметь несколько сглаженный вид (рис. 1.31, б). Отсюда видно, что необходимо разумно выбирать величины периода чередования T и длительности τ импульсов, с учетом инерционности выхода из импульсного звена, в данном случае — инерционности разгона и остановки (или, как говорят, «приемистости») двигателя. Существуют, конечно, и другие, не менее важные условия для выбора T и τ .

Всякое устройство, которое осуществляет указанное на рис. 1.29 преобразование непрерывной входной величины (в данном случае s) в дискретную импульсную величину (U), т. е. в последовательность импульсов с постоянным периодом их чередования, называется импульсным звеном. В данном примере было рассмотрено механическое импульсное звено с электрическим выходом. Вообще в других автоматических системах оно может осуществляться и чисто электрическими и электронными устройствами, в особенности там, где требуется малый период T чередования импульсов (с другим входом, с менее инерционным выходом и для других объектов).

Импульсное звено, осуществляющее указанное на рис. 1.29 преобразование величин, называется *импульсным звеном типа 1*.

Применяется также и другое *импульсное звено — типа 2*, осуществляющее показанное на рис. 1.32 преобразование, при котором величина импульсов U постоянна, но зато длительность их τ переменна и пропорциональна значению входной величины s в момент начала импульса, причем период чередования импульсов T остается по-прежнему постоянным.

Импульсное звено типа 2 можно осуществить, например, в той же системе регулирования температуры с помощью падающей дужки, имеющей

наклонные вырезы, заменив потенциометр на контактные пластины (рис. 1.33), или с помощью специальных электрических схем.

Основной смысл введения импульсного звена в системах автоматического регулирования заключается в освобождении измерительного устройства регулятора от нагрузки на его выходе. Это позволяет применить более точное и тонкое маломощное устройство для измерения отклонения регулируемой величины, т. е. улучшает реакцию регулятора на это отклонение с обеспечением в то же время достаточной мощности регулирующего воздействия на объект. Кроме того, при импульсном режиме уменьшается расход энергии на привод регулирующего органа. В других системах (например, в системах телеуправления и телеизмерения) импульсный режим может быть полезен также с точки зрения удобства построения многоканальных схем и т. п.

К дискретным системам относятся системы автоматического управления и регулирования в тех случаях, когда в замкнутый контур системы включается *цифровое вычислительное устройство*. Это устройство бывает необходимо в тех случаях, когда, например, измерительные приборы в системе управления не могут измерить непосредственно отклонение регулируемой величины от требуемого (программного) значения, а оно должно вычисляться по определенным формулам через показания измерительных приборов.

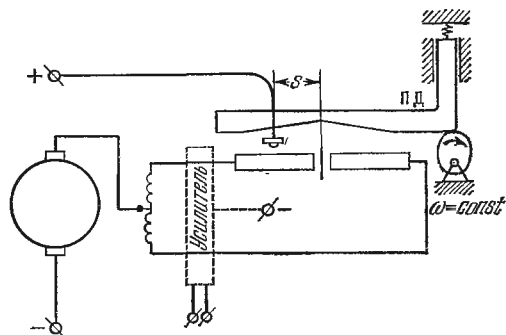


Рис. 1.33.

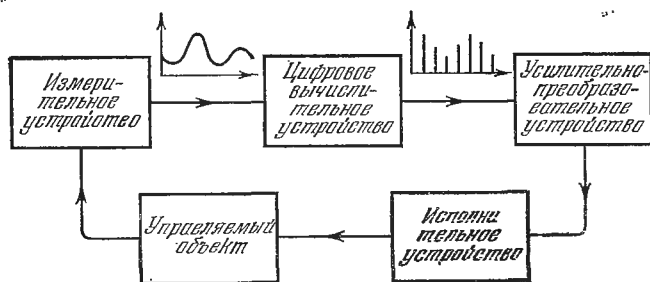


Рис. 1.34.

В других случаях цифровое устройство может служить для вычисления не только отклонения, но и самого программного значения регулируемой величины по каким-либо критериям наилучшего качества работы данной системы. Цифровое устройство может выполнять и другие весьма разнообразные функции.

Система регулирования или управления в этих случаях будет работать как дискретная, потому что цифровое устройство выдает результат вычисления дискретно, т. е. в виде импульсов через некоторые промежутки времени, необходимые для производства вычисления.

Включение цифрового вычислительного устройства в контур системы управления сопряжено с преобразованием непрерывных величин в дискретные на входе и с обратным преобразованием на выходе (рис. 1.34). Темп

работы вычислительного устройства подбирается обычно так, чтобы дискретность его действия не влияла на работу системы в целом, т. е. чтобы запаздывание (время операции вычисления) было небольшим, а частота следования импульсов была достаточно высокой. Учитывать дискретность системы всегда необходимо для определения допустимой ее величины. При достаточно высоком темпе работы цифрового вычислительного устройства (по сравнению с инерционностью системы) во многих случаях можно производить расчет системы в целом как непрерывной. Вообще же цифровые системы автоматического регулирования относятся к особому классу систем и их теория рассматривается отдельно от других.

Релейные системы автоматического регулирования можно отнести, как и импульсные, описанные выше, к категории систем прерывистого действия, но их существенное отличие от импульсных систем заключается в том, что релейные системы по самому принципу своему являются нелинейными системами. Дело в том, что здесь моменты времени, в которые происходит замыкание и размыкание системы, заранее неизвестны; они не задаются извне, а определяются внутренними свойствами самой системы (ее структурой и величинами ее параметров). Этим обуславливаются и основные специфические особенности динамики процессов регулирования в релейных системах.

В качестве первого примера релейной системы рассмотрим систему регулирования температуры примерно той же структуры, как на рис. 1.27, но с тем отличием, что вместо импульсного звена для управления работой привода шторок в ней поставлено релейное звено — в данном случае поля-

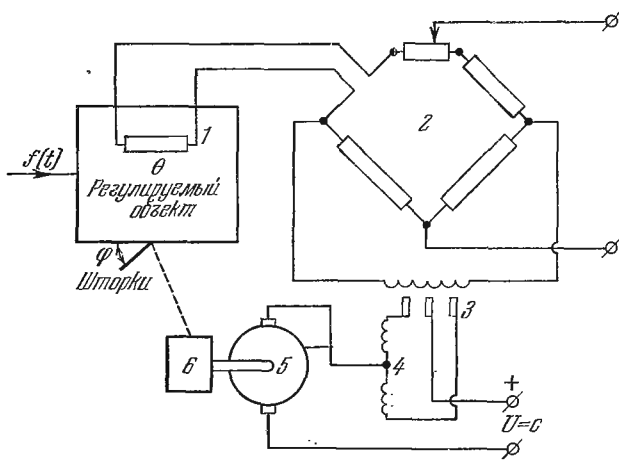


Рис. 1.35.

ризованное реле 3 (рис. 1.35). Его средний контакт в зависимости от знака тока в диагонали моста 2, т. е. в зависимости от знака отклонения регулируемой величины θ , замыкается с правым или левым контактом, включая ток либо в одну, либо в другую обмотку возбуждения двигателя, в результате чего получаем либо одно, либо другое направление движения шторок на регулируемом объекте.

Из сети в управляемую цепь реле (цепь контактов) подается постоянное напряжение $U = c$. Напряжение U , питающее двигатель, изменяется в зависимости от величины тока I в диагонали моста по одному из законов, изобра-

женных на рис. 1.36. Нейтральному положению среднего контакта реле соответствует значение $U = 0$ при малых величинах тока — $b < I < b$ (рис. 1.36, а). При некоторой величине тока $I = b$ реле срабатывает, включая напряжение $U = c$ в одну из обмоток двигателя. При обратном направлении тока I , которое считается отрицательным, будет та же картина срабатывания при $I = -b$, причем то же самое напряжение U включается в другую обмотку двигателя и задает ему другое направление вращения. Это направление будем считать отрицательным и поэтому напряжение в этом случае будем отмечать знаком минус: $U = -c$ (рис. 1.36, а). Интервал $-b \leq I \leq b$, где $U = 0$, называется зоной нечувствительности реле. Показанная зависимость выходной величины реле U от входной I называется статической характеристикой реле.

Как известно, величина тока срабатывания реле не совпадает с величиной тока отпускания. При учете этого обстоятельства получаем петлевую статическую характеристику (рис. 1.36, б), где b_2 — величина тока срабатывания, а b_1 — тока отпускания. Эта петля аналогична той, которая получается при гистерезисных явлениях. Поэтому и в данном случае ее называют гистерезисной петлей. Если петля не широка, то ее часто можно пренебречь.

Зона нечувствительности реле, имеющая место в этих двух статических характеристиках, получается в том случае, когда средний контакт поляризованного реле обладает нейтральным положением. Если этого нет, то он будет сразу перескакивать из одного крайнего положения в другое (рисунок 1.36, в). Это — идеальная релейная характеристика без зоны нечувствительности и без петли. Реальная характеристика реле и в данном случае тоже будет иметь петлю (рис. 1.36, г), половину ширины которой обозначаем через b . Это — характеристика реле с петлей без зоны нечувствительности, т. е. без среднего нейтрального положения.

В приведенном примере в релейную систему входило электромагнитное реле, управляющее работой привода регулирующего органа. Однако к релейным системам регулирования и управления относятся не только системы, содержащие именно реле, а всякие системы, в составе которых есть звенья (любой физической природы), обладающие статическими характеристиками релейного типа, когда выходная величина звена изменяется скачкообразно при непрерывном изменении входной величины.

Например, если в пневматической системе управления курсом водяной торпеды (рис. 1.20) открытие заслонки происходит достаточно быстро, то статическая характеристика работы заслонки будет релейная, как показано на рис. 1.37, где γ — угол поворота заслонки, передаваемый от гироскопа, а p — давление воздуха. В этой системе заслонка играет ту же роль, что электромагнитное реле в первом примере.

Возможно и другое рассмотрение данной пневматической системы. Предположим, что поршень рулевой машинки 3 (рис. 1.20) очень быстро по сравнению с поворотом самой торпеды перебрасывается из одного крайнего положения в другое при открытии заслонки и остается достаточно длительное время в крайнем положении, пока не поступит сигнал обратного

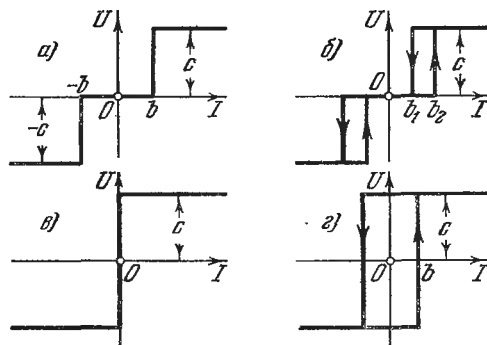


Рис. 1.36.

знака. Тогда можно сразу изобразить характеристику всего регулятора в релейном виде, показанном на рис. 1.38.

Последний случай отличается от предыдущих двух тем, что здесь сам регулирующий орган работает в релейном режиме, а там было релейное управление привода регулирующего органа. Это — два наиболее распространенные типа релейных автоматических систем.

Приведем еще более типичный пример такой релейной системы, в которой сам регулирующий орган работает в релейном режиме (двухпозиционном). Это — система регулирования скорости ω электродвигателя (рис. 1.39). Чувствительный элемент (центробежный механизм 1) дает непрерывное перемещение муфты s . В некотором среднем положении, которое примем за начало отсчета s , муфта нажимает на контакт 2 (регулирующий орган), замыкая его. При разомкнутом контакте 2 в цепь возбуждения регулируемого двигателя O включено добавочное сопротивление R_d . При замкнутом контакте 2 оно выключено, так как цепь возбуждения замыкается параллельно этому сопротивлению. Поэтому статическая характеристика регулирующего органа

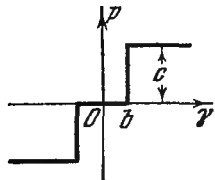


Рис. 1.37.

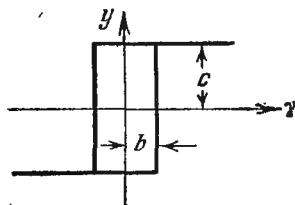


Рис. 1.38.

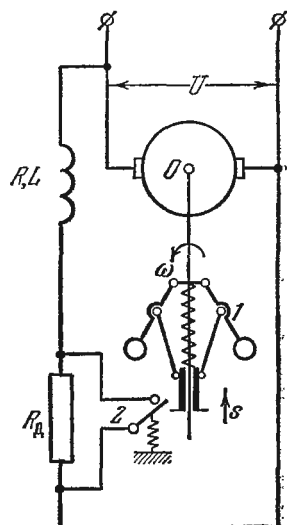


Рис. 1.39.

будет иметь вид, показанный на рис. 1.40 без петли (а) или с петлей (б), в зависимости от качества контактной пары.

Другим типичным примером двухпозиционного релейного регулирования (с релейным режимом работы регулирующего органа) является вибрационное регулирование напряжения на клеммах генератора постоянного тока, применяемое на автомобилях, самолетах и т. п. Принципиальная схема показана на рис. 1.41. Регулируемая величина — напряжение U . При отклонении напряжения изменяется ток в обмотке электромагнита. Это создает изменение тяговой силы электромагнита. При уменьшении

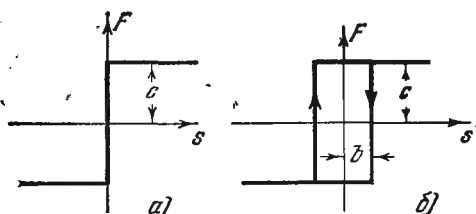


Рис. 1.40.

последней пружина замыкает контакты K , выключая добавочное сопротивление R_d из цепи возбуждения генератора. Следовательно, регулирующий орган (контакты) здесь будет иметь релейную характеристику, показанную на рис. 1.42.

последней пружина замыкает контакты K , выключая добавочное сопротивление R_d из цепи возбуждения генератора. Следовательно, регулирующий орган (контакты) здесь будет иметь релейную характеристику, показанную на рис. 1.42.

Релейные системы, так же как и дискретные цифровые (с двоичным кодом), обладают перед непрерывными системами тем преимуществом, что не требуют высокой стабильности элементов для соблюдения определенной зависимости между выходной и входной

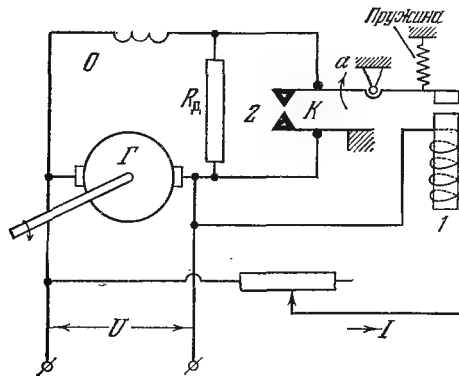


Рис. 1.41.

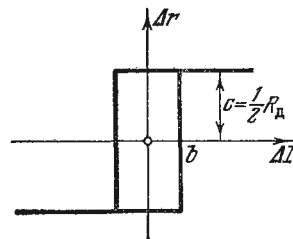


Рис. 1.42.

величинами. Они работают по принципу «да — нет», т. е. по наличию или отсутствию входного сигнала и его знаку (с определенным порогом срабатывания).

ПРОГРАММЫ И ЗАКОНЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ. АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 2.1. Программы регулирования

Задачей системы автоматического регулирования или управления является, как уже говорилось, поддержание требуемого значения регулируемой величины y (рис. 1.5) или изменение ее по определенной программе, которая либо заранее задается, либо поступает извне во время эксплуатации системы в зависимости от некоторых условий.

Программы могут быть *временными* (задаваемыми во времени):

$$y = y(t),$$

или *параметрическими* (задаваемыми в текущих координатах):

$$y = y(s_1, s_2, \dots, s_n),$$

где $s_1, s_2, \dots, s_n$ — какие-либо физические величины, характеризующие текущее состояние объекта в процессе регулирования.

Примером *временной программы* может служить программа изменения регулируемой величины, обеспечивающая правильный режим начального «разгона» мощного регулируемого объекта при пуске его в ход до наступления режима нормальной эксплуатации, в котором объект затем будет работать длительное время.

Например, автоматический регулятор угловой скорости мощного двигателя может быть предназначен не только для поддержания постоянной скорости в режиме нормальной эксплуатации, но еще и для регулирования требуемого режима нарастания скорости во времени (рис. 2.1, где y — угловая скорость) при пуске двигателя в ход, чтобы избежать каких-либо опасных отклонений.

Аналогичная программа регулирования во времени может задаваться при термической обработке металлов, когда требуется определенный режим быстроты нагрева металла (рис. 2.1, где y — температура в печи) до определенной температуры y_0 , при которой металл затем будет выдерживаться в печи.

В других случаях нормальный режим работы объекта может быть связан с непрерывным программным изменением регулируемой величины во времени (рис. 2.2), например угла тангажа вертикально взлетающей ракеты на активном участке ее полета [94].

Во всех описанных случаях в составе автоматического регулятора или системы управления имеется программное устройство (рис. 1.3), в которое заранее заложена требуемая временная программа. В случае же следящей системы тоже задается требуемый закон изменения регулируемой величины $g(t)$ (рис. 1.5), но он не задан заранее, а может быть в определенных пределах произвольным.

Примером *параметрической программы* регулирования может служить задание требуемого переменного значения высоты полета y (рис. 2.3) при снижении летательного аппарата, но не во времени, а в зависимости от текущего значения пройденного пути s , чтобы снизиться в определенную точку независимо от времени протекания этого процесса.

Другим примером параметрической программы регулирования может быть задание переменного давления в герметической кабине высотного



Рис. 2.1.

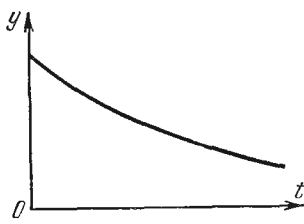


Рис. 2.2.

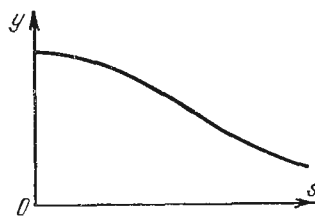


Рис. 2.3.

самолета в зависимости от текущего значения высоты полета (рис. 2.3, где y — давление, s — высота).

Наконец, типичным примером параметрических программ регулирования являются так называемые *законы наведения* в системах телеуправления и самонаведения снарядов. Законом наведения называется особая программа управления, которая задается через текущие значения координат и скоростей управляемого объекта независимо от того, в какой момент времени они имеют место в процессе движения объекта.

Пусть, например, тело A (рис. 2.4) должно быть сближено с телом B для мягкого контакта; ρ — текущее относительное расстояние между ними. Условия, которые должны быть выполнены в процессе сближения, следующие:

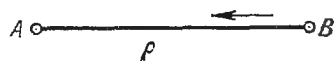


Рис. 2.4.

$$\dot{\rho} < 0, \quad (2.1)$$

$$\dot{\rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 0, \quad (2.2)$$

$$|\ddot{\rho}| \text{ ограничено,} \quad (2.3)$$

$$T \text{ ограничено,} \quad (2.4)$$

где T — время сближения. Условие (2.2) — условие мягкого контакта в конце сближения. Условия (2.1), (2.3) должны выполняться в течение всего процесса сближения, причем ограничение $\ddot{\rho}$ связано с ограничением мощности или силы управляющего воздействия. Представим закон наведения в виде

$$\dot{\rho} + f(\rho) = 0; \quad (2.5)$$

Таким образом, в системе регулирования должны быть измерители величин ρ и $\dot{\rho}$ и устройство формирования сигнала

$$u = \dot{\rho} + f(\rho), \quad (2.6)$$

величина которого должна при помощи системы регулирования все время сводиться к нулю. Найдем целесообразное выражение функции $f(\rho)$.

Если принять линейный закон наведения, т. е. положить $f(\rho) = k\rho$, при котором уравнение (2.5) имеет вид

$$\dot{\rho} + k\rho = 0, \quad (2.7)$$

то окажется, что при этом $T = \infty$. Следовательно, линейный закон наведения не годится.

Обратимся к нелинейной функции вида $f(\rho) = k\rho^b$. Тогда нелинейный закон наведения (2.5) будет иметь вид

$$\dot{\rho} + k\rho^b = 0. \quad (2.8)$$

Оказывается, что при $b > 1$ величина $T = \infty$, а при $b < 1/2$ величина $\ddot{\rho} = \infty$ при $\rho = 0$. Если же

$$1/2 \leq b < 1, \quad (2.9)$$

то T конечно, причем $\ddot{\rho} = \text{const}$ при $b = 1/2$, а в остальных случаях ($1/2 < b < 1$) величина $|\ddot{\rho}|$ уменьшается в процессе наведения с уменьшением ρ .

В результате приемлемым оказывается нелинейный закон наведения (2.8) при значении b в интервале (2.9). Конкретизация значения b внутри этого интервала может производиться на основании каких-либо других требований применительно к каждой конкретной технической системе.

Итак, в системах автоматического регулирования и управления прежде всего задается тем или иным способом программа регулирования (в описанном выше широком понимании этого термина). Стабилизация неизменного значения регулируемой величины будет простейшим частным случаем программы регулирования $y_{\text{пр}} = \text{const}$.

Программа регулирования $y_{\text{пр}}(t)$ будет осуществляться регулятором или системой управления неизбежно с некоторыми ошибками, как показано на рис. 2.5. Ошибка системы (рассогласование)

$$x(t) = y_{\text{пр}}(t) - y(t)$$

обусловлена как погрешностями реальной аппаратуры, так и самим принципом построения регулятора. При этом меняющаяся в процессе регулирования так называемая *динамическая ошибка* $x(t)$ может перейти в некоторое постоянное отклонение регулируемой величины в установившемся режиме при $y_{\text{пр}} = \text{const}$, называемое *статической ошибкой* $x_{\text{ст}}$.

Понятие «динамическая ошибка» является очень широким. В него включаются все виды ошибок систем автоматического регулирования, которые имеют место в динамических процессах, т. е. при меняющихся внешних воздействиях (возмущающих или управляющих) и во всех случаях переходных процессов. Различные виды этих ошибок и способы их уменьшения будут предметом изучения во всех дальнейших главах книги.

Величины динамических и статических ошибок регулирования в очень сильной степени зависят от структуры регулятора, определяющей так называемый *закон регулирования*. Этот вопрос станет ясным в дальнейшем, а здесь можно дать лишь некоторое общее понятие о законах регулирования.

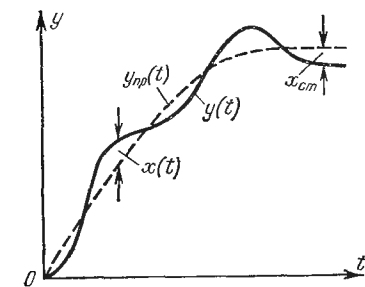


Рис. 2.5.

§ 2.2. Лине́йные и нели́нейные законы регулирования

Автоматический регулятор в системе регулирования состоит, как уже известно, из трех основных частей: измерительной, усилительно-преобразовательной и исполнительной. В усилительно-преобразовательной части имеются корректирующие устройства, в которых, помимо сигнала отклонения x регулируемой величины, образуется сигнал по первой производной dx/dt (может быть также и по второй производной и по интегралу от отклонения $\int x dt$), вводятся дополнительные обратные связи и т. п. Все это служит для улучшения устойчивости, точности и качества процесса регулирования и будет подробно изучено в дальнейшем.

Закон, по которому формируется регулирующее воздействие u на объект (рис. 2.6) из первичных сигналов x , $\frac{dx}{dt}$ и т. п., называется **законом регулирования**. Иначе говоря, закон регулирования есть алгоритм формирования целесообразного сигнала управления u на основании первичной информации x , $\frac{dx}{dt}$ и т. п. В комбинированных системах регулирования, кроме того, добавляется первичная информация по возмущению $f(t)$, а иногда и по задающему воздействию $g(t)$. Математически закон регулирования определяется уравнением автоматического регулятора. Различают линейные и нелинейные законы регулирования.

Кроме упоминавшихся выше корректирующих устройств, регулятор (система управления) может содержать различные фильтры (линейные или нелинейные) для борьбы с различного рода помехами. В усилительно-преобразовательном устройстве часто производятся также преобразования одних физических величин в другие (одного рода тока в другой, электрических величин в механические и т. п.) для удобства формирования закона регулирования в малоомощных цепях регулятора, а также в интересах работы достаточно мощных исполнительных устройств.

Линейные законы регулирования определяются линейным уравнением регулятора, например, вида

$$T_2^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + T_1 \frac{du}{dt} + u = \\ = k \left(x + k_1 \frac{dx}{dt} + k_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{-1} \int x dt \right) + k_f \left(f + k_{f1} \frac{df}{dt} + k_{f2} \frac{d^2 f}{dt^2} \right)$$

(последняя скобка относится только к комбинированным системам). Для линейных законов регулирования детально разработаны многочисленные прикладные методы исследования (анализа и синтеза), различные расчетные и экспериментальные приемы определения устойчивости, точности и качества процесса регулирования, а также схемы конкретных технических устройств формирования линейных законов регулирования. Все это касается и линейных систем с переменными параметрами и импульсных и цифровых (хотя они пока еще менее полно изучены).

Что же касается нелинейных законов регулирования, то (за исключением релейного) они изучены мало. Очевидно, однако, что использование

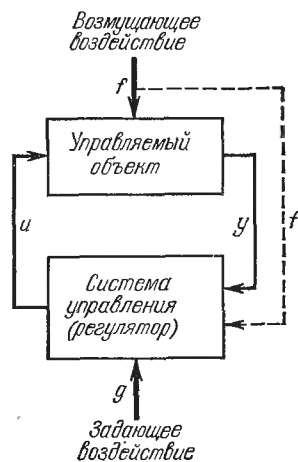


Рис. 2.6.

нелинейных законов регулирования, определяемых разнообразными нелинейными уравнениями регулятора

$$F_1\left(u, \frac{du}{dt}, \dots\right) = F_2\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots; u, f, g\right),$$

значительно расширяет возможности целесообразного изменения качества процессов регулирования и точности. Это ясно из общих принципиальных соображений, так как область нелинейных уравнений значительно богаче и разнообразнее, чем линейных.

Несмотря на то, что общей теории нелинейных законов регулирования нет, исследования и опыт применения отдельных частных видов этих законов говорят об их большой практической эффективности. Отсюда следует актуальность их теоретического изучения.

Введем следующую классификацию нелинейных законов регулирования:

- 1) функциональные нелинейные законы регулирования,
- 2) логические нелинейные законы регулирования,
- 3) оптимизирующие нелинейные законы регулирования,
- 4) параметрические нелинейные законы регулирования.

Важным отличием нелинейных законов от линейных является то, что они придают системе регулирования принципиально новые свойства. Если при линейном законе всегда вырабатывается сигнал, пропорциональный входной переменной или ее производной и т. д., то при нелинейном законе может существенно изменяться сам характер действия системы управления на объект в зависимости от величины входного воздействия. Другими словами, если для линейных систем изменение размера отклонения — это изменение только масштаба, но не формы процессов, то в нелинейной системе при этом может существенно изменяться и форма процессов, вплоть до принципиальных качественных изменений картины процессов. Эти особые свойства нелинейных законов можно выгодно использовать в технике автоматического управления и регулирования.

Рассмотрим отдельно каждый из указанных четырех классов нелинейных законов регулирования.

Функциональные нелинейные законы регулирования. Функциональными будем называть такие нелинейные законы регулирования, при которых регулирующее воздействие на объект выражается в виде нелинейной функции от отклонения регулируемой величины, представляющей собой входную информацию для системы регулирования.

Данный класс может содержать в себе как статические, так и динамические нелинейности. Примеры *статических нелинейностей* в законе регулирования:

$$u = k(1 + b|x|)x, \quad u = k(\operatorname{sign} x) \sqrt{1 + b|x|}.$$

В отличие от линейного закона, здесь в первом случае будет более энергичное действие регулятора при больших отклонениях x и больший запас устойчивости установившегося режима. Во втором случае будет менее энергичное, но более плавное действие регулятора вначале и повышенная точность в установившемся режиме, хотя и с меньшим запасом устойчивости. Однако такого рода рекомендации, как увидим в дальнейшем, справедливы для большинства систем, но все же не для всех. Поэтому они требуют специального обследования для каждого объекта регулирования.

Нелинейный закон регулирования за счет дополнительных нелинейных обратных связей может включать в себя также нелинейности от выходной величины u :

$$u = kx + F(u),$$

что расширяет возможности целесообразного изменения качества процесса регулирования.

Примеры динамических нелинейностей в законе регулирования:

$$u = k(1 \pm b |\dot{x}|)x, \quad u = k(1 \pm b |x|)\dot{x}, \quad u = k(1 \pm |\dot{u}|)\dot{x},$$

где вместо двойного знака подразумевается какой-либо один из них.

Подобные динамические члены нелинейного закона регулирования различно влияют на демпфирующие свойства системы регулирования в переходных процессах в зависимости от размеров и скорости отклонения. Они же могут существенно улучшать динамическую точность (т. е. уменьшать динамические ошибки) системы в различных режимах вынужденного движения, воспроизведения различных форм задаваемых входных сигналов, а также при случайных воздействиях.

Отметим, что функциональные нелинейные законы регулирования могут быть связаны не только с изменением параметров в зависимости от размеров входных воздействий, но и с изменением структуры. Например, при увеличении отклонения регулируемой величины сверх определенного порога $|x| = c$ в системе может происходить переключение с одного линейного корректирующего устройства на другое.

Логические нелинейные законы регулирования и я. Нелинейные законы регулирования могут иметь иные формы, которые реализуются с помощью не функциональных, а более или менее сложных логических устройств. Будем называть их логическими нелинейными законами регулирования.

Например, в системе на рис. 2.7 логический нелинейный закон регулирования может быть применен для экономии управляющих воздействий со стороны регулятора на объект (а также экономии расхода энергии на нужды регулирования).

Построение простейшего логического нелинейного закона регулирования лучше всего пояснить на плоскости двух входных величин u_1 , u_2 (рис. 2.8). Последние с точностью до характеристик неидеальности измерителей соответствуют отклонению x и скорости отклонения $\frac{dx}{dt}$ регулируемой величины (рис. 2.7).

Предварительно заметим, что если знак скорости $\frac{dx}{dt}$ совпадает со знаком отклонения x , то величина отклонения x по модулю возрастает. В этом случае требуется энергичное действие регулятора для его ликвидации. Если же знак скорости $\frac{dx}{dt}$ противоположен знаку отклонения x , то величина $|x|$ уменьшается. В этом случае можно вовсе не подавать на объект

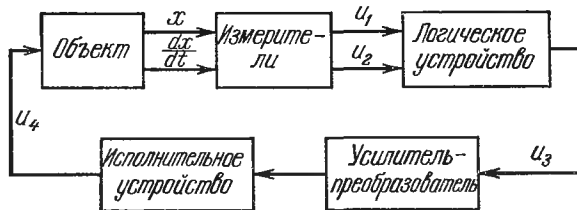


Рис. 2.7.

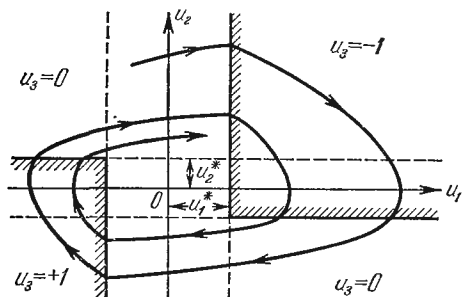


Рис. 2.8.

управляющего воздействия, если скорость $\frac{dx}{dt}$ достаточна для необходимой быстроты ликвидации отклонения, или же подавать воздействие при очень малой скорости $\frac{dx}{dt}$. Эти рассуждения позволяют считать целесообразным, например, применение следующего логического закона регулирования.

Управляющее воздействие ($u_3 = +1$ или $u_3 = -1$) включается только тогда, когда $|u_1| > u_1^*$ (см. рис. 2.8), т. е., когда отклонение достаточно велико и u_2 имеет знак, одинаковый со знаком u_1 или противоположный, но при малом $|u_2| < u_2^*$. Во всех остальных случаях управление выключено ($u_3 = 0$), так как при противоположных знаках u_2 и u_1 и достаточной величине $|u_2| > u_2^*$ система сама, без управления возвращается к требуемому положению $x = 0$ (если при этом гарантирована противоположность знаков $\frac{dx}{dt}$ и x). Более подробно эта система будет рассмотрена в разделе IV.

Логические нелинейные законы регулирования могут быть связаны также с изменением структуры системы регулирования. Например, при помощи логического устройства можно включать и выключать сигналы управления по первой и второй производным и по интегралу, в зависимости от сочетания значений отклонения регулируемой величины x и скорости отклонения ее $\frac{dx}{dt}$. Если правильно сформировать логику этих переключений, то можно существенно повысить качество работы системы регулирования.

Вместо комбинирования указанных линейных членов закона регулирования могут вводиться также и функциональные нелинейные члены; включение и выключение сигналов, соответствующих этим членам, производится при помощи логического устройства. Тогда получится комбинация функциональных и логических нелинейных законов регулирования.

О п т и м и з и р у ю щ и е н е л и н е й н ы е з а к о н ы р е г у л и р о в а н и я. В настоящее время интенсивно развивается теория оптимальных процессов регулирования. При этом на основе классических вариационных методов, или на основе так называемого принципа максимума, или методом динамического программирования определяется закон регулирования таким образом, чтобы система имела максимум быстродействия, или минимум ошибки, или же минимум какой-нибудь другой величины (в форме функционала) с учетом ограничений, накладываемых в реальной системе на координаты, скорости, силы и т. п.

Как правило, при этом приходят к нелинейным законам регулирования, хотя, вообще говоря, можно оптимизировать и коэффициенты линейного закона, задав его форму. Часто оптимальный нелинейный закон регулирования состоит в переключении управляющего воздействия (при определенных состояниях системы) с одного максимально возможного значения на другое (противоположного знака). Моменты переключения в целом определяются сложными комбинациями значений нескольких переменных и их производных.

П а р а м е т р и ч е с к и е н е л и н е й н ы е з а к о н ы р е г у л и р о в а н и я. В предыдущих типах законов регулирования вводились отклонения регулируемой величины от некоторых заданных ее программных значений. При параметрической программе управления закон регулирования может выражаться в виде нелинейной функции текущих координат, в которых задается параметрическая программа. Например, для рассмотренного в § 2.1 закона наведения как параметрической программы управления закон регулирования имеет вид (2.6), причем для его формирования берут исходную информацию от измерителей расстояния ρ и скорости сближения $\dot{\rho}$, т. е. тех величин, в которых выражена параметрическая программа.

Нелинейные законы регулирования обладают богатыми возможностями во всех случаях, когда требуемый эффект может быть достигнут изменением свойств системы с изменением величин ошибок. Важным классом нелинейных систем являются системы с переменной структурой. Большими возможностями обладают так называемые *адаптивные*, т. е. самонастраивающиеся и самоорганизующиеся, системы, описанию которых посвящаются ниже следующие параграфы.

§ 2.3. Системы с переменной структурой

Большие дополнительные возможности улучшения процессов регулирования дает нелинейное управление работой объекта путем изменения структуры регулятора в зависимости от размеров и знаков входных величин, поступающих в регулятор от измерительного устройства.

При этом могут использоваться комбинации линейных законов регулирования. Например, если известно, что при одном линейном законе регулирования получается быстрое начальное изменение регулируемой величины, но с большими последующими колебаниями (кривая 1, рис. 2.9), а при другом линейном законе регулирования — медленное изменение, но плавный подход к новому установившемуся режиму (кривая 2, рис. 2.9), то можно, включив сначала первый закон, переключить затем систему на второй закон в некоторой точке A , когда отклонение x достигнет определенного значения x_A . В результате процесс регулирования изобразится кривой 3 (рис. 2.9), объединяющей оба качества — быстроту и плавность процесса.

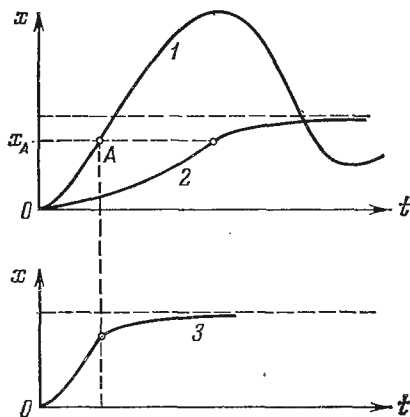


Рис. 2.9.

Для осуществления этого необходимо иметь в системе переключающее устройство, срабатывающее в данном случае при $x = x_A$ (рис. 2.10).

Если в такой системе с переменной структурой все звенья линейные, то за счет указанного переключения, происходящего автоматически в процессе регулирования, система становится нелинейной. Это можно сравнить



Рис. 2.10.

с тем, как получается нелинейная статическая характеристика из отрезков прямых линий (см., например, рис. 1.10, δ). Но здесь имеет место нелинейная динамическая характеристика, составленная из последовательности разных линейных дифференциальных уравнений, соответствующих первому и второму законам регулирования.

В общем случае срабатывание переключающего устройства в системе с переменной структурой может происходить от нескольких входных величин. При этом кроме основной нелинейности, возникающей за счет переключения структуры, дополнительно могут иметься какие-либо нелинейные свойства в отдельных других звеньях регулятора или объекта.

§ 2.4. Системы с самонастройкой программы (экстремальные системы)

Раньше речь шла все время о таких системах регулирования, в которых требуемое значение регулируемой величины было заранее задано либо постоянным, либо изменяющимся по определенной программе во времени; в следящих системах оно задавалось извне во время работы системы.

В отличие от них *экстремальными системами регулирования* называются такие, которые сами ищут наивыгоднейшую программу, т. е. то значение регулируемой величины, которое нужно в данный момент выдерживать, чтобы режим работы регулируемого объекта был наивыгоднейшим. При этом

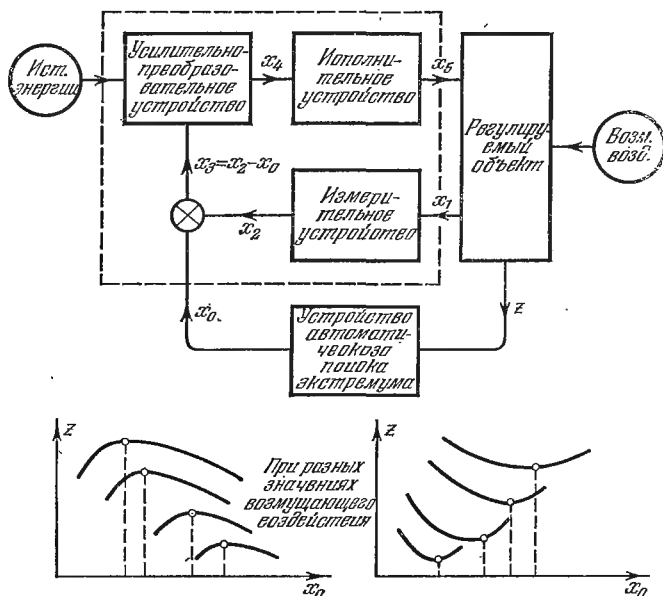


Рис. 2.11.

имеется в виду уже не выбор закона регулирования, а автоматический поиск требуемого наивыгоднейшего значения регулируемой величины при изменяющихся внешних условиях работы объекта. Таким образом, на систему, называемую экстремальной, сверх обычной задачи автоматического выдерживания требуемого значения регулируемой величины, накладывается дополнительная задача автоматического поиска наивыгоднейшего значения требуемой регулируемой величины, т. е. самой программы регулирования.

Следовательно, в таких системах вместо программного устройства или задатчика ставится устройство автоматического поиска (рис. 2.11), которое производит анализ какой-нибудь характеристики объекта z и подает в регулятор требуемое значение регулируемой величины x_0 так, чтобы данная характеристика $z(x_0)$ получила экстремальное (максимальное или минимальное) значение.

Например, характеристика $z(x_0)$ может быть коэффициентом полезного действия регулируемого объекта (например, двигателя) или величиной расхода горючего в объекте. Тогда устройство автоматического поиска будет выдавать такое требуемое значение регулируемой величины x_0 (например, требуемой скорости вращения двигателя), которое дает, соответственно, максимум коэффициента полезного действия или минимум расхода горючего.

При этом как сама величина экстремума z , так и соответствующее ему значение x_0 могут существенно меняться в зависимости от внешних условий работы объекта, как показано на рис. 2.11. Устройство автоматического поиска должно всегда находить этот экстремум независимо от причин, вызывающих его смещение в процессе работы объекта.

В схеме на рис. 2.11 в целях наглядности функции автоматического поиска величины x_0 и измерения фактического значения x_1 регулируемой величины разделены. Чаще же система экстремального регулирования устраивается так, что обе эти функции объединены в одном приборе, в результате чего устройство автоматического поиска выдает не x_0 , а непосредственно разностный сигнал на усилитель x_3 , пропорциональный отклонению фактического значения регулируемой величины от требуемого для обеспечения экстремума той или иной характеристики регулируемого объекта (рис. 2.12). Это не меняет общей сути дела.

Экстремальное регулирование может применяться, например, для поддержания наивыгоднейшей скорости полета, соответствующей минимуму расхода горючего на единицу длины пути. При этом будет достигнута и максимальная дальность полета при заданном запасе горючего.

Примерами экстремальных систем регулирования могут служить также: автоматическое поддержание максимальной скорости проходки скважины турбобуром при меняющихся свойствах грунта; автоматические системы управления различными производственными процессами, поддерживающие наивыгоднейший режим работы станков; управление энергетическими установками и системами, обеспечивающее автоматический поиск и поддержание экстремума эксплуатационных характеристик, и т. д.

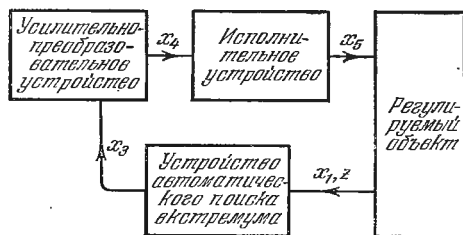


Рис. 2.12.

§ 2.5. Системы с самонастройкой параметров (собственно самонастраивающиеся системы)

Основным, в настоящее время, видом самонастраивающихся систем регулирования и управления являются такие системы, в которых автоматически, не заданным заранее образом, изменяются какие-нибудь параметры регулятора (или системы управления), т. е. коэффициенты усиления, коэффициенты интенсивности введения производной и интеграла в закон регулирования, коэффициенты обратных связей и постоянные времени фильтров. Когда говорят о самонастраивающихся системах управления, то имеют в виду чаще всего именно этот тип самонастраивающихся систем. Но поскольку системы экстремального регулирования, рассмотренные выше, тоже, по существу, являются самонастраивающимися, то данный новый вид самонастраивающихся систем более полно называют системами с самонастройкой параметров регулятора или системами с самонастраивающимися корректирующими устройствами (имеется в виду тоже самонастройка их параметров). Рассмотрим основную идею работы этого вида самонастраивающихся систем.

Когда хорошо известны свойства объекта и внешние возмущающие воздействия, а система достаточно проста, можно заранее уверенно выбрать наилучшие значения параметров регулятора, чтобы добиться надлежащего качества работы проектируемой автоматической системы. Если же параметры самого объекта известны недостаточно достоверно и если к тому же они могут в процессе работы в некоторых пределах случайным образом меняться, то и параметры регулятора (системы управления) и корректирующих устройств можно подобрать лишь ориентировочно. Поскольку все качества работы автоматической системы (точность или ошибки при разных воздействиях, запас устойчивости, форма переходного процесса и т. п.) зависят от общей совокупности всех параметров объекта и регулятора, то очевидно, что в данной ситуации будет обеспечено надлежащее качество системы лишь в среднем. При этом будут происходить более или менее существенные ухудшения качества работы системы при случайных отклонениях параметров объекта в ту или другую сторону (или просто за счет недостоверности знания этих параметров при проектировании системы).

Есть несколько путей решения задачи.

В том случае, когда имеет место простая недостоверность знания параметров объекта, но точно известно, что в процессе работы эти параметры остаются постоянными, можно просто произвести ручную подстройку некоторых параметров регулятора в начале эксплуатации данного объекта, добившись тем самым желаемого качества работы системы. Для этого нужно предусмотреть в конструкции регулятора соответствующие регулировочные потенциометры, емкости, винты и т. п. для настройки величин коэффициентов усиления, коэффициентов обратных связей и т. п.

В тех случаях, когда параметры объекта изменяются во времени при его работе (т. е. динамика объекта описывается уравнением с переменными коэффициентами), причем хорошо известен закон их изменения во времени, можно заранее рассчитать, по какому закону во времени нужно менять параметры регулятора, чтобы при данном изменении параметров объекта качество работы системы в целом оставалось неизменно хорошим.

В данном случае нужно будет включить в систему уже не ручную, а программную настройку параметров регулятора по заданному закону во времени. В общем случае необходимо менять несколько параметров регулятора, корректирующего устройства или фильтра.

Поскольку непрерывное изменение параметров не всегда удобно для конструкции, прибегают к ступенчатому изменению параметров регулятора через определенные промежутки времени, рассчитанные так, чтобы за это время качество системы не сильно ухудшалось. При этом программным устройством в определенные моменты времени будут скачком подключаться или отключаться определенные участки сопротивлений, емкостей и т. п. для соответствующего изменения параметров регулятора.

Указанные пути ручной или программной настройки параметров, конечно, не приводят к самонастраивающимся системам. Они были описаны только для того, чтобы сделать более наглядным последующее изложение основ самонастройки. Вместе с тем изложенные методы программной настройки имеют и самостоятельное практическое значение и часто применяются. Во многих случаях такого рода ручной или программной настройки параметров регулятора или системы управления бывает достаточно, чтобы в среднем (с допустимыми отклонениями) получать желаемые качества работы системы в течение всего времени. Однако на практике существует много случаев, когда указанные пути неприемлемы.

Во-первых, часто характер работы объекта вообще не допускает ручной настройки параметров системы управления во время эксплуатации. Во-вторых, составление программы изменения параметров регулятора часто невоз-

можно либо вследствие незнания истинного закона изменения хотя бы некоторых параметров объекта, либо вследствие случайного характера их изменения.

Это имеет место, например, в различных неустановившихся режимах полета скоростных самолетов, когда встает задача о полной автоматизации управления. Такие же ситуации часто могут иметь место в системах управления многими производственными процессами в металлургии, в машиностроении, в химической промышленности и т. п.

Во всех этих случаях приходится прибегать к самонастройке параметров регулятора (системы управления) по заданному показателю желаемого качества работы системы. При этом в системе должно иметься специальное автоматическое устройство для анализа качества работы объекта в данной системе по какому-нибудь заданному критерию (рис. 2.13, а) или для анализа величины ошибок регулирования (рис. 2.13, б). В обоих случаях это устройство (анализатор) определяет отклонение качества системы от требуемого качества и передает соответствующий сигнал на настраивающее устройство, которое автоматически изменяет параметры регулятора в нужную сторону, чтобы ликвидировать нежелательное ухудшение качества работы системы.

Критерий качества может быть выбран любым из применяемых в теории регулирования или даже вновь выработан в интересах практики. Выбор его зависит от назначения и конструкции системы.

Таким образом, в самонастраивающихся системах данного типа сверх обычного замкнутого контура регулирования (управления) имеется замкнутый контур самонастройки (рис. 2.13).

Дальнейшим развитием устройств самонастройки в системах данного типа является *самооптимизация* системы, когда анализатор качества на схемах рис. 2.13 заменяется оптимизатором, т. е. устройством, которое производит настройку параметров регулятора оптимальным образом, отыскивая

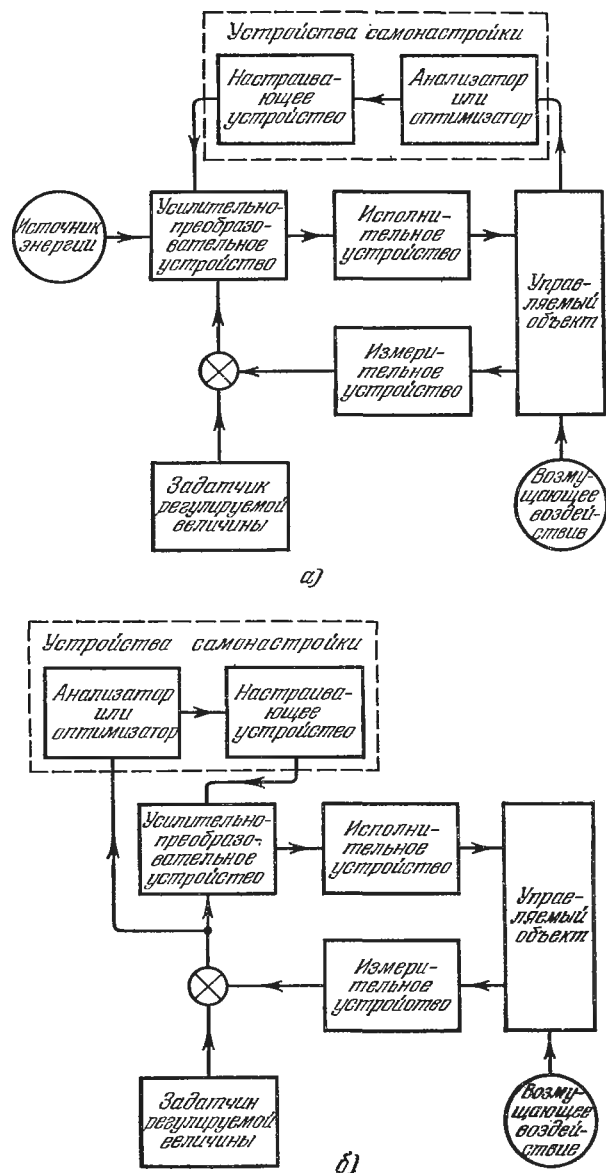


Рис. 2.13.

экстремум качества по заданному критерию, в частности, например, минимум ошибки регулирования.

Если задачей обычной самонастройки (с анализатором качества) было сохранение *заданного качества* системы в некоторых пределах, то задача оптимизатора (т. е. экстремальной настройки параметров регулятора) состоит в том, чтобы в каждый момент времени при меняющихся параметрах объекта настраивать параметры регулятора так, чтобы получать *максимум качества*, возможный в данных реальных условиях.

Такой оптимизатор должен содержать в себе, следовательно, устройство автоматического поиска экстремума качества (минимум ошибки), подобно поиску экстремального задания регулируемой величины в рассматривавшихся ранее экстремальных системах регулирования. Но особенность оптимизатора здесь состоит не только в специфике той величины, экстремум которой ищется, но главным образом в том, что воздействует он не на настройку требуемого значения регулируемой величины, а на настройку параметров корректирующих устройств самого регулятора.

Самооптимизация (экстремальная самонастройка) является наиболее совершенным, но в то же время и наиболее сложным видом системы с замкнутым контуром самонастройки параметров. В тех случаях, когда самонастройка применяется в системах управления вследствие недостаточности знания свойств объекта, система самооптимизации напоминает процесс *самообучения* системы ¹⁾. Система при этом путем автоматического поиска как бы сама познает неизвестные свойства управляемого объекта и обучается управлять этим объектом наилучшим образом (сама настраивает параметры регулятора по экстремуму заданного критерия качества).

В таких случаях можно поступать следующим образом: запустить указанную сложную самооптимизирующуюся (самообучающуюся) систему в пробную эксплуатацию и дать ей возможность самой настроить параметры регулятора. Затем можно снять устройство самонастройки вовсе и дальше эксплуатировать более простую систему с постоянной или с программной настройкой, выработанной в процессе самооптимизации (самообучения). Это, конечно, не всегда возможно.

Одним из распространенных видов анализаторов и оптимизаторов качества в самонастраивающихся системах являются устройства из операционных усилителей или других математических *моделей*, построенных на блоках вычислительных машин, которые имитируют желаемое динамическое поведение объекта. Это эталонное качество поведения модели сравнивается с реальным поведением системы, и параметры регулятора настраиваются автоматически и таким образом, чтобы поведение системы «подогнать» к эталонному поведению модели.

На этом же принципе производится «обучение» машины человеком. В самом деле, в качестве эталонной модели можно взять работу человека по управлению, например, процессами в металлургической печи. Можно ввести при этом все те же связи с автоматической системой, которые вводятся в указанной выше самонастраивающейся системе с моделью. Тогда в результате произойдет самонастройка параметров этой системы. Система настроится на работу, дающую те же результаты, которые давала работа человека.

Важная особенность такой системы заключается в том, что здесь не требуется закладывать заранее критерий качества (что требовалось выше), так как он содержится в самом характере действий человека.

При помощи современных средств автоматики и вычислительной техники (включая, конечно, и присущие им логические операции) такого рода

¹⁾ Более совершенный принцип обучения, связанный с самоорганизацией, будет описан в следующем параграфе.

сложные задачи для некоторых объектов оказываются вполне осуществимыми. Пока что это делается только для длительно работающих объектов с медленным или с редким скачкообразным изменением параметров, когда процесс самонастройки успевает за темпом изменения свойств объекта. При

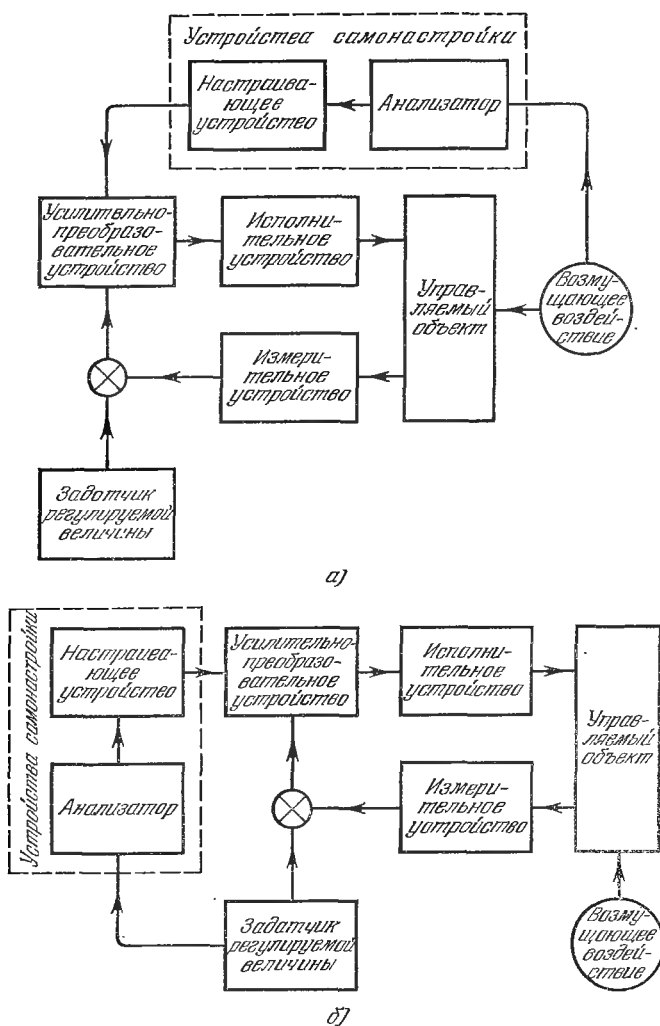


Рис. 2.14.

быстром изменении параметров объекта и окружающих его условий построение таких самонастраивающихся систем является в настоящее время весьма трудной задачей.

Возможны еще и другие виды систем с самонастройкой параметров регулятора, которые не производят непосредственно анализ или оптимизацию какого-либо показателя качества работы (или ошибки системы), а анализируют форму возмущающего и задаваемого извне управляющего воздействий на систему (рис. 2.14, а) и перенастраивают параметры регулятора в зависимости от формы воздействия по определенному правилу, заложенному заранее в настраивающее устройство. Это — системы с самонастройкой параметров регулятора по возмущению.

Применение их выгодно в тех случаях, когда внешнее воздействие может быть измерено с целью анализа его свойств и когда изменение его формы является решающим для качества работы системы. Часто это имеет место в различного рода следящих системах, особенно когда на вход системы вместе с полезным сигналом поступает помеха. В этом случае для наилучшего воспроизведения полезного сигнала изменяющейся частоты на фоне случайных помех целесообразно было бы менять полосу пропускания следящей системы. Это можно сделать, например, путем изменения постоянной времени фильтра в управляющей части указанной следящей системы в зависимости от измеренной частоты поступающего извне сигнала или других свойств сигнала и помехи. В результате вместо обычной следящей системы получится самонастраивающаяся система по возмущению типа представленной на рис. 2.14, б (ее называют часто следящей системой с саморегулированием параметров). При этом анализатор свойств внешнего воздействия может быть более или менее сложным, основанным на анализе вероятностных характеристик полезного сигнала и помехи.

§ 2.6. Системы с самонастройкой структуры (самоорганизующиеся системы)

Все те же задачи самонастройки и некоторые новые задачи целесообразно бывает решать не путем изменения параметров регулятора, имеющего определенную структуру, а путем изменения самой структуры регулятора не заданным заранее образом. Это — системы с самонастройкой структуры (самоорганизующиеся системы).

В рассмотренных ранее системах при автоматической настройке параметров регулятора закон регулирования был заранее задан, а менялись не заданным заранее образом лишь входящие в него коэффициенты. Теперь же при автоматической настройке структуры регулятора не задан вообще даже и закон регулирования; в общем случае неизвестно заранее, какие корректирующие устройства и как вводить, какие логические и вычислительные операции производить. В общем случае может меняться структура не только усилительно-преобразовательного, но и измерительного устройства системы управления, если почему-либо выгодно применять разные принципы измерения или же измерять разные исходные величины в разных условиях работы объекта (подобно тому, как человек использует в разных условиях то зрение, то слух, то осязание и т. п. или их комбинированное действие).

В частных случаях возможны более простые самоорганизующиеся системы, в которых заранее не задана структура лишь одной небольшой части системы, а структура остальной части задана неизменной. В законе регулирования может быть определено, например, что сигнал по отклонению регулируемой величины обязательно идет по структурно-заданному каналу, а добавляемые сверх этого корректирующие устройства самоорганизуются.

Говоря о самонастройке структуры или, что то же самое, о самоорганизации, необходимо подчеркнуть, что имеется в виду автоматическое изменение структуры не заданным заранее образом. Это весьма существенно.

В самом деле, когда рассматривались нелинейные законы регулирования (§ 2.2), уже говорилось об изменении структуры регулятора. Там могли включаться и отключаться производные и интеграл, могла включаться или переключаться обратная связь и т. п. Но все это делалось хотя и автоматически, но заранее заданным образом в зависимости от значения отклонения регулируемой величины и ее производных. Такое изменение структуры относится не к самоорганизации, а к нелинейным законам регулирования. Нелинейные законы регулирования применяются, в частности, в оптимальных автоматических системах.

Точно так же, если бы структура регулятора менялась программным устройством по определенному заданию во времени, это тоже не относилось бы к самоорганизации, так же как программное изменение параметров, рассматривавшееся в предыдущем параграфе, не относилось к самонастройке параметров.

Равным образом к самоорганизующимся системам не относятся многие существующие измерительные системы, в которых имеется несколько измерительных приборов, основанных на разных принципах измерения одной и той же величины, когда обработка информации от всех этих приборов и их включение и отключение заранее запрограммированы либо во времени, либо в зависимости от размера и скорости изменения измеряемой величины. Вообще же возможна, конечно, и самоорганизация в измерительных системах со многими чувствительными элементами.

В самоорганизующуюся систему закладывается лишь тот или иной определенный критерий качества работы системы или комбинация критериев для разных внешних условий работы системы. Система сама путем автоматического поиска с применением вычислительных или логических операций выбирает такую структуру (из возможных, имеющих в ее распоряжении), при которой удовлетворяется заданный критерий качества работы всей системы. Это делается путем подключения и отключения различных звеньев в некоторой логической последовательности с фиксированием (запоминанием) более удачных структур.

При любой самонастройке и особенно при самоорганизации может быть учтено требование повышения надежности и предусмотрена возможность работы системы при выходе из строя каких-либо звеньев.

В самоорганизующейся системе, как и прежде должен быть либо анализатор, либо оптимизатор качества. Анализатор ставится, когда нужно обеспечить просто заданное в определенных пределах качество. Оптимизатор же предназначается для отыскания и осуществления максимально возможного в данной системе (при данных реальных условиях ее работы) качества.

В крупном плане общую схему системы можно представить в таких же вариантах, как на рис. 2.13 и 2.14, но только не с настраивающим устройством, а с логической схемой переключения отдельных звеньев системы в соответствии с сигналами анализатора или оптимизатора. В качестве анализатора здесь тоже может применяться, в частности, математическая эталонная модель объекта с желаемыми свойствами.

Замена такой модели действиями человека позволяет и здесь производить как бы обучение машины человеком. Это совершенно аналогично той картине процесса обучения, которая была описана выше в связи с самонастройкой параметров, но здесь имеет место, образно говоря, более высокий уровень обучения.

Как и прежде, здесь в ряде случаев возможна установка на объект самоорганизующейся системы регулирования лишь в начальный период его эксплуатации. Затем самоорганизующаяся система может быть снята и заменена более простой системой с определенной структурой или со структурой, меняющейся по программе, которая была автоматически выработана в процессе работы самоорганизующейся системы.

Очевидно, что при прочих равных условиях самоорганизация, т. е. автоматический поиск наивыгоднейшей структуры системы по результатам анализа или оптимизации качества ее работы, является процессом более сложным и более длительным, чем самонастройка параметров, а потому пока что значительно более далеким от применения к автоматическому управлению динамическими объектами, где не только поиск, но и сам по себе анализ качества работы требует некоторого промежутка времени. Поэтому здесь опять-таки речь может идти в настоящее время об объектах, работающих

в более или менее стационарных условиях, изменяющихся либо медленно, либо редкими скачками.

Как уже отмечалось, к экстремальным и самонастраивающимся системам применяются также термины *адаптивные* или *«приспосабливающиеся» системы* и *системы с автоматической оптимизацией* (в том случае, когда автоматическая оптимизация используется не в процессе проектирования, а в самой системе регулирования или управления в процессе ее эксплуатации).

Кроме рассмотренных выше, существуют различные другие аспекты самоорганизации, самообучения и т. п., которые рассматриваются в литературе по кибернетике, изучающей наиболее общие законы управления и преобразования информации в автоматических системах, в системах связи, в вычислительных и других машинах, а также и в живых организмах с общей точки зрения. Чем дальше развивается автоматика в технике и познания в биологии, тем больше появляется аналогий функционирования автоматических систем и живых организмов, в том числе системы высшей нервной деятельности и головного мозга человека. Изучение этих аналогий, рассматриваемых с общей кибернетической точки зрения, оказывается очень полезным как для техники, так и для биологии. В частности, техника автоматизации еще далеко не полностью использует возможности нелинейных законов регулирования, самонастройки, самоорганизации и высокой надежности, которые имеют место в процессах управления и преобразования информации в живых организмах.

В целом ряде систем управления техническими объектами в качестве «звена» замкнутой системы участвует человек-оператор. В связи с этим развивается новая важная область технической кибернетики, называемая *инженерной психологией*, которая изучает проблемы взаимодействия человека-оператора с автоматикой в системах управления и преобразования информации. Это приобретает теперь особенно важное значение не только в процессах управления производством, но также и в связи с совершенствованием процессов управления скоростными самолетами и в связи с развитием космических полетов.

В заключение отметим, что техническая реализация самонастраивающихся и самоорганизующихся систем регулирования и управления в большинстве случаев сложнее, чем систем с нелинейными законами регулирования. Но при этом и возможности самонастраивающихся систем значительно шире. Однако инженер должен иметь в виду, что во многих случаях при помощи нелинейных законов регулирования, проще реализуемых на практике, можно успешно решать ряд таких задач, которые с точки зрения линейной теории регулирования считаются требующими самонастройки как неразрешимые в рамках этой линейной теории.

В последние годы появилось новое направление автоматизации и механизации различных процессов — *робототехника*. При построении систем управления роботов (промышленных, подводных, космических и др.) применяются самые разнообразные виды систем управления и обработки информации, в том числе и с адаптацией к неизвестным или меняющимся внешним условиям.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Г Л А В А 3

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 3.1. Линеаризация уравнений

При составлении дифференциальных уравнений динамики любой автоматической системы последнюю разбивают на отдельные звенья и записывают уравнение каждого звена в отдельности. Уравнения всех звеньев образуют единую систему, которую можно преобразовать к одному уравнению путем исключения промежуточных переменных.

Уравнение звена должно быть составлено так, чтобы оно выражало зависимость (в динамическом процессе) между теми величинами, которые в схеме исследуемой системы указаны на выходе и входе данного звена, т. е. между величинами, представляющими воздействие данного звена на последующее по схеме звено и воздействие предыдущего звена на данное. Динамическое уравнение отдельного звена составляется по правилам соответствующей технической науки (звено может представлять собой тепловой двигатель, электрическую машину, механическую передачу, электрическую цепь, ламповую схему и т. п.).

Звено может иметь иногда не одну входную величину, а несколько (например, при наличии дополнительных обратных связей). Кроме входной и выходной величин звена, которые выражают собой внутренние связи между звеньями данной системы, может учитываться также внешнее воздействие.

Пусть, например, звено (рис. 3.1, а) какой-нибудь автоматической системы имеет входные величины x_1, x_2 , выходную — x_3 и внешнее воздействие f , а динамическое уравнение звена имеет произвольный нелинейный вид

$$F(x_1, x_2, \dot{x}_2, x_3, \dot{x}_3, \ddot{x}_3) = \varphi(f, \dot{f}) \quad (3.1)$$

(для примера взят определенный порядок входящих в уравнение производных $x_2, x_3, \dot{f}$; вообще же здесь могут быть любые другие варианты).

Допустим, что установившийся процесс в системе имеет место при некоторых постоянных значениях $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, x_3 = x_3^0$ и $f = f^0$. Тогда уравнение установившегося состояния для данного звена согласно (3.1) будет

$$F(x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, 0, 0) = \varphi(f^0, 0). \quad (3.2)$$

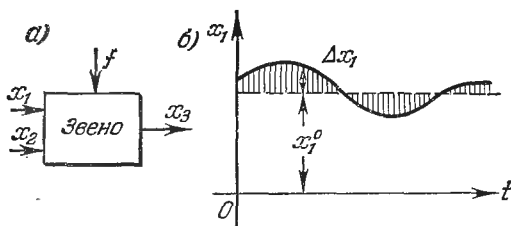


Рис. 3.1.

В основе линеаризации нелинейных уравнений лежит предположение о том, что в исследуемом динамическом процессе переменные (в данном случае x_1, x_2, x_3) изменяются так, что их отклонения от установившихся значений (x_1^0, x_2^0, x_3^0) остаются все время достаточно малыми (рис. 3.4, б).

Обозначим указанные отклонения через $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$. Тогда в динамическом процессе

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= x_1^0 + \Delta x_1(t), & x_2(t) &= x_2^0 + \Delta x_2(t), & \dot{x}_2 &= \dot{\Delta x}_2, \\ x_3(t) &= x_3^0 + \Delta x_3(t), & \dot{x}_3 &= \dot{\Delta x}_3, & \ddot{x}_3 &= \ddot{\Delta x}_3, & \dddot{x}_3 &= \dddot{\Delta x}_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Условие достаточной малости динамических отклонений переменных от некоторых установившихся значений для системы автоматического регулирования и следящих систем обычно выполняется. Этого требует сама идея работы замкнутой автоматической системы.

Внешнее же воздействие f не зависит от работы автоматической системы, изменение его может быть произвольным, и поэтому правая часть уравнения (3.4) обычно линеаризации не подлежит (в отдельных случаях и она может быть линеаризована).

Первый способ линеаризации. Разложим функцию F , стоящую в левой части уравнения (3.4), в ряд по степеням указанных выше малых отклонений, рассматривая все производные тоже как самостоятельные переменные. Тогда уравнение (3.4) примет вид

$$\begin{aligned} F(x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, 0, 0, 0) &+ \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 \Delta x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)^0 \dot{\Delta x}_2 + \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0 \Delta x_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3}\right)^0 \dot{\Delta x}_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3}\right)^0 \ddot{\Delta x}_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3}\right)^0 \ddot{\Delta x}_3 + \\ &+ (\text{члены высшего порядка малости}) = \varphi(f, \dot{f}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где через $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^0$ для краткости обозначена величина $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, взятая при $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \dot{x}_2 = 0, x_3 = x_3^0, \dots, \ddot{x}_3 = 0$ (т. е. сперва берется в общем виде частная производная от функции F по x_i , после чего в нее вместо всех переменных подставляются их постоянные значения $x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, \dots, 0$).

Следовательно, все частные производные в полученном уравнении (3.4) представляют собой некоторые постоянные коэффициенты. Они будут переменными во времени, если функция F содержит t в явном виде или если установившийся процесс в системе определяется переменными значениями $x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t)$.

Члены высшего порядка малости, указанные в уравнении (3.4), состоят из произведений и степеней малых отклонений $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$ с коэффициентами в виде смешанных частных производных и частных производных второго и высших порядков от функции F по всем переменным.

Вычтя из уравнения (3.4) почленно уравнение установившегося состояния (3.2) и отбросив члены высшего порядка малости, получим искомое линеаризованное уравнение динамики данного звена в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 \Delta x_1 &+ \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 \Delta x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)^0 \dot{\Delta x}_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0 \Delta x_3 + \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3}\right)^0 \dot{\Delta x}_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3}\right)^0 \ddot{\Delta x}_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3}\right)^0 \ddot{\Delta x}_3 = \varphi(f, \dot{f}) - \varphi(f^0, 0). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Это дифференциальное уравнение, так же как и (3.1), описывает тот же динамический процесс в том же звене автоматической системы. Отличие этого уравнения от прежнего состоит в следующем:

1) это уравнение является более приближенным, ибо в процессе его вывода были отброшены малые высшего порядка;

2) неизвестными функциями времени в этом уравнении являются не прежние полные величины x_1, x_2, x_3 , а их отклонения $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ от некоторых установившихся значений x_1^0, x_2^0, x_3^0 ;

3) полученное уравнение является линейным относительно отклонений $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_3$ с постоянными коэффициентами $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0$,

$\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0, \dots$ (или с переменными коэффициентами, если F содержит t в явном виде, а также когда установившийся процесс определяется переменными величинами $x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t)$, например в программном регулировании).

Таким образом, цель получения линейного дифференциального уравнения взамен прежнего нелинейного достигнута.

Уравнение (3.5) называется дифференциальным уравнением звена в отклонениях. Прделав то же самое для всех звеньев системы, получим в результате линеаризованные уравнения процесса регулирования в отклонениях (или, как называют еще, уравнения «в вариациях»).

В дальнейшем можно будет проводить линеаризацию нелинейных уравнений непосредственно по аналогии с формулой (3.5), не производя предварительных выкладок.

Приведем геометрическую трактовку этого способа линеаризации. Изобразим графически зависимость F от x_1 при постоянных значениях всех остальных переменных:

$$x_2 = x_2^0, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad x_3 = x_3^0, \quad \dot{x}_3 = \ddot{x}_3 = \ddot{x}_3 = 0.$$

Пусть эта зависимость имеет вид кривой, представленной на рис. 3.2, а. Отметим значение x_1^0 и проведем в точке C касательную. Тогда

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 = \operatorname{tg} \alpha, \quad (3.6)$$

где α — угол наклона касательной в точке $C(x_1^0, F^0)$, для которой

$$x_1 = x_1^0$$

$$F = F^0 = F(x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, 0, 0, 0). \quad (3.7)$$

Замена $x_1 = x_1^0 + \Delta x_1$ и сокращение члена (3.7), производившиеся раньше аналитически, здесь эквивалентны переносу начала координат в точку C (рис. 3.2, а), в результате чего получается график рис. 3.2, б.

Первый член линейного уравнения (3.5) согласно (3.6) означает, что линеаризация уравнения геометрически может трактоваться как замена первоначальной кривой CB на касательную к ней прямую CD . Из графика рис. 3.2, б очевидно, что эта замена тем точнее, чем меньшие величины отклонения Δx_1 возникают в исследуемом динамическом процессе (основная предпосылка для линеаризации); границы отклонений Δx_1 , для которых

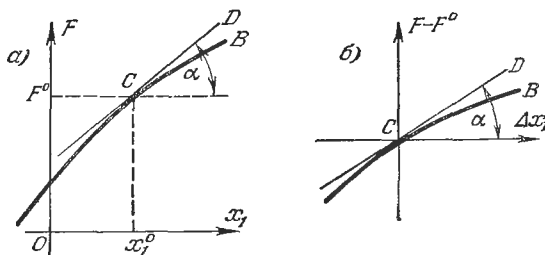


Рис. 3.2.

допустима линеаризация, тем шире, чем ближе кривая CB к прямой CD . Последним обстоятельством и определяются практически в каждой задаче те границы, внутри которых отклонения можно считать «достаточно малыми».

В ряде задач отличие от линейности, показанное на рис. 3.2, б, бывает столь незначительным, что даже в сравнительно большом диапазоне отклонений Δx_1 можно считать систему линейной. В случае же ярко выраженной нелинейной зависимости линеаризация будет справедлива лишь на соответствующем более узком участке отклонений Δx_1 . Линеаризация может быть совершенно недопустимой при скачкообразных зависимостях (релейные характеристики, сухое трение). Такого рода зависимости называются существенно нелинейными.

Важно отметить следующее. Если по указанным причинам не может быть подвергнуто линеаризации уравнение только одного звена системы или даже только часть функции F для данного звена, то производят линеаризацию всех остальных нелинейных зависимостей, оставляя только одну или несколько существенно нелинейных.

Второй способ линеаризации. Из приведенной геометрической иллюстрации вытекает другой способ линеаризации уравнений системы автоматического регулирования, который весьма часто применяется на практике. Этот способ заключается в том, что с самого начала все криволинейные зависимости, используемые при составлении уравнений звеньев, заменяются прямолинейными (по касательной в соответствующей точке кривой). Тогда уравнения звеньев сразу будут получаться линейными.

В последующих главах разделов II и III будут использоваться линеаризованные уравнения динамических звеньев. Однако для упрощения записи значок Δ перед переменными $x_1(t)$, $x_2(t)$ и т. д. будет опускаться в предположении, что эти переменные представляют собой малые отклонения от некоторого установившегося состояния и линеаризация уравнений уже проделана.

§ 3.2. О записи линеаризованных уравнений звеньев

В теории автоматического регулирования в настоящее время принято записывать дифференциальные уравнения звеньев в двух стандартных формах.

Первая форма записи. Дифференциальные уравнения записываются так, чтобы выходная величина и ее производные находились в левой части уравнения, а входная величина и все остальные члены — в правой части. Кроме того, принято, чтобы сама выходная величина входила в уравнение с коэффициентом единица. Чтобы привести линеаризованное уравнение (3.5) к такому виду, введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= - \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^0 : \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^0, & k_2 &= - \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^0 : \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^0, \\ k_3 &= - \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^0 : \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^0, & k_4 &= 1 : \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^0, \\ T_1 &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^0 : \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^0, & T_2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^0 : \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^0, \\ T_3 &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^0 : \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^0, & f_1(t) &= \varphi(f, \dot{f}) - \varphi(f^0, 0). \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Тогда уравнение (3.5) примет вид

$$T_3^3 \Delta \ddot{x}_3 + T_2^2 \Delta \ddot{x}_3 + T_1 \Delta \dot{x}_3 + \Delta x_3 = k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2 + k_3 \Delta \dot{x}_2 + k_4 f_1(t). \quad (3.9)$$

В случае, если нелинейная функция F не содержит величины x_3 , а содержит только ее производные, т. е. если

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0 = 0,$$

в формулах (3.8) необходимо заменить $\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0$ на $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3}\right)^0$. В результате получится уравнение

$$T_2^2 \Delta \ddot{x}_3 + T_1 \Delta \ddot{x}_3 + \Delta x_3 = k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2 + k_3 \Delta \dot{x}_2 + k_4 f_1(t), \quad (3.10)$$

где

$$T_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3}\right)^0 : \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3}\right)^0, \quad T_2^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3}\right)^0 : \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3}\right)^0, \dots$$

Уравнения (3.9) и (3.10) удобнее записывать в символической форме, введя алгебраизированный оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$. Тогда уравнение (3.9) примет вид

$$(T_3^2 p^3 + T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) \Delta x_3 = k_1 \Delta x_1 + (k_2 + k_3 p) \Delta x_2 + k_4 f_1(t), \quad (3.11)$$

а уравнение (3.10) —

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) p \Delta x_3 = k_1 \Delta x_1 + (k_2 + k_3 p) \Delta x_2 + k_4 f_1(t). \quad (3.12)$$

Эти записи надо рассматривать только как сокращенную форму более полных записей (3.9) и (3.10).

Стандартные формы записи уравнений звеньев автоматических систем (3.9) и (3.10) или их сокращенные виды (3.11) и (3.12) можно использовать как для размерных отклонений реальных величин на входе и выходе звена, так и для любых безразмерных относительных отклонений, специально иногда вводимых для упрощения вида уравнений и удобства их исследования. При записи уравнений в стандартной форме коэффициенты k_1, k_2, k_3, k_4 называются *коэффициентами передачи*, а T_1, T_2, T_3 — *постоянными времени* данного звена.

В случае звеньев, у которых выходная и входная величины имеют одинаковую размерность, для коэффициентов передачи используются также следующие термины:

1) *коэффициент усиления* — для звена, представляющего собой усилитель или имеющего в своем составе усилитель;

2) *передаточное число* — для редукторов, делителей напряжения, масштабирующих устройств и т. д.

Термин «коэффициент передачи» можно пояснить следующим образом. Если подать на вход звена только постоянное значение Δx_1^0 (рис. 3.3, б) и найти установившееся значение выходной величины Δx_3^0 (рис. 3.3, в), то из (3.9) получим $\Delta x_3^0 = k_1 \Delta x_1^0$. Таким образом, коэффициент k_1 показывает отношение выходной величины звена к входной в установившемся режиме.

Следовательно, коэффициент передачи определяет собой наклон (с учетом масштабов по осям) линейной статической характеристики звена

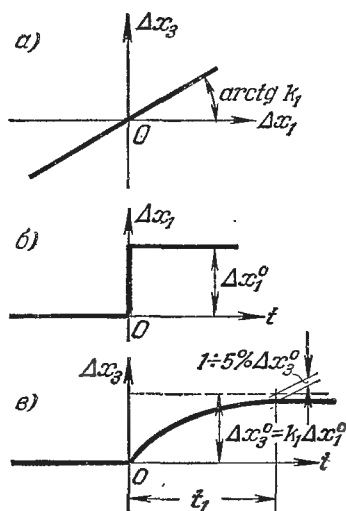


Рис. 3.3.

(рис. 3.3, а). Заметим, что нелинейную характеристику звена часто называют характеристикой с переменным по входной величине коэффициентом передачи. Из (3.9) очевидно, что

$$\text{размерность } k_1 = \frac{\text{размерность выходной величины } \Delta x_3}{\text{размерность входной величины } \Delta x_1}.$$

В размерность коэффициента передачи может входить также время t . Так, из уравнения (3.9) следует, что

$$\text{размерность } k_3 = \frac{\text{размерность } \Delta x_3 \times \text{размерность } t}{\text{размерность } \Delta x_2},$$

а из уравнения (3.10) следует, что для такого звена

$$\text{размерность } k_1 = \frac{\text{размерность } \Delta x_3}{\text{размерность } \Delta x_1 \times \text{размерность } t}.$$

Постоянные времени T_1 , T_2 и T_3 , как следует из уравнений (3.9) и (3.10), имеют размерность времени.

Вторая форма записи. Считая условно оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$ алгебраической величиной, решим уравнение (3.11) относительно выходной величины:

$$\Delta x_3(t) = \frac{k_1 \Delta x_1(t)}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2 + T_3^3 p^3} + \frac{(k_2 + k_3 p) \Delta x_2(t)}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2 + T_3^3 p^3} + \frac{k_4 f_1(t)}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2 + T_3^3 p^3}. \quad (3.13)$$

Выражения

$$W_1(p) = \frac{k_1}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2 + T_3^3 p^3}, \quad (3.14)$$

$$W_2(p) = \frac{k_2 + k_3 p}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2 + T_3^3 p^3}, \quad (3.15)$$

$$W_f(p) = \frac{k_4}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2 + T_3^3 p^3} \quad (3.16)$$

называются в теории регулирования *передаточными функциями*. Уравнение (3.13) можно представить в виде

$$\Delta x_3(t) = W_1(p) \Delta x_1(t) + W_2(p) \Delta x_2(t) + W_f(p) f_1(t). \quad (3.17)$$

Выражения (3.13) и (3.17) представляют собой символическую запись дифференциального уравнения (3.9).

Передаточные функции, формулы для которых устанавливаются выражениями (3.14) — (3.16), вводятся для сокращения записи дифференциальных уравнений и также представляют собой символическую запись дифференциальных уравнений.

Более строго передаточная функция определяется через изображения Лапласа или Карсона — Хевисайда (см. главу 7). Если ввести изображения, например по Лапласу, входных и выходных величин звена:

$$\begin{aligned} \Delta X_1(s) &= L[\Delta x_1(t)], & \Delta X_2(s) &= L[\Delta x_2(t)], \\ \Delta X_3(s) &= L[\Delta x_3(t)], & F_1(s) &= L[f_1(t)], \end{aligned}$$

где $s = \sigma + j\omega$ — комплексная величина, то передаточную функцию (3.14) можно строго определить как отношение изображений выходной и входной величин звена:

$$W_1(s) = \frac{\Delta X_3(s)}{\Delta X_1(s)} = \frac{k_1}{1 + T_1 s + T_2^2 s^2 + T_3^3 s^3}, \quad (3.18)$$

при нулевых начальных условиях и равных нулю остальных воздействиях на звено: $\Delta X_2(s) = 0$ и $F_1(s) = 0$. Аналогичным образом можно определить

передаточные функции (3.15) и (3.16). Поэтому вместо дифференциального уравнения (3.17), куда входят функции времени $\Delta x_1(t)$, $\Delta x_2(t)$, $\Delta x_3(t)$ и $f_1(t)$, можно написать при нулевых начальных условиях уравнение для изображений в виде, совпадающем по форме с (3.17):

$$\Delta X_3(s) = W_1(s) \Delta X_1(s) + W_2(s) \Delta X_2(s) + W_f(s) F_1(s), \quad (3.19)$$

или в развернутом виде:

$$\Delta X_3(s) = \frac{k_1 \Delta X_1(s)}{1 + T_1 s + T_2^2 s^2 + T_3^3 s^3} + \frac{(k_2 + k_3 s) \Delta X_2(s)}{1 + T_1 s + T_2^2 s^2 + T_3^3 s^3} + \frac{k_4 F_1(s)}{1 + T_1 s + T_2^2 s^2 + T_3^3 s^3}. \quad (3.20)$$

В двух последних выражениях фигурируют не функции времени, а их изображения: $\Delta X_1(s)$, $\Delta X_2(s)$, $\Delta X_3(s)$ и $F_1(s)$, где $s = c + j\omega$ — комплексная величина.

В изображениях Лапласа и Карсона — Хевисайда комплексная величина часто обозначается той же буквой p , что и оператор дифференцирования, причем $p = c + j\omega$. В этом случае уравнение (3.19) будет иметь вид

$$\Delta X_3(p) = W_1(p) \Delta X_1(p) + W_2(p) \Delta X_2(p) + W_f(p) F_1(p). \quad (3.21)$$

Здесь, как и в уравнении (3.19), фигурируют изображения функций $\Delta X_1(p)$, $\Delta X_2(p)$, $\Delta X_3(p)$ и $F_1(p)$.

В дальнейшем будет употребляться символ дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$ для символической записи дифференциальных уравнений, куда входят функции времени $\Delta x_1(t)$, $\Delta x_2(t)$ и т. д., комплексная величина $p = c + j\omega$ для записи уравнений с изображениями функций времени по Лапласу или Карсону — Хевисайду $\Delta X_1(p)$, $\Delta X_2(p)$ и т. д. Запись передаточных функций звена и в том и в другом случае сливается в одну: $W_1(p)$, $W_2(p)$ и т. д. Однако в передаточных функциях буква p будет означать символ дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$ или комплексную величину $p = c + j\omega$ в зависимости от того, рассматриваются ли функции времени или их изображения.

Понятие передаточной функции весьма удобно при анализе так называемых структурных схем. Так, например, звено, изображенное на рис. 3.4, после линеаризации, которая была проделана в предыдущем параграфе, можно представить в виде структурной схемы, показанной на рис. 3.4. Передаточные функции звеньев или отдельных участков схемы позволяют легко получить общее уравнение всей системы в виде (3.13) или (3.20), а в дальнейшем в случае необходимости перейти к исходному дифференциальному уравнению вида (3.9). Подобным же образом могут быть получены передаточные функции и структурные схемы и для других дифференциальных уравнений звеньев, например для рассмотренного выше уравнения (3.10). Подробнее этот вопрос изложен в § 5.4

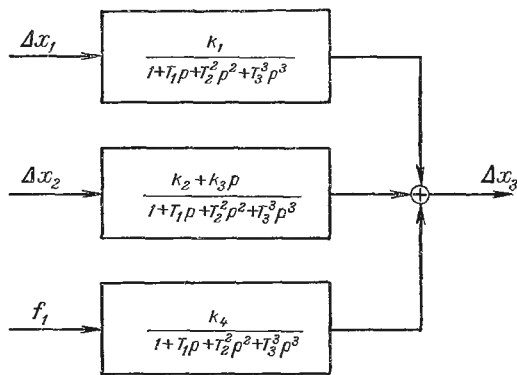


Рис. 3.4.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

§ 4.1. Общие понятия

Как уже было сказано, для расчета различных систем автоматического регулирования они обычно разбиваются на динамические звенья. Под динамическим звеном понимают устройство любого физического вида и конструктивного оформления, но описываемое определенным дифференциальным уравнением.

В соответствии с этим классификация звеньев производится именно по виду дифференциального уравнения. Одним и тем же уравнением могут описываться весьма разнообразные устройства (механические, гидравлические, электрические и т. д.). Для теории автоматического регулирования это будет один и тот же тип звена. Конкретные же элементы автоматических систем, их теория, конструкция и расчеты излагаются в соответствующих учебниках и руководствах.

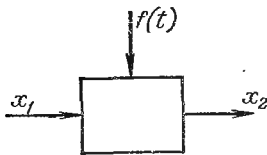


Рис. 4.1.

Обозначим входную величину звена через x_1 , а выходную через x_2 (рис. 4.1). Возмущение, действующее на звено, в соответствии с изложенным выше обозначим $f(t)$.

Статическая характеристика любого звена может быть изображена прямой линией (рис. 4.2), так как пока будут рассматриваться линейные или, точнее, линеаризованные системы.

В звеньях *позиционного*, или *статического*, типа линейной зависимостью $x_2 = kx_1$ связаны выходная и входная величины в установившемся режиме (рис. 4.2, а). Коэффициент пропорциональности k между выходной и входной величинами представляет собой коэффициент передачи звена.

В звеньях *интегрирующего* типа линейной зависимостью $\frac{dx_2}{dt} = kx_1$ связаны производная выходной величины и входная величина в установившемся режиме (рис. 4.2, б). В этом случае для установившегося режима будет справедливым равенство $x_2 = k \int x_1 dt$, откуда и произошло название этого типа звеньев. Коэффициент пропорциональности k в этом случае также является коэффициентом передачи звена. Если входная и выходная величины звена имеют одинаковую размерность, то коэффициенту передачи соответствует размерность $[сек^{-1}]$.

В звеньях *дифференцирующего* типа линейной зависимостью $x_2 = k \frac{dx_1}{dt}$ связаны в установившемся режиме выходная величина и производная входной (рис. 4.2, в), откуда и произошло название этого типа звеньев. Коэффициент пропорциональности k является коэффициентом передачи звена. Если входная и выходная величины имеют одинаковую размерность, то коэффициенту передачи соответствует размерность $[сек]$.

Классификация звеньев, как уже отмечалось, производится по виду дифференциального уравнения или, что то же, по виду передаточной функции звена. Предположим, что звено, изображенное на рис. 4.1, описывается дифференциальным уравнением, представленным в стандартной форме:

$$T_2^2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + T_1 \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k_1 x_1 + k_2 \frac{dx_1}{dt} + k_3 f(t).$$

При нулевых начальных условиях, т. е. в том случае, если для $t < 0$ входная и выходная величины, а также их производные тождественно равны

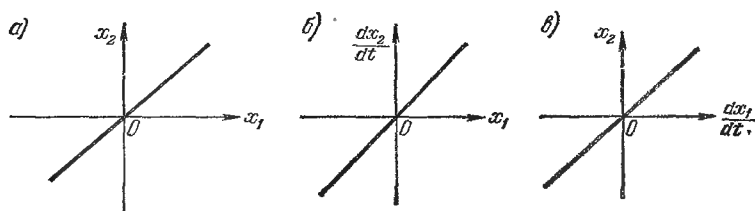


Рис. 4.2.

нулю, и при отсутствии внешнего возмущения ($f(t) = 0$) может быть найдена передаточная функция звена как отношение изображений по Лапласу (или Карсону) выходной и входной величин:

$$W(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{k_1 + k_2 p}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2} = \frac{k_1 (1 + T_3 p)}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2}, \quad (4.1)$$

где k_1 — коэффициент передачи звена, $T_3 = \frac{k_2}{k_1}$ — постоянная времени.

При известной передаточной функции выходная величина (точнее, ее изображение по Лапласу или по Карсону) может находиться из выражения

$$X_2(p) = W(p) X_1(p).$$

Аналогичным образом может быть найдена передаточная функция звена по возмущению, если положить при нулевых начальных условиях входное воздействие равным нулю ($x_1 = 0$). Тогда искомая передаточная функция будет равна отношению изображений выходной величины и внешнего возмущения:

$$W_F(p) = \frac{X_2(p)}{F(p)} = \frac{k_3}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2}. \quad (4.2)$$

В дальнейшем изложении для характеристики звена будет использоваться в основном передаточная функция, так как именно она дает связь между входной и выходной величинами, что необходимо знать при использовании того или иного звена в автоматической системе.

В соответствии с этим в табл. 4.1 приведены передаточные функции десяти разновидностей так называемых типовых динамических звеньев. Под типовым звеном понимается такое звено, которое описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка. Характеристики типовых звеньев рассматриваются более подробно ниже.

В табл. 4.1 не приводятся сведения о большой группе так называемых корректирующих звеньев, используемых для улучшения динамических качеств автоматических систем. Эти звенья будут рассмотрены в главе 10.

Таблица 4.1

Типовые звенья

№ п. п.	Тип звена	Передаточная функция
1	Безынерционное	$W(p) = k$
2	Апериодическое 1-го порядка	$W(p) = \frac{k}{1 + Tp}$
3	Апериодическое 2-го порядка	$W(p) = \frac{k}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2} =$ $= \frac{k}{(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)},$ $T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2} \quad (T_1 > 2T_2)$
4	Колебательное	$W(p) = \frac{k}{1 + 2\zeta Tp + T^2 p^2} = \frac{k}{1 + \frac{2\zeta}{q} p + \frac{p^2}{q^2}}$
5	Консервативное	$W(p) = \frac{k}{1 + T^2 p^2} = \frac{k}{1 + \frac{p^2}{q^2}}$
6	Идеальное интегрирующее	$W(p) = \frac{k}{p}$
7	Интегрирующее с замедлением	$W(p) = \frac{k}{p(1 + Tp)}$
8	Изодромное	$W(p) = \frac{k}{p} + k_1 = \frac{k(1 + Tp)}{p}, \quad T = \frac{k_1}{k}$
9	Идеальное дифференцирующее	$W(p) = kp$
10	Дифференцирующее с замедлением	$W(p) = \frac{kp}{1 + Tp}$

§ 4.2. Временные характеристики

Динамические свойства звена могут быть определены по его *переходной функции* и *функции веса*.

Переходная функция, или *переходная характеристика*, $h(t)$ представляет собой переходный процесс на выходе звена, возникающий при подаче на его вход скачкообразного воздействия при величине скачка, равной единице (рис. 4.3). Такое входное воздействие называется *единичной ступенчатой функцией* и обозначается $x_1(t) = 1(t)$, что соответствует $x_1 = 0$ при $t < 0$

и $x_1 = 1$ при $t \geq 0$. Предполагается, что единица имеет ту же размерность, что и физическая величина на входе звена.

Если входное воздействие представляет собой неединичную ступенчатую функцию $x_1 = N \cdot 1(t)$, выходная величина будет равна $x_2 = Nh(t)$.

Более строго переходную функцию можно определить как отношение выходной величины звена $x_2(t)$ к высоте ступенчатого скачка $x_1(t) = N \cdot 1(t)$ на его входе, т. е. $h(t) = N^{-1} \cdot x_2(t)$. При этом размерность $h(t)$ соответствует размерности передаточной функции звена.

Ступенчатая функция представляет собой распространенный вид входного воздействия в автоматических системах. К такому виду сводятся мгновенное изменение нагрузки электрического генератора, мгновенное возрастание нагрузки на валу двигателя, мгновенный поворот входного валика следящей системы и т. п.

Умножение какой-либо функции времени $x(t)$ на единичную ступенчатую функцию $1(t)$ означает, что функция времени $x(t)$ будет существовать

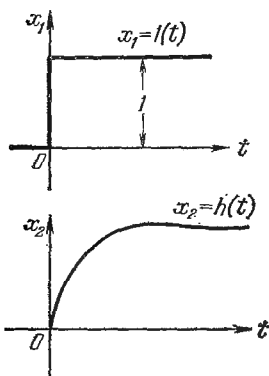


Рис. 4.3.

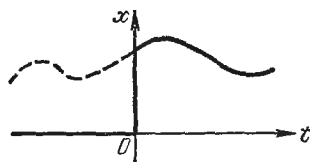


Рис. 4.4.

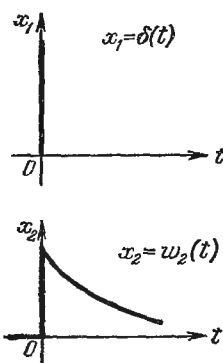


Рис. 4.5.

только при $t \geq 0$, при $t < 0$ она обращается в нуль. Это иллюстрируется рис. 4.4.

Функция веса $w(t)$ представляет собой реакцию звена на единичную импульсную функцию, поданную на его вход (рис. 4.5). Единичная импульсная функция, или дельта-функция, представляет собой производную от единичной ступенчатой функции: $\delta(t) = 1'(t)$. Дельта-функция тождественно равна нулю повсюду, кроме точки $t = 0$, где она стремится к бесконечности.

Основное свойство дельта-функции заключается в том, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1, \quad (4.3)$$

т. е. она имеет единичную площадь.

Из последнего выражения следует, что размерность единичной дельта-функции равна $[сек^{-1}]$.

Дельта-функция может быть представлена как предел некоторого выражения, например:

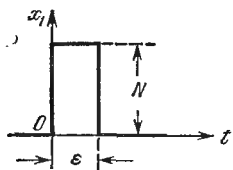
$$\delta(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma e^{-\sigma t} 1(t).$$

Нетрудно установить связь между переходной функцией и функцией веса. Рассмотрим входное воздействие звена в виде конечного по высоте и ширине импульса с площадью $N\varepsilon = 1$, прикладываемого при $t = 0$

(рис. 4.6). Такой импульс может быть заменен двумя ступенчатыми функциями $N \cdot 1(t)$ и $-N \cdot 1(t - \varepsilon)$, прикладываемыми ко входу звена со сдвигом во времени ε . Тогда выходная величина звена будет равна

$$x_2(t) = N [h(t) - h(t - \varepsilon)]. \quad (4.4)$$

Будем теперь увеличивать высоту импульса N , одновременно уменьшая его ширину ε , но так, чтобы все время площадь импульса равнялась единице, т. е. $N\varepsilon = 1$. Помножив и поделив правую часть равенства (4.4) на ε и перейдя к пределу, получим функцию веса



$$w(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N\varepsilon [h(t) - h(t - \varepsilon)]}{\varepsilon} = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (4.5)$$

Таким образом, функция веса может быть получена дифференцированием по времени переходной функции.

В случае, если на вход звена поступает неединичная импульсная функция $x_1 = G\delta(t)$, на выходе звена получится $x_2 = Gw(t)$.

Более строго функцию веса можно определить как отношение выходной величины звена $x_2(t)$ к площади поданного на его вход импульса $x_1(t) = G\delta(t)$, т. е. $w(t) = G^{-1}x_2(t)$. При этом размерность $w(t)$ соответствует размерности передаточной функции звена, деленной на время.

Импульсная функция также представляет собой распространенный вид входного воздействия в автоматических системах. К такому виду можно свести, например, кратковременный удар нагрузки на валу двигателя, кратковременный ток короткого замыкания генератора, отключаемый плавкими предохранителями, и т. п. В действительности реальные импульсные воздействия на автоматическую систему всегда будут конечными по величине и продолжительности. Однако в случае, если их продолжительность весьма мала по сравнению с временем переходного процесса звена или автоматической системы, то с большой степенью точности реальный импульс может быть заменен дельта-функцией с некоторым масштабирующим коэффициентом, что позволяет оценить переходный процесс по виду функции веса.

Функция веса звена связана с его передаточной функцией преобразованием Лапласа, а именно: передаточная функция есть изображение функции веса и связана с ней интегральным преобразованием

$$W(p) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-pt} dt. \quad (4.6)$$

В свою очередь переходная функция звена связана с его передаточной функцией преобразованием Карсона, т. е. имеет место интегральное преобразование

$$W(p) = p \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt. \quad (4.7)$$

Для входного воздействия произвольного типа, прикладываемого в момент $t = 0$, переходный процесс на выходе звена при нулевых начальных условиях может быть определен на основании интеграла Дюамеля — Карсона

по переходной функции:

$$x_2(t) = x_1(0) h(t) + \int_0^t x_1(\tau) h(t-\tau) d\tau, \quad (4.8)$$

или по функции веса:

$$x_2(t) = \int_0^t x_1(\tau) w(t-\tau) d\tau, \quad (4.9)$$

где τ — вспомогательное время интегрирования, изменяющееся в пределах от нуля до рассматриваемого текущего момента времени t .

Более подробно методика нахождения переходного процесса при произвольном входном воздействии будет рассмотрена в главе 7.

§ 4.3. Частотная передаточная функция и частотные характеристики

Важнейшей характеристикой динамического звена является его *частотная передаточная функция*. Для получения ее рассмотрим динамическое звено (рис. 4.1) в случае, когда возмущение $f(t) = 0$, а на входе имеется гармоническое воздействие $x_1 = X_{1м} \cos \omega t$, где $X_{1м}$ — амплитуда, а ω — угловая частота этого воздействия.

На выходе линейного звена в установившемся режиме будет также гармоническая функция той же частоты, но в общем случае сдвинутая по фазе относительно входной величины на угол ψ . Таким образом, для выходной величины можно записать:

$$x_2 = X_{2м} \cos(\omega t + \psi).$$

Воспользуемся формулой Эйлера и представим входную и выходную величины в виде суммы экспоненциальных функций:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{X_{1м}}{2} [e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}] = x'_1 + x''_1, \\ x_2 &= \frac{X_{2м}}{2} [e^{j(\omega t + \psi)} + e^{-j(\omega t + \psi)}] = x'_2 + x''_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

В линейной системе на основании принципа суперпозиции можно рассмотреть отдельно прохождение составляющих x'_1 и x''_1 . Кроме того, можно легко показать, что достаточно рассмотреть прохождение только составляющей x'_1 , которая в выходной величине дает составляющую x'_2 . Соотношение между составляющими x'_1 и x'_2 получается таким же, как между x'_1 и x''_2 . Поэтому в дальнейшем рассмотрении воспользуемся символической записью ¹⁾ $\cos \omega t = e^{j\omega t}$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= X_{1м} e^{j\omega t}, \\ x_2 &= X_{2м} e^{j(\omega t + \psi)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Символичность этой сокращенной записи заключается в отбрасывании составляющих с множителем $e^{-j\omega t}$.

Для нахождения соотношения между входной и выходной гармоническими величинами звена воспользуемся его дифференциальным уравнением в виде

$$T_2^2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + T_1 \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k_1 x_1 + k_2 \frac{dx_1}{dt}.$$

¹⁾ Иногда употребляют символическую запись $\sin \omega t = e^{j\omega t}$.

Из выражений (4.11) определим производные:

$$\frac{dx_1}{dt} = j\omega X_{1m} e^{j\omega t}, \quad \frac{dx_2}{dt} = j\omega X_{2m} e^{j(\omega t + \psi)}, \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = (j\omega)^2 X_{2m} e^{j(\omega t + \psi)}.$$

Подставив значения входной и выходной величин и их производных в исходное дифференциальное уравнение, получим:

$$T_2^2 (j\omega)^2 X_{2m} e^{j(\omega t + \psi)} + T_1 j\omega X_{2m} e^{j(\omega t + \psi)} + X_{2m} e^{j(\omega t + \psi)} = k_1 X_{1m} e^{j\omega t} + k_2 j\omega X_{1m} e^{j\omega t},$$

откуда после сокращения на общий множитель $e^{j\omega t}$ найдем:

$$\frac{X_{2m}}{X_{1m}} e^{j\psi} = \frac{k_1 + k_2 j\omega}{1 + T_1 j\omega + T_2^2 (j\omega)^2} = W(j\omega). \quad (4.12)$$

Это выражение называется *частотной передаточной функцией* звена. Таким образом, частотная передаточная функция $W(j\omega)$ представляет собой комплексное число, модуль которого равен отношению амплитуды выходной величины к амплитуде входной, а аргумент — сдвигу фаз выходной величины по отношению к входной:

$$\left. \begin{aligned} \text{mod } W(j\omega) &= |W(j\omega)| = \frac{X_{2m}}{X_{1m}}, \\ \arg W(j\omega) &= \psi. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

В более общей формулировке для входного сигнала любого вида частотную передаточную функцию можно представить как отношение изобразжений Фурье (частотных изображений) выходной и входной величин:

$$W(j\omega) = \frac{X_2(j\omega)}{X_1(j\omega)} = W(p) \big|_{p=j\omega}, \quad (4.14)$$

что непосредственно вытекает из формулы (4.1) при переходе от изображения Лапласа к изображению Фурье; следовательно, частотная передаточная функция легко получается из обычной передаточной функции подстановкой $p = j\omega$.

Частотная передаточная функция звена есть изображение Фурье его функции веса, т. е. имеет место интегральное преобразование

$$W(j\omega) = \int_0^\infty w(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.15)$$

Частотная передаточная функция может быть представлена в следующем виде:

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\psi} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (4.16)$$

где $A(\omega)$ — модуль частотной передаточной функции, $\psi(\omega)$ — аргумент или фаза, $U(\omega)$ и $V(\omega)$ — вещественная и мнимая составляющие частотной передаточной функции.

Модуль частотной передаточной функции находится как отношение модулей числителя и знаменателя. Для рассмотренного выше примера (4.12)

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 \omega^2}}{\sqrt{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}}.$$

Аргумент или фаза частотной передаточной функции находится как разность аргументов числителя и знаменателя. Для (4.12) имеем:

$$\psi(\omega) = \arctg \frac{k_2 \omega}{k_1} - \arctg \frac{T_1 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2}.$$

Для нахождения вещественной и мнимой частей частотной передаточной функции необходимо освободиться от мнимости в знаменателе путем умножения числителя и знаменателя на комплексную величину, сопряженную знаменателю, и затем произвести деление на вещественную и мнимую части. Для (4.12)

$$U(\omega) = \frac{k_1(1 - T_2^2\omega^2) + k_2T_1\omega^2}{(1 - T_2^2\omega^2)^2 + T_1^2\omega^2}, \quad V(\omega) = \frac{k_2\omega(1 - T_2^2\omega^2) - k_1T_1\omega}{(1 - T_2^2\omega^2)^2 + T_1^2\omega^2}.$$

Для наглядного представления частотных свойств звена используются так называемые частотные характеристики.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (а. ф. х.) строится на комплексной плоскости. Она представляет собой геометрическое место концов векторов (годограф), соответствующих частотной передаточной функции $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ при изменении частоты от нуля до бесконечности (рис. 4.7). По оси абсцисс откладывается вещественная часть $U(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega)$ и по оси ординат — мнимая часть $V(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega)$. Для каждой частоты на комплексной плоскости наносится точка. Полученные точки соединяются затем плавной кривой. Около нанесенных точек можно написать соответствующие им частоты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и т. д.

А. ф. х. может быть построена как для положительных, так и для отрицательных частот. При замене в частотной передаточной функции $+\omega$ на $-\omega$ получится сопряженная комплексная величина. Поэтому а. ф. х. для отрицательных частот может быть построена как зеркальное изображение относительно вещественной оси а. ф. х. для положительных частот. На рис. 4.7 а. ф. х. для отрицательных частот показана пунктирной линией.

Отметим, в чем заключается смысл положительных и отрицательных частот. При помощи преобразования Фурье

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

функция времени $x(t)$ преобразуется в функцию частоты $X(j\omega)$. Это означает, что функция времени представляется в виде бесконечной суммы бесконечно малых по величине векторов, вращающихся на комплексной плоскости с различными угловыми скоростями (частотами) ω . Эта сумма определяется формулой обратного преобразования Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-\infty}^{c+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

где c — абсцисса абсолютной сходимости.

Так как функция времени является вещественной, то каждому элементарному вектору $X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$, вращающемуся против часовой стрелки ($\omega > 0$), должен соответствовать элементарный сопряженный вектор $X(-j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$, вращающийся по часовой стрелке ($\omega < 0$). В этом случае сумма таких векторов в любой момент времени будет всегда вещественной. Поэтому интегрирование в формуле обратного преобразования Фурье должно вестись по всем частотам от $-\infty$ до $+\infty$.

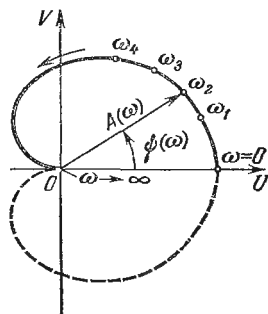


Рис. 4.7.

Примером представления функции времени в виде суммы сопряженных векторов, вращающихся в разные стороны, может служить изображение гармонических функций по формулам Эйлера, например (4.10).

Таким образом, положительные и отрицательные частоты имеют определенный смысл, так как они соответствуют положительным и отрицательным угловым скоростям вращения векторов на комплексной плоскости.

В принципе можно ограничиться рассмотрением только положительных частот. Однако при использовании всего диапазона частот от $-\infty$ до $+\infty$ многие формулы получают более удобный и симметричный вид.

Длина вектора, проведенного из начала координат в точку а. ф. х., соответствующую какой-то выбранной частоте, равна модулю частотной передаточной функции. Угол между вектором и положительным направлением вещественной оси, отсчитываемый против часовой стрелки, равен аргументу или фазе частотной передаточной функции. Таким образом, а. ф. х.

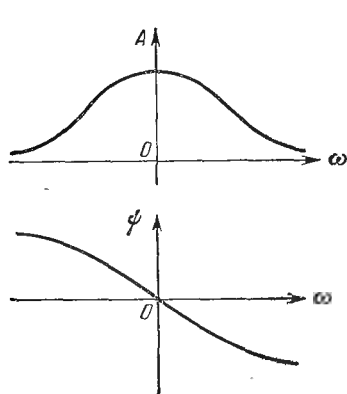


Рис. 4.8.

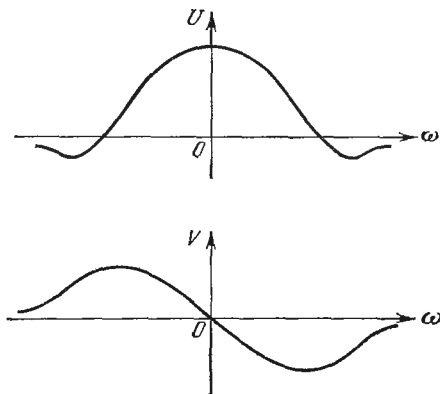


Рис. 4.9.

дает возможность наглядно представить для каждой частоты входного воздействия звена отношение амплитуд выходной и входной величин и сдвиг фаз между ними.

Построение а. ф. х. по вещественной и мнимой частям частотной передаточной функции, как правило, является трудоемкой работой, так как умножение частотной передаточной функции на комплексную величину, сопряженную ее знаменателю, повышает в два раза степень частоты в знаменателе. Обычно гораздо проще строить а. ф. х., используя полярные координаты, т. е. вычисляя непосредственно модуль и фазу. Зная модуль и фазу, можно легко построить соответствующую точку на комплексной плоскости. В случае необходимости при известных модуле и фазе легко вычислить вещественную и мнимую части умножением модуля на направляющий косинус между вектором и соответствующей осью.

Вместо а. ф. х. можно построить отдельно амплитудную частотную характеристику (а. ч. х.) и фазовую частотную характеристику (ф. ч. х.). Это построение показано на рис. 4.8.

Амплитудная частотная характеристика показывает, как пропускает звено сигнал различной частоты. Оценка пропускания делается по отношению амплитуд выходной и входной величин.

Фазовая частотная характеристика показывает фазовые сдвиги, вносимые звеном на различных частотах.

Как следует из сказанного выше, модуль частотной передаточной функции представляет собой четную функцию частоты, а фаза — нечетную функ-

цию частоты. Поэтому по результатам вычисления модуля и фазы для положительных частот можно сразу построить а. ч. х. и ф. ч. х. для всего диапазона частот $-\infty < \omega < +\infty$.

Можно построить также отдельно *вещественную* и *мнимую частотные характеристики* по функциям $U(\omega)$ и $V(\omega)$. Это построение показано на рис. 4.9. Как следует из сказанного выше, вещественная характеристика представляет собой четную функцию частоты, а мнимая характеристика — нечетную функцию частоты.

Минимально-фазовые звенья и системы. В случае, если корни числителя и знаменателя передаточной функции $W(p)$ звена лежат в левой полуплоскости (при этом корни числителя и знаменателя частотной передаточной функции $W(j\omega)$ лежат в верхней полуплоскости), такое звено называется *минимально-фазовым*. Как будет показано ниже (см. § 4.8), этим звеньям присущи меньшие по абсолютной величине фазовые сдвиги по сравнению со звеньями, у которых это условие не выполняется.

Можно показать [121], что для минимально-фазовых звеньев существуют следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} U(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V(u)}{u-\omega} du, \\ V(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(u)}{u-\omega} du, \\ \psi(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dL}{d\lambda} \ln \operatorname{cth} \left| \frac{\lambda}{2} \right| d\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

где $L(u) = \ln A(u)$, $\lambda = \ln \frac{u}{\omega}$, а u — переменная интегрирования.

Приведенные зависимости являются чрезвычайно важными, так как показывают, что частотная передаточная функция минимально-фазового звена или системы полностью определяется заданием ее вещественной части $U(\omega)$, или мнимой части $V(\omega)$, или модуля $A(\omega)$. Это позволяет упростить задачи анализа и синтеза минимально-фазовых систем, ограничиваясь, например, рассмотрением их вещественных или амплитудных частотных характеристик.

§ 4.4. Логарифмические частотные характеристики

Прологарифмируем выражение частотной передаточной функции (4.16):

$$\ln W(j\omega) = \ln A(\omega) + j\psi(\omega). \quad (4.18)$$

Как видно из этого выражения, логарифм частотной передаточной функции равен комплексному выражению, вещественной частью которого является логарифм модуля, а мнимой — фаза.

Для практических целей удобнее пользоваться десятичными логарифмами и строить отдельно *логарифмическую амплитудную частотную характеристику* (л. а. х.) и *логарифмическую фазовую частотную характеристику* (л. ф. х.). Для построения л. а. х. находится величина

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg A(\omega). \quad (4.19)$$

Эта величина выражается в *децибелах*. Бел представляет собой логарифмическую единицу, соответствующую десятикратному увеличению мощности. Один бел соответствует увеличению мощности в 10 раз, 2 бела — в 100 раз, 3 бела — в 1000 раз и т. д.

Децибел равен одной десятой части бела. Если бы $A(\omega)$ было отношением мощностей, то перед логарифмом в правой части (4.19) должен был бы стоять множитель 10. Так как $A(\omega)$ представляет собой отношение не мощностей, а выходной и входной величин (перемещений, скоростей, напряжений, токов и т. п.), то увеличение этого отношения в десять раз будет соответствовать увеличению отношения мощностей в сто раз, что соответствует двум белам или двадцати децибелам. Поэтому в правой части (4.19) стоит множитель 20.

Один децибел соответствует изменению амплитуды в $\sqrt[20]{10}$ раз, т. е. представляет сравнительно малую величину.

Необходимость логарифмировать модуль частотной передаточной функции (4.19) приводит к тому, что, строго говоря, л. а. х. может быть построена

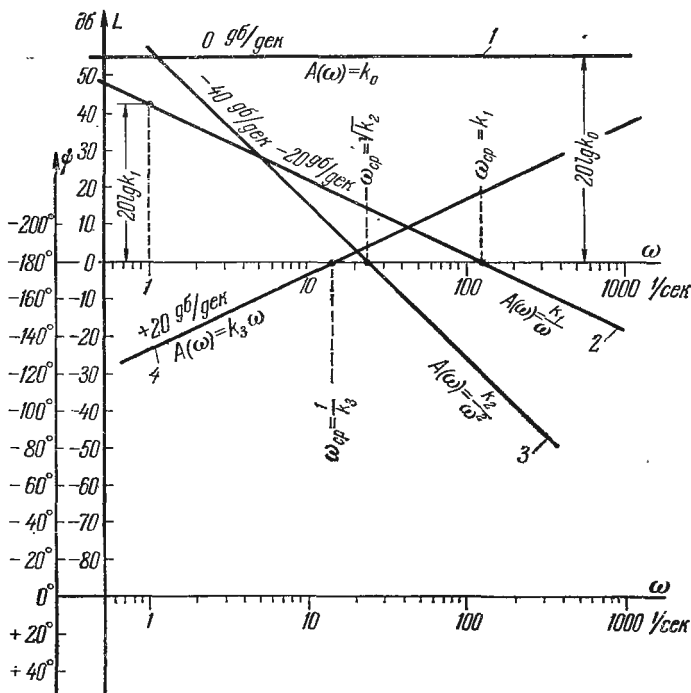


Рис. 4.10.

только для тех звеньев, у которых передаточная функция представляет собой безразмерную величину. Это возможно при одинаковых размерностях входной и выходной величин звена. В дальнейшем изложении будет подразумеваться именно этот случай.

Однако л. а. х. может условно строиться и для тех звеньев, у которых передаточная функция имеет какую-либо размерность. В этом случае некоторая исходная величина, соответствующая размерности передаточной функции, принимается за единицу (например, $1 \text{ г} \cdot \text{см/град}$, 1 сек^{-1} , 1 в/рад и т. п.) и под значением $A(\omega)$ понимается отношение модуля частотной передаточной функции к этой исходной единице.

Это же замечание относится и к угловой частоте ω , которая имеет размерность $[\text{сек}^{-1}]$ и которую приходится логарифмировать в соответствии с изложенным.

Для построения л. а. х. и л. ф. х. используется стандартная сетка (рис. 4.10). По оси абсцисс откладывается угловая частота в логарифмиче-

ском масштабе, т. е. наносятся отметки, соответствующие $\lg \omega$, а около отметок пишется само значение частоты ω в *рад/сек*. Для этой цели может использоваться специальная полулогарифмическая бумага. Однако удобнее использовать обычную миллиметровую бумагу, но масштаб по оси абсцисс наносить при помощи какой-либо шкалы счетной логарифмической линейки.

По оси ординат откладывается модуль в децибелах (*дб*). Для этой цели на ней наносится равномерный масштаб. Ось абсцисс должна проходить через точку 0 *дб*, что соответствует значению модуля $A(\omega) = 1$, так как логарифм единицы равен нулю.

Ось ординат может пересекать ось абсцисс (ось частот) в произвольном месте. Следует учесть, что точка $\omega = 0$ лежит на оси частот слева в бесконечности, так как $\lg 0 = -\infty$. Поэтому ось ординат проводят так, чтобы справа от нее можно было показать весь ход л. а. х. Как будет показано ниже, для этой цели необходимо провести ось ординат левее самой малой сопрягающей частоты л. а. х.

Для построения л. ф. х. используется та же ось абсцисс (ось частот). По оси ординат откладывается фаза в градусах в линейном масштабе. Для практических расчетов, как это будет ясно ниже, удобно совместить точку нуля децибел с точкой, где фаза равна -180° . Отрицательный сдвиг по фазе откладывается по оси ординат вверх, а положительный — вниз.



Рис. 4.41.

Иногда по оси абсцисс указывается не сама частота, а ее десятичный логарифм (рис. 4.41). Единица приращения логарифма соответствует одной декаде, т. е. десятикратному частоты. Применяется также деление шкалы на октавы. Одна октава соответствует удвоению частоты. Так как $\lg 2 = 0,303$, то одна октава соответствует 0,303 декады. Использование на оси абсцисс декад и октав значительно менее удобно, так как при этом оцифровка шкалы получается не в единицах частоты, а в единицах логарифма частоты, что в сильной степени снижает преимущества применения логарифмических частотных характеристик.

Главным достоинством логарифмических амплитудных частотных характеристик является возможность построения их во многих случаях практически без вычислительной работы. Это особенно проявляется в тех случаях, когда частотная передаточная функция может быть представлена в виде произведения сомножителей. Тогда результирующая л. а. х. может быть найдена суммированием ординат л. а. х., соответствующих отдельным сомножителям. Часто не требуется даже такого суммирования и результирующая л. а. х. может быть приближенно построена в виде так называемой асимптотической л. а. х., представляющей собой совокупность отрезков прямых линий с наклонами, кратными величине 20 *дб/дек*. Это будет показано ниже при рассмотрении конкретных звеньев.

Для иллюстрации простоты построения л. а. х. рассмотрим несколько важных примеров.

1. Пусть модуль частотной передаточной функции равен постоянному числу $A(\omega) = k_0$; тогда

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k_0.$$

Л. а. х. представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс (прямая 1 на рис. 4.40).

2. Рассмотрим случай, когда $A(\omega) = \frac{k_1}{\omega}$. Тогда

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k_1}{\omega} = 20 \lg k_1 - 20 \lg \omega.$$

Нетрудно видеть, что это — прямая линия, проходящая через точку с координатами $\omega = 1 \text{ сек}^{-1}$ и $L(\omega) = 20 \lg k_1$ и имеющая отрицательный наклон 20 дБ/дек , так как каждое удешагерение частоты вызывает увеличение $\lg \omega$ на одну единицу, т. е. уменьшение $L(\omega)$ на 20 дБ (прямая 2 на рис. 4.10). Наклон 20 дБ/дек приблизительно равен наклону 6 дБ/окт (точнее, $6,06 \text{ дБ/окт}$, так как $\lg 2 = 0,303$).

Точку пересечения прямой с осью нуля децибел (осью частот) можно найти, положив $L(\omega) = 0$ или, соответственно, $A(\omega) = 1$. Отсюда получаем так называемую частоту среза л. а. х., равную в данном случае $\omega_{\text{ср}} = k_1$. Очевидно, что размерность коэффициента k_1 должна быть $[\text{сек}^{-1}]$.

3. Аналогичным образом можно показать, что в случае $A(\omega) = \frac{k_2}{\omega^2}$ л. а. х. представляет собой прямую с отрицательным наклоном 40 дБ/дек (прямая 3 на рис. 4.10). Вообще для

$A(\omega) = \frac{k_n}{\omega^n}$ л. а. х. представляет собой прямую с отрицательным наклоном $n \cdot 20 \text{ дБ/дек}$ или $n \cdot 6 \text{ дБ/окт}$. Эта прямая может быть построена по одной какой-либо точке, например по точке $\omega = 1 \text{ сек}^{-1}$ и $L(\omega) = 20 \lg k_n$ или по частоте среза $\omega_{\text{ср}} = \sqrt[n]{k_n}$. Очевидно, что размерность коэффициента k_n должна быть $[\text{сек}^{-n}]$.

4. Рассмотрим случай, когда $A(\omega) = k_3 \omega$. Тогда

$$L(\omega) = 20 \lg k_3 \omega = 20 \lg k_3 + 20 \lg \omega.$$

Нетрудно видеть, что это — прямая линия, проходящая через точку $\omega = 1 \text{ сек}^{-1}$ и $L(\omega) = 20 \lg k_3$ и имеющая положительный наклон 20 дБ/дек . Эта прямая может быть построена также по частоте среза $\omega_{\text{ср}} = \frac{1}{k_3}$, полученной приравниванием $A(\omega) = 1$ (прямая 4 на рис. 4.10).

Аналогичным образом можно показать, что в случае, когда $A(\omega) = k_m \omega^m$, л. а. х. представляет собой прямую линию с положительным наклоном $m \cdot 20 \text{ дБ/дек} = m \cdot 6 \text{ дБ/окт}$. Эта прямая также может быть построена по одной какой-либо точке, например по точке $\omega = 1 \text{ сек}^{-1}$ и $L(\omega) = 20 \lg k_m$ или по частоте среза $\omega_{\text{ср}} = \sqrt[m]{k_m}$.

Иногда при расчете автоматических систем употребляются *логарифмические амплитудно-фазовые характеристики* (л. а. ф. х.). В соответствии с выражением (4.18) они строятся в координатах «модуль в децибелах — фаза» (рис. 4.12) или «модуль в децибелах — запас по фазе». Под запасом по фазе понимается величина

$$\mu = 180^\circ + \psi.$$

$$(4.20)$$

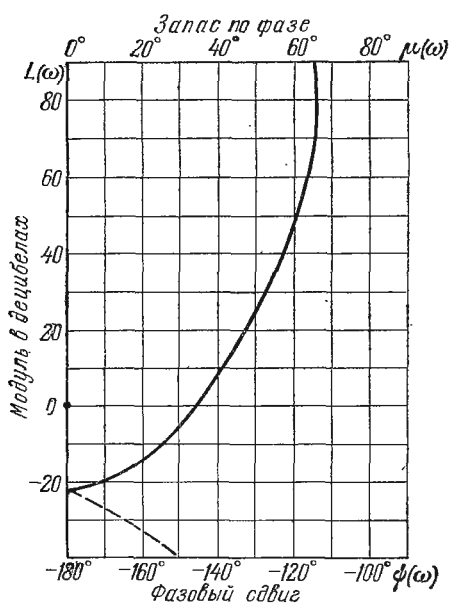


Рис. 4.12.

Эта величина также показана на рис. 4.12. Обычно пределы изменения фазы принимаются от 0 до -180° , что соответствует изменению запаса по фазе от 180° до 0. В том случае, если часть кривой не уместается на используемой сетке вследствие больших фазовых сдвигов ($|\psi| > 180^\circ$), строится «зеркальное» изображение л. а. ф. х., что показано на рис. 4.12 пунктиром.

На л. а. ф. х. для ориентировки могут наноситься точки, соответствующие определенным частотам. В этом случае около этих точек указывается частота в *рад/сек.*

§ 4.5. Позиционные звенья

Характеристики позиционных звеньев сведены в табл. 4.2 и 4.3, помещенные на стр. 78—81.

1. **Безынерционное звено.** Это звено не только в статике, но и в динамике описывается алгебраическим уравнением

$$x_2 = kx_1. \quad (4.21)$$

Передаточная функция звена равна постоянной величине:

$$W(p) = W(j\omega) = k. \quad (4.22)$$

Примером такого звена являются механический редуктор (без учета явления скручивания и люфта), безынерционной (широкополосный) усилитель, делитель напряжения и т. п. Многие датчики сигналов, как, например, пьезоэлектрические датчики, индукционные датчики, вращающиеся трансформаторы и т. п., также могут рассматриваться как безынерционные звенья.

Переходная функция такого звена представляет собой ступенчатую функцию (табл. 4.2), т. е. при $x_1(t) = 1(t)$ $x_2(t) = h(t) = k \cdot 1(t)$. Функция веса представляет собой импульсную функцию, площадь которой равна k , т. е. при $x(t) = \delta(t)$ $x_2(t) = w(t) = k\delta(t)$.

А. ф. х. вырождается в точку, расположенную на вещественной оси на расстоянии k от начала координат (табл. 4.3). Модуль частотной передаточной функции $A(\omega) = k$ постоянен на всех частотах, а фазовые сдвиги равны нулю ($\psi = 0$).

Безынерционное звено является некоторой идеализацией реальных звеньев. В действительности ни одно звено не в состоянии равномерно пропускать все частоты от 0 до ∞ . Обычно к такому виду звена сводится одно из реальных звеньев, рассматриваемых ниже, например аperiodическое или колебательное, если можно пренебречь влиянием динамических (переходных) процессов в этом звене.

2. **Аperiodическое звено первого порядка.** Звено описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = kx_1. \quad (4.23)$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{k}{1 + Tp}. \quad (4.24)$$

Примеры аperiodических звеньев первого порядка изображены на рис. 4.13.

В качестве первого примера (рис. 4.13, а) рассматривается двигатель любого типа (электрический, гидравлический, пневматический и т. д.), механические характеристики которого (зависимость вращающего момента от скорости) могут быть представлены в виде параллельных прямых (рис. 4.14). Входной величиной x_1 здесь является управляющее воздействие в двигателе, например подводимое напряжение в электрическом двигателе,

расход жидкости в гидравлическом двигателе и т. п. Выходной величиной является скорость вращения Ω . Дифференциальное уравнение движения при равенстве нулю момента нагрузки может быть представлено в виде

$$J \frac{d\Omega}{dt} = k_M x_1 - \frac{M_0}{\Omega_0} \Omega = k_M x_1 - k_1 \Omega,$$

где J — приведенный к валу двигателя суммарный момент инерции, k_M — коэффициент пропорциональности между управляющим воздействием x_1

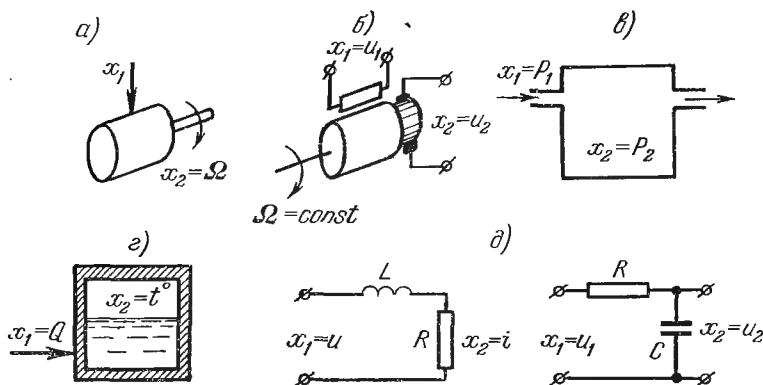


Рис. 4.13.

и вращающим моментом, $k_1 = \frac{M_0}{\Omega_0}$ — наклон механической характеристики, равный отношению пускового момента к скорости холостого хода при некотором значении управляющего воздействия.

Это уравнение приводится к виду

$$T \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = k x_1,$$

где $k = \frac{k_M}{k_1}$ — коэффициент передачи звена, $T = J \frac{\Omega_0}{M_0} = \frac{J}{k_1}$ — постоянная времени двигателя. Оно полностью совпадает с (4.23).

В качестве второго примера (рис. 4.13, б) приведен электрический генератор постоянного тока, входной величиной которого является напряжение, подводимое к обмотке возбуждения u_1 , а выходной — напряжение якоря u_2 .

Апериодическими звеньями первого порядка являются также резервуар с газом (рис. 4.13, в), у которого входная величина представляет собой давление P_1 перед впускным отверстием, а выходная — давление P_2 в резервуаре, и нагревательная печь (рис. 4.13, г), у которой входная величина — количество поступающего в единицу времени тепла Q , а выходная — температура в печи t° .

Электрические RC- и LR-цепи в соответствии со схемами, изображенными на рис. 4.13, д, также представляют собой апериодические звенья первого порядка.

Во всех приведенных примерах дифференциальное уравнение движения совпадает с (4.23).

Переходная функция представляет собой экспоненту (табл. 4.2). Множитель $1(t)$ указывает, что экспонента рассматривается, начиная с момента

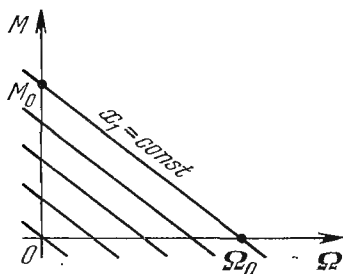


Рис. 4.14.

$t = 0$, т. е. для положительного времени. Во многих случаях этот множитель опускается, но указанное обстоятельство необходимо иметь в виду.

Отрезок, отсекаемый на асимптоте касательной, проведенной к кривой в любой точке, равен постоянной времени T . Чем больше постоянная времени звена, тем дольше длится переходный процесс, т. е. медленнее устанавливается значение $x_2 = kx_1$ на выходе звена. Строго говоря, экспонента приближается к этому значению асимптотически, т. е. в бесконечности. Практически переходный процесс считается закончившимся через промежуток времени $t_{\text{п}} = 3T$. Иногда принимают $t_{\text{п}} = (4 \div 5) T$.

Постоянная времени характеризует «инерционность», или «инерционное запаздывание», аperiodического звена. Выходное значение $x_2 = kx_1$ в аperiodическом звене устанавливается только спустя некоторое время ($t_{\text{п}}$) после подачи входного воздействия.

Функция веса $w(t)$ может быть найдена дифференцированием переходной функции $h(t)$, и она также приводится в табл. 4.2.

Частотные характеристики приведены в табл. 4.3. Амплитудно-фазовая характеристика для положительных частот имеет вид полуокружности с диаметром, равным коэффициенту передачи k . Величина постоянной времени звена определяет распределение отметок частоты ω вдоль кривой. На а. ф. х. показаны три характерные отметки ($\omega = 0$, $\omega = \frac{1}{T}$ и $\omega = \infty$). А. ф. х. для положительных частот может быть дополнена зеркальной полуокружностью для отрицательных частот (показана пунктиром). В результате полная а. ф. х. представляет собой окружность.

Из амплитудной характеристики видно, что колебания малых частот ($\omega < \frac{1}{T}$) «пропускаются» данным звеном с отношением амплитуд выходной и входной величин, близким к статическому коэффициенту передачи звена k . Колебания больших частот ($\omega > \frac{1}{T}$) проходят с сильным ослаблением амплитуды, т. е. «плохо пропускаются» или практически совсем «не пропускаются» звеном. Чем меньше постоянная времени T , т. е. чем меньше инерционность звена, тем более вытянута амплитудная характеристика $A(\omega)$ вдоль оси частот, или, как говорят, тем шире полоса пропускания частот $\Delta\omega_{\text{п}}$ у данного звена:

$$\Delta\omega_{\text{п}} = \frac{1}{T} - \left(-\frac{1}{T}\right) = \frac{2}{T}. \quad (4.25)$$

Логарифмические частотные характеристики приведены в табл. 4.3. Л. а. х. строится по выражению

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}. \quad (4.26)$$

Наиболее просто, практически без вычислительной работы, строится так называемая асимптотическая л. а. х. Ее построение показано на рис. 4.15. На стандартной сетке проводится вертикальная прямая через точку с частотой, называемой сопрягающей частотой $\omega = \frac{1}{T}$. Для частот меньших, чем сопрягающая, т. е. при $\omega < \frac{1}{T}$, можно пренебречь вторым слагаемым под корнем в выражении (4.26). Тогда левее сопрягающей частоты (рис. 4.15) можно заменить (4.26) приближенным выражением $L(\omega) \approx 20 \lg k$ (при $\omega < \frac{1}{T}$), которому соответствует прямая линия, параллельная оси частот (прямая ab) и являющаяся первой асимптотой.

Для частот больших, чем сопрягающая ($\omega > \frac{1}{T}$), в выражении (4.26) можно пренебречь под корнем единицей по сравнению с $\omega^2 T^2$. Тогда вместо (4.26) будем иметь приближенное значение

$$L(\omega) \approx 20 \lg \frac{k}{\omega T} \quad \left(\text{при } \omega > \frac{1}{T} \right),$$

которому соответствует, согласно § 4.4, прямая с отрицательным наклоном 20 дБ/дек (прямая bc), являющаяся второй асимптотой.

Ломаная линия abc и называется асимптотической л. а. х. Действительная л. а. х. (показана на рис. 4.15 пунктиром) будет несколько отличаться от асимптотической, причем наибольшее отклонение будет в точке b . Оно равно приблизительно 3 дБ, так как

$$A\left(\frac{1}{T}\right) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{2}} = 20 \lg k - 3,03 \text{ дБ},$$

что в линейном масштабе соответствует отклонению в $\sqrt{2}$ раз. На всем остальном протяжении влево и вправо от сопрягающей частоты действительная л. а. х. будет отличаться от асимптотической менее чем на 3 дБ. Поэтому во многих практических расчетах достаточно ограничиться построением асимптотической л. а. х.

На том же рис. 4.15 показана логарифмическая фазовая характеристика.

Характерными ее особенностями являются сдвиг по фазе $\psi = -45^\circ$ при сопрягающей частоте (так как $\text{arctg } \omega T = \text{arctg } 1 = 45^\circ$) и симметрия л. ф. х. относительно сопрягающей частоты.

3. Аperiodическое звено второго порядка. Дифференциальное уравнение звена имеет вид

$$T_2^2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + T_1 \frac{dx_2}{dt} + x_2 = kx_1. \quad (4.27)$$

При этом корни характеристического уравнения $T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0$ должны быть вещественными, что будет выполняться при условии $T_1 \geq 2T_2$. В операторной записи уравнение (4.27) приобретает вид

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) x_2 = kx_1. \quad (4.28)$$

Левая часть последнего выражения разлагается на множители:

$$(T_3 p + 1)(T_4 p + 1) x_2 = kx_1, \quad (4.29)$$

где

$$T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}.$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{k}{(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)}. \quad (4.30)$$

Аperiodическое звено второго порядка эквивалентно двум аperiodическим звеньям первого порядка, включенным последовательно друг за другом, с общим коэффициентом передачи k и постоянными времени T_3 и T_4 .

Примеры аperiodических звеньев второго порядка приведены на рис. 4.16. Рассмотрим подробно случай двигателя постоянного тока (рис. 4.16, а). При отсутствии момента нагрузки на валу и при учете переход-

ных процессов в цепи якоря динамика двигателя описывается двумя уравнениями, определяющими равновесие э. д. с. в цепи якоря:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + C_E \Omega = u,$$

и равновесие моментов на валу двигателя:

$$C_M i - J \frac{d\Omega}{dt} = 0,$$

где u — напряжение, прикладываемое к якорю, C_E и C_M — коэффициенты пропорциональности между обратной э. д. с. и скоростью вращения Ω и между вращающим моментом и током якоря i , J — приведенный момент инерции, L и R — индуктивность и сопротивление цепи якоря.

Переходя в обоих уравнениях к операторной форме записи и решая их совместно, получим передаточную функцию двигателя постоянного тока

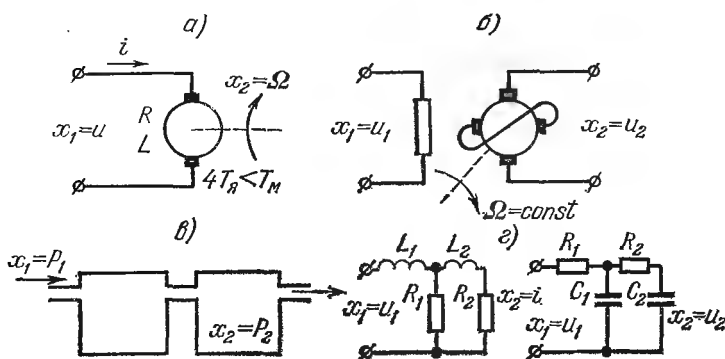


Рис. 4.16.

при управлении напряжением якоря как отношение изображений скорости двигателя и напряжения якоря:

$$W(p) = \frac{1}{C_E} \frac{1}{1 + T_M p + T_A T_M p^2}, \quad (4.31)$$

где $T_M = \frac{JR}{C_E C_M} = J \frac{\Omega_0}{M_0}$ — электромеханическая постоянная времени двигателя, $T_A = \frac{R}{L}$ — электромагнитная постоянная времени якорной цепи, Ω_0 и M_0 — скорость холостого хода и пусковой момент двигателя.

Для того чтобы корни знаменателя выражения (4.31) были вещественными и передаточную функцию можно было бы представить в форме (4.30), необходимо выполнение условия $4T_A \leq T_M$.

Переходная функция и функция веса звена приведены в табл. 4.2.

Частотные характеристики приведены в табл. 4.3. Построение асимптотической л. а. х. производится аналогично тому, как это было сделано для апериодического звена первого порядка. Вначале проводятся вспомогательные вертикальные линии через сопрягающие частоты $\omega = \frac{1}{T_3}$ и $\omega = \frac{1}{T_4}$.

Для определенности построения принято, что $T_3 > T_4$.

Л. а. х. строится по выражению

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T_3^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_4^2}}. \quad (4.32)$$

Левее первой сопрягающей частоты $\left(\omega < \frac{1}{T_3}\right)$ это выражение заменяется приближенным

$$L(\omega) \approx 20 \lg k,$$

которому соответствует прямая с нулевым наклоном (первая асимптота л. а. х.). Для частот $\frac{1}{T_3} < \omega < \frac{1}{T_4}$ выражение (4.32) заменяется приближенным

$$L(\omega) \approx 20 \lg \frac{k}{\omega T_3},$$

которому соответствует прямая с отрицательным наклоном 20 дб/дек (вторая асимптота). Для частот $\omega > \frac{1}{T_4}$ выражение (4.32) заменяется приближенным

$$L(\omega) \approx 20 \lg \frac{k}{\omega^2 T_3 T_4},$$

которому соответствует прямая с отрицательным наклоном 40 дб/дек (третья асимптота). Действительная л. а. х. показана в табл. 4.3 пунктиром. Она отличается от асимптотической в точках излома на 3 дб.

4. Колебательное звено. Звено описывается тем же дифференциальным уравнением (4.27), что и апериодическое звено второго порядка. Однако корни характеристического уравнения $T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0$ должны быть комплексными, что будет выполняться при $T_1 < 2T_2$.

Левая часть дифференциального уравнения обычно представляется в виде

$$(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1) x_2 = k x_1, \quad (4.33)$$

или

$$\left(\frac{p^2}{q^2} + \frac{2\xi p}{q} + 1\right) x_2 = k x_1, \quad (4.34)$$

где $q = \frac{1}{T}$ — угловая частота свободных колебаний (при отсутствии затухания), а ξ — параметр затухания, лежащий в пределах $0 < \xi < 1$.

Передаточная функция колебательного звена

$$W(p) = \frac{k}{1 + 2\xi T p + T^2 p^2} = \frac{k}{1 + \frac{2\xi p}{q} + \frac{p^2}{q^2}}. \quad (4.35)$$

Примеры колебательных звеньев приведены на рис. 4.17. К ним относятся колебательные RLC -цепи (рис. 4.17, а), управляемые двигатели постоянного тока при выполнении условия $4T_{\text{я}} > T_{\text{м}}$ (рис. 4.17, б), упругие механические передачи, например для передачи вращательного движения (рис. 4.17, в), с упругостью C , моментом инерции J и коэффициентом скоростного трения S , гироскопические элементы (рис. 4.17, г) и др.

Рассмотрим для иллюстрации гироскопический элемент (рис. 4.17, г). В качестве входной величины примем момент M , прикладываемый к оси α , а в качестве выходной — угол поворота этой же оси α .

Уравнение равновесия моментов на оси

$$A \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + F \frac{d\alpha}{dt} - H \frac{d\beta}{dt} = M.$$

Будем считать, что на оси β (оси прецессии) не действуют никакие внешние моменты. Тогда для этой оси уравнение равновесия моментов запишется так:

$$B \frac{d^2 \beta}{dt^2} + H \frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

В этих формулах A и B — моменты инерции по осям α и β , H — кинетический момент гироскопа, равный его полярному моменту инерции J , умноженному на угловую скорость вращения Ω , и F — коэффициент скоростного сопротивления на оси α .

Переходя к операторным выражениям и решая оба уравнения совместно, получаем:

$$\left(\frac{AB}{H^2} p^2 + \frac{FB}{H^2} p + 1 \right) \alpha = \frac{B}{H^2} M.$$

Это уравнение можно переписать следующим образом:

$$\left(\frac{p^2}{q^2} + \frac{2\zeta}{q} p + 1 \right) \alpha = \frac{B}{H^2} M,$$

где $q^2 = \frac{H^2}{AB}$ — квадрат угловой частоты нутационных колебаний, а $\zeta = \frac{1}{2} \frac{F}{H} \sqrt{\frac{B}{A}}$ — параметр затухания, определяемый действием сил скоростного трения на оси α . Это уравнение совпадает с выражением (4.34). Для

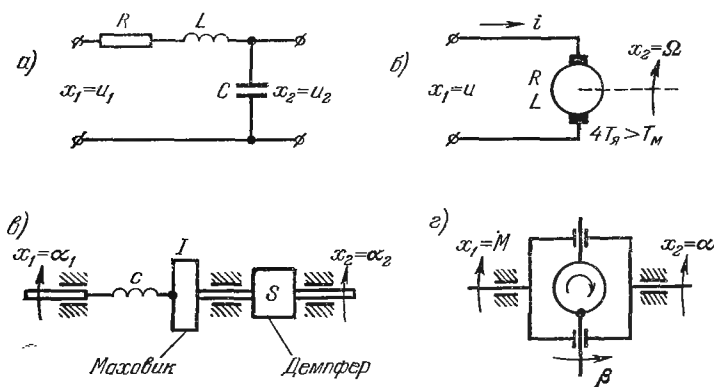


Рис. 4.17.

решения дифференциального уравнения (4.33) или (4.34) необходимо найти корни характеристического уравнения

$$T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1 = \frac{p^2}{q^2} + \frac{2\zeta p}{q} + 1 = 0.$$

Решение дает

$$p_{1,2} = -\gamma \pm j\lambda = -\frac{\zeta}{T} \pm j \frac{1}{T} \sqrt{1 - \zeta^2} = -\zeta q \pm j q \sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (4.36)$$

Вещественная часть корня γ представляет собой коэффициент затухания переходного процесса, а λ — частоту затухающих колебаний.

Временные характеристики звена приведены в табл. 4.2, а частотные характеристики — в табл. 4.3.

Амплитудная частотная характеристика может иметь резонансный пик. Исследование модуля частотной передаточной функции на максимум показывает, что пик будет существовать при $\zeta < 0,707$. Высота пика будет тем больше, чем меньше параметр затухания:

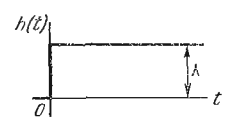
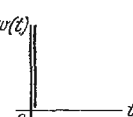
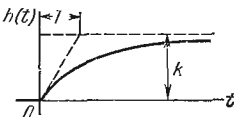
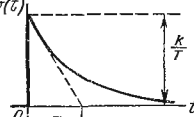
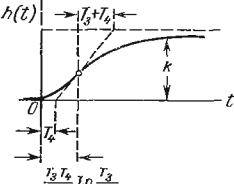
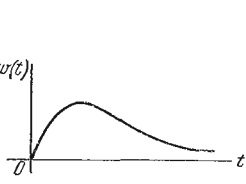
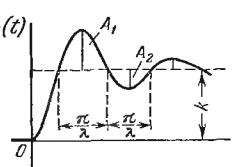
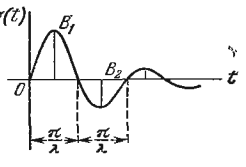
$$A(\omega_m) = \frac{k}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (4.37)$$

Максимуму а. ч. х. соответствует частота

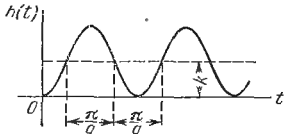
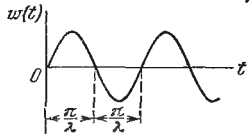
$$\omega_m = q \sqrt{1 - 2\zeta^2}. \quad (4.38)$$

Таблица 4.2

Временные характеристики позиционных звеньев

Тип звена и его передаточная функция	Переходная функция $h(t)$	Функция веса $w(t)$
Безынерционное $W(p) = k$	 $h(t) = k \cdot 1(t)$	 $w(t) = k \cdot \delta(t)$
Апериодическое 1-го порядка $W(p) = \frac{k}{1+Tp}$	 $h(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot 1(t)$	 $w(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$
Апериодическое 2-го порядка $W(p) = \frac{k}{1+T_1p+T_2p^2} = \frac{k}{(1+T_3p)(1+T_4p)}$ $T_{3,4} = \frac{T_1 \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}}{2}$ $(T_1 > 2T_2; T_3 > T_4)$	 $h(t) = k \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}}\right) \cdot 1(t)$	 $w(t) = \frac{k}{T_3 - T_4} \left(e^{-\frac{t}{T_3}} - e^{-\frac{t}{T_4}}\right) \cdot 1(t)$
Колебательное $W(p) = \frac{k}{1+2\zeta Tp+T^2p^2} = \frac{k}{1+\frac{2\zeta}{q}p+\frac{p^2}{q^2}}$ $q = \frac{1}{T}$	 $\gamma = \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{A_1}{A_2}$ $\gamma = \zeta q, \quad \lambda = q \sqrt{1 - \zeta^2}$ $h(t) = k \left[1 - e^{-\gamma t} \left(\cos \lambda t + \frac{\gamma}{\lambda} \sin \lambda t\right)\right] \cdot 1(t)$	 $\gamma = \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{B_1}{B_2}, \quad q = \sqrt{\gamma^2 + \lambda^2}$ $\zeta = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \lambda^2}}$ $w(t) = \frac{kq^2}{\lambda} e^{-\gamma t} \sin \lambda t \cdot 1(t)$

Продолжение табл. 4.2

Тип звена и его передаточная функция	Переходная функция $h(t)$	Функция веса $w(t)$
Консервативное $W(p) = \frac{k}{1 + T^2 p^2} =$ $= \frac{k}{1 + \frac{p^2}{q^2}}, \quad q = \frac{1}{T}$	 $h(t) = k(1 - \cos qt) \cdot 1(t)$	 $w(t) = kq \sin qt \cdot 1(t)$

Л. а. х. строится по выражению

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{q^2}}}. \quad (4.39)$$

Однако построение л. а. х. не может быть сделано так просто, как это было для предыдущих звеньев. Для построения используются так называемые нормированные л. а. х. Постоянный множитель под знаком логарифма в выражении (4.39) может быть выделен в отдельное слагаемое:

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right)^2 + 2\zeta^2 \frac{\omega^2}{q^2}}}. \quad (4.40)$$

Построение первого слагаемого (4.40) не представляет никакого труда. Второе

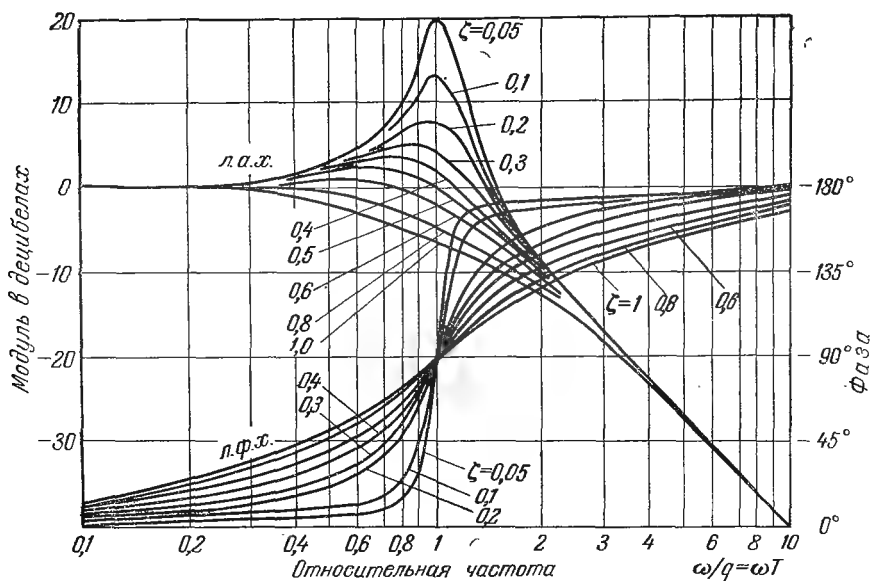
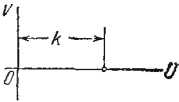
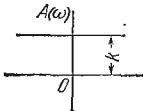
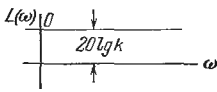
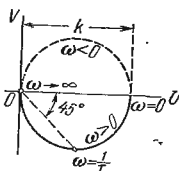
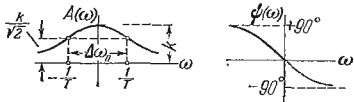
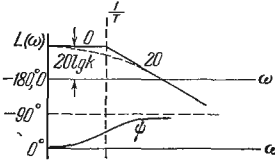
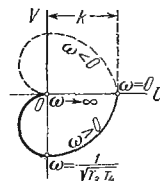
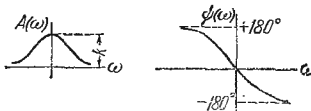
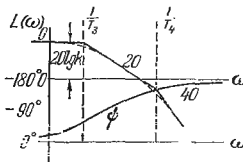
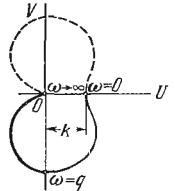
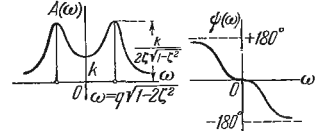
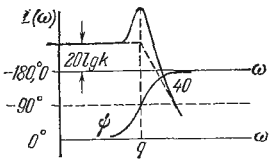
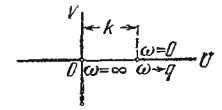
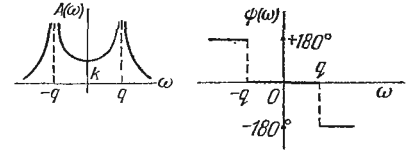
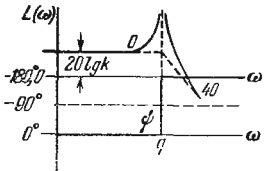


Рис. 4.18.

слагаемое может быть построено в функции относительной частоты $\frac{\omega}{q}$ для различных значений параметра затухания ζ в виде универсальных (нормированных) кривых (рис. 4.18). Для построения истинной л. а. х. необходимо

Частотные характеристики позиционных звеньев

Тип звена и частотная передаточная функция	Амплитудно-фазовая	Амплитудная и фазовая	Логарифмические
Безынерционное $W(j\omega) = k$		 $A(\omega) = k, \psi = 0$	
Аперiodическое 1-го порядка $W(j\omega) = \frac{k}{1+j\omega T}$		 $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}, \psi(\omega) = -\arctg \omega T$	
Аперiodическое 2-го порядка $W(j\omega) = \frac{k}{(1+j\omega T_3)(1+j\omega T_4)}$		 $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2 T_3^2} \sqrt{1+\omega^2 T_4^2}},$ $\psi(\omega) = -\arctg \omega T_3 - \arctg \omega T_4$	

Тип звена и частотная передаточная функция	Амплитудно-фазовая	Амплитудная и фазовая	Логарифмические
Колебательное $W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega 2\xi T - \omega^2 T^2} =$ $= \frac{k}{1 + j\frac{\omega 2\xi}{q} - \frac{\omega^2}{q^2}}$		 $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2}},$ $\psi(\omega) = -\arctg \frac{2\xi \omega T}{1 - \omega^2 T^2}$	
Консервативное $W(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2} = \frac{k}{1 - \frac{\omega^2}{q^2}}$		 $A(\omega) = \frac{k}{ 1 - \omega^2 T^2 },$ $\psi = 0 \text{ при } -q < \omega < q,$ $\psi = -180^\circ \text{ при } \omega > q,$ $\psi = +180^\circ \text{ при } \omega < -q.$	

выбрать нормированную л. а. х., соответствующую данному значению ζ , поднять ее параллельно самой себе на $20 \lg k$ и по оси частот от относительной частоты перейти к действительной умножением на q .

В функции той же относительной частоты на рис. 4.18 нанесены нормированные л. ф. х., построенные по выражению

$$\psi = -\operatorname{arctg} \frac{2\zeta \frac{\omega}{q}}{1 - \frac{\omega^2}{q^2}}. \quad (4.41)$$

Построение л. а. х. колебательного звена можно делать также посредством проведения двух асимптот с наклонами 0 и 40 дб/дек , пересекающихся в точке $\omega = \frac{1}{q}$, с последующим введением поправки, которая приведена на рис. 4.19.

Нормированные переходные характеристики колебательного звена для случая $k=1$ приведены на рис. 4.20 в функции относительного времени qt .

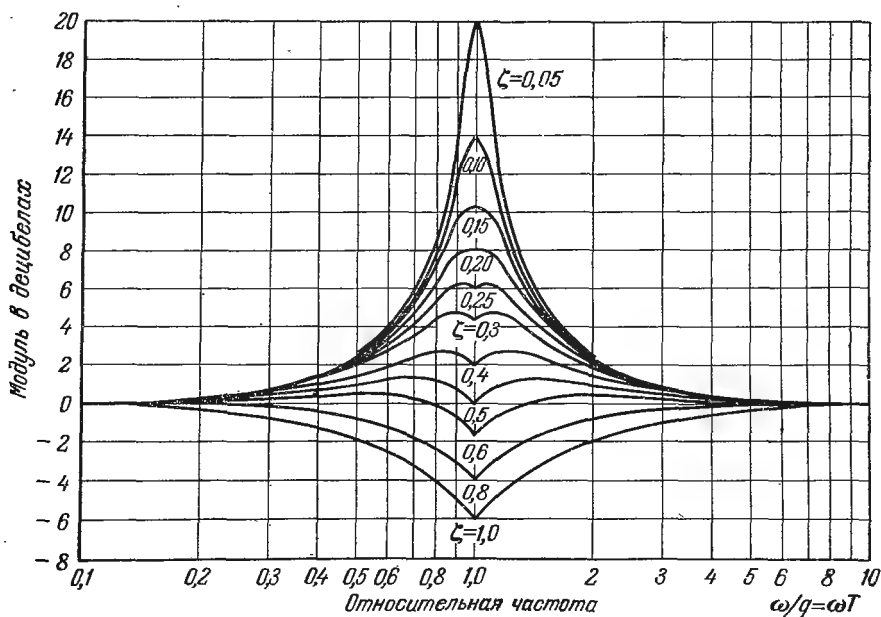


Рис. 4.19.

Сравнение рис. 4.18 и 4.20 показывает, что снижение параметра затухания ζ приводит к повышению колебательности переходного процесса и росту резонансного пика амплитудной частотной характеристики.

5. Консервативное звено. Консервативное звено является частным случаем колебательного при $\zeta = 0$. Тогда передаточная функция (4.35) будет иметь вид

$$W(p) = \frac{k}{1 + T^2 p^2} = \frac{k}{1 + \frac{p^2}{q^2}}. \quad (4.42)$$

Консервативное звено представляет собой идеализированный случай, когда можно пренебречь влиянием рассеяния энергии в звене. Для изображенных на рис. 4.17 примеров мы получим консервативные звенья, если

в случаях *a*) и *б*) положить $R = 0$, в случае *в*) положить $S = 0$ и в случае *г*) положить $F = 0$.

Временные характеристики соответствуют незатухающим колебаниям (табл. 4.2) с угловой частотой q .

Частотные характеристики приведены в табл. 4.3. При частоте $\omega = q$ модуль частотной передаточной функции обращается в бесконечность, а фаза делает скачок на 180° .

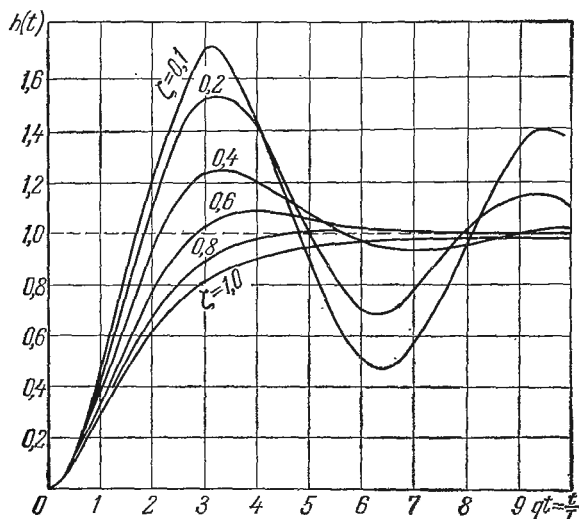


Рис. 4.20.

Амплитудно-фазовая характеристика совпадает с вещественной осью. При $0 < \omega < q$ характеристика совпадает с положительной полуосью, а при $\omega > q$ — с отрицательной полуосью.

§ 4.6. Интегрирующие звенья

1. Идеальное интегрирующее звено. Звено описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_2}{dt} = kx_1. \quad (4.43)$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{k}{p}. \quad (4.44)$$

Такое звено является идеализацией реальных интегрирующих звеньев, часть которых будет рассмотрена ниже. Примеры интегрирующих звеньев приведены на рис. 4.21. Часто в качестве такого звена используется операционный усилитель в режиме интегрирования (рис. 4.21, *a*). Интегрирующим звеном является также обычный гидравлический демпфер (рис. 4.21, *б*). Входной величиной здесь является сила F , действующая на поршень, а выходной — перемещение поршня x_2 . Так как скорость движения поршня пропорциональна приложенной силе (без учета инерционных сил):

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{F}{S},$$

где S — коэффициент скоростного сопротивления, то его перемещение будет пропорциональным интегралу от приложенной силы:

$$x = \int v dt = \frac{1}{S} \int F dt.$$

Часто в качестве интегрирующего звена используется интегрирующий привод (рис. 4.21, з). Это особенно удобно делать при необходимости

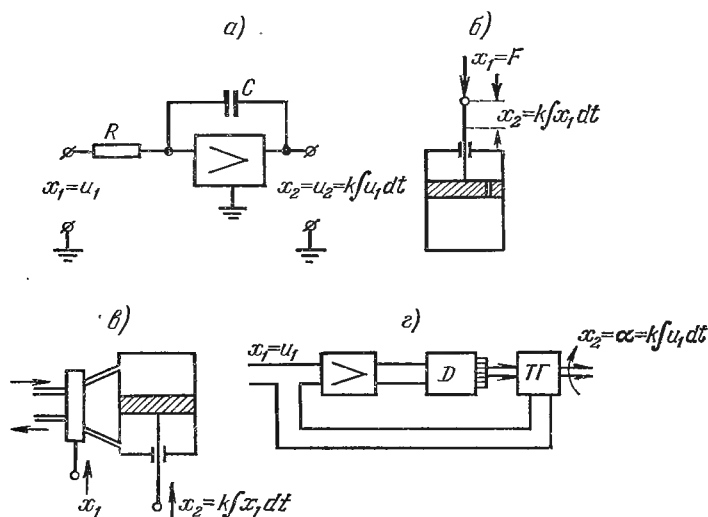


Рис. 4.21.

длительного интегрирования (часы, дни и даже месяцы), например в автоматических путепрокладчиках и навигационных системах.

Интегрирующим звеном является также гироскоп (рис. 4.17, з), если в качестве входной величины рассматривать момент M на оси α , а в качестве выходной — угол поворота оси прецессии β (в зоне линейности).

Из уравнений гироскопа, приведенных в предыдущем параграфе, можно получить:

$$\left(\frac{AB}{H^2} p^2 + \frac{FB}{H} p + 1 \right) p\beta = -\frac{M}{H},$$

откуда передаточная функция для угла прецессии

$$W(p) = -\frac{1}{Hp} \frac{1}{1 + \frac{FB}{H} p + \frac{AB}{H^2} p^2}.$$

В случае пренебрежения влиянием нутационных колебаний передаточная функция гироскопа будет равна

$$W(p) = -\frac{1}{Hp} = \frac{k}{p}.$$

Временные характеристики звена приведены в табл. 4.4, а частотные — в табл. 4.5.

Амплитудная частотная характеристика показывает, что звено пропускает сигнал тем сильнее, чем меньше его частота. При $\omega = 0$ модуль

частотной передаточной функции стремится к бесконечности, а при $\omega \rightarrow \infty$ $A(\infty) \rightarrow 0$.

Амплитудно-фазовая характеристика для положительных частот сливается с отрицательной частью мнимой оси.

Построение л.а.х. делается по выражению

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\omega}. \quad (4.45)$$

Л. а. х. представляет собой прямую с отрицательным наклоном 20 дб/дек , пересекающую ось нуля децибел при частоте среза $\omega_{\text{ср}} = k$. Л. ф. х. представляет собой прямую $\psi = -90^\circ$, параллельную оси частот.

2. Интегрирующее звено с замедлением. Звено описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{dx_2}{dt} = kx_1. \quad (4.46)$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{k}{p(1+Tp)}. \quad (4.47)$$

Примером такого звена является двигатель (рис. 4.13, а), если в качестве выходной величины рассматривать не угловую скорость, а угол поворота, являющийся интегралом от угловой скорости. К такому же типу звена сводятся демпфер (рис. 4.21, б), серводвигатель (рис. 4.21, в), интегрирующий привод (рис. 4.21, г), если более точно рассматривать их уравнения движения, и др.

Интегрирующее звено с замедлением можно представить как совокупность двух включенных последовательно звеньев — идеального интегрирующего и апериодического первого порядка.

Для нахождения временных характеристик удобно передаточную функцию представить в виде алгебраической суммы

$$W(p) = \frac{k}{p(1+Tp)} = \frac{k}{p} - \frac{kT}{1+Tp},$$

что позволяет представить решение дифференциального уравнения (4.46) в виде суммы решений для идеального интегрирующего звена и апериодического звена первого порядка.

Временные характеристики приведены в табл. 4.4, а частотные — в табл. 4.5.

Л. а. х. строится по выражению

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\omega \sqrt{1+\omega^2 T^2}}. \quad (4.48)$$

Асимптотическая л. а. х. представляет собой две прямые с отрицательными наклонами 20 дб/дек (при $\omega < \frac{1}{T}$) и 40 дб/дек (при $\omega > \frac{1}{T}$).

3. Изодромное звено. Звено описывается уравнением

$$\frac{dx_2}{dt} = kx_1 + k_1 \frac{dx_1}{dt}. \quad (4.49)$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{k}{p} + k_1 = \frac{k(1+Tp)}{p}, \quad (4.50)$$

где $T = \frac{k_1}{k}$ — постоянная времени изодромного звена.

Из этих выражений видно, что звено можно условно представить в виде совокупности двух звеньев, действующих параллельно, — идеального интегрирующего с коэффициентом передачи k и безынерционного с коэффициентом передачи k_1 .

Примеры изодромных звеньев изображены на рис. 4.22. Таким звеном может быть комбинация пружины с демпфером (рис. 4.22, б). В качестве

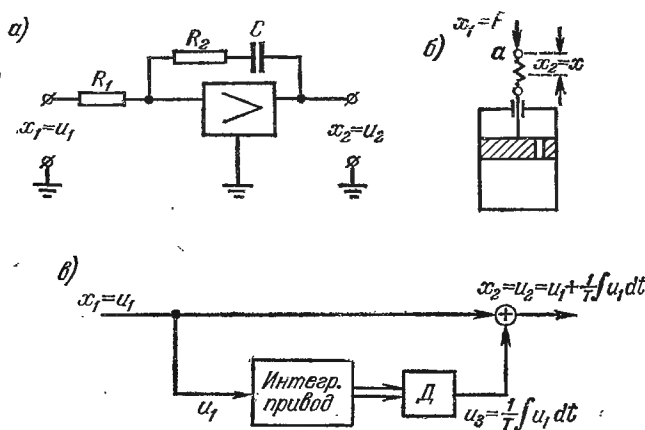


Рис. 4.22.

входной величины здесь рассматривается прикладываемая сила F , а в качестве выходной — перемещение x точки a , в которой приложена сила. Это перемещение складывается из деформации пружины

$$\frac{F}{c},$$

где c — жесткость пружины, и перемещения поршня

$$\frac{1}{S} \int F dt$$

где S — коэффициент скоростного сопротивления демпфера.

Результирующее перемещение точки

$$x = \frac{F}{c} + \frac{1}{S} \int F dt.$$

При использовании операционного усилителя (рис. 4.22, а) изодромное звено может быть получено посредством применения RC -цепи в обратной связи.

В системах управления часто находят применение изодромные звенья, построенные на базе интегрирующего привода (рис. 4.22, в). В этом случае входное напряжение u_1 поступает непосредственно на выход. Кроме того, это же напряжение поступает на вход интегрирующего привода. Угол поворота валика последнего, в соответствии с изложенным выше, пропорционален интегралу от входного напряжения u_1 . На выходном валике устанавливается какой-либо датчик (D) представляющий собой линейный преобразователь угла поворота в напряжение, например потенциометр или линейный вращающийся трансформатор. Напряжение этого преобразователя u_3

суммируется с напряжением u_1 . Эта сумма и представляет собой выходное напряжение u_2 .

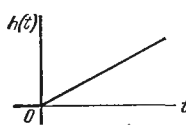
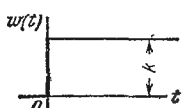
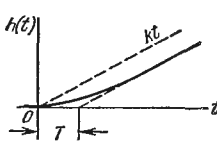
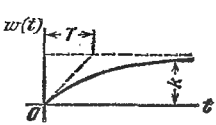
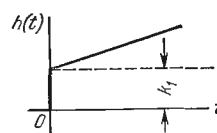
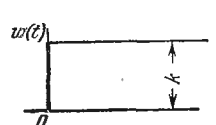
Таким образом, для схемы, изображенной на рис. 4.22, δ ,

$$U_2(p) = \left(1 + \frac{1}{Tp}\right) U_1(p) = \frac{1+Tp}{Tp} U_1(p),$$

где T — коэффициент пропорциональности между скоростью изменения выходного напряжения датчика интегрирующего привода и напряжением

Таблица 4.4

Временные характеристики интегрирующих звеньев

Тип звена и передаточная функция	Переходная функция	Функция веса
Идеальное $W(p) = \frac{k}{p}$	 $h(t) = kt \cdot 1(t)$	 $w(t) = k \cdot 1(t)$
С замедлением $W(p) = \frac{k}{p(1+Tp)}$	 $h(t) = k \left[t - T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right] \cdot 1(t)$	 $w(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \cdot 1(t)$
Изодромное $W(p) = \frac{k}{p} + k_1 = \frac{k(1+Tp)}{p},$ $T = \frac{k_1}{k}$	 $h(t) = (kt + k_1) \cdot 1(t)$	 $w(t) = k \cdot 1(t) + k_1 \delta(t)$

на его входе. Коэффициент передачи идеального интегрирующего звена в этом случае равен $k = \frac{1}{T}$.

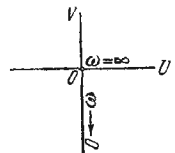
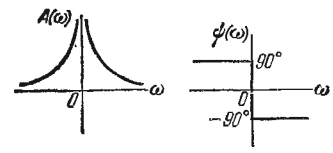
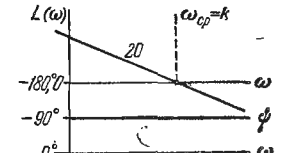
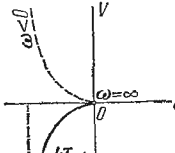
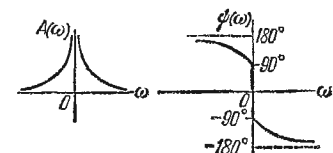
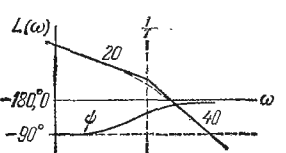
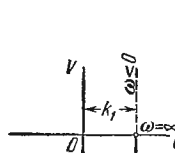
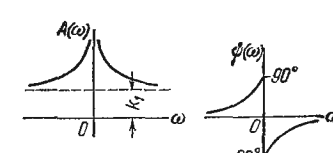
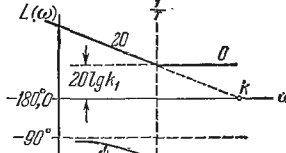
Временные характеристики звена представлены в табл. 4.4, а частотные — в табл. 4.5.

Л. а. х. строится по выражению

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k \sqrt{1 + \omega^2 T^2}}{\omega}.$$

Асимптотическая л. а. х. представляет собой две прямые: с отрицательным наклоном 20 дБ/дек (при $\omega < \frac{1}{T}$) и параллельную оси частот (при $\omega > \frac{1}{T}$).

Частотные характеристики интегрирующих звеньев

Тип звена и частотная передаточная функция	Амплитудно-фазовая	Амплитудная и фазовая	Логарифмические
Идеальное $W(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$			
Интегрирующее с замедлением $W(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+j\omega T)}$			
Изодромное $W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} + k_1 = \frac{k(1+j\omega T)}{j\omega}$ $T = \frac{k_1}{k}$			

Из рассмотрения л. а. х. и л. ф. х. видно, что в области малых частот (меньших, чем сопрягающая частота) звено ведет себя как идеальное интегрирующее и тем точнее, чем меньше частота.

В области больших частот (больших, чем сопрягающая частота) звено ведет себя как безынерционное с коэффициентом передачи k_1 .

Свойство звена вводить интегрирующее действие в области малых частот используется для улучшения качественных показателей систем автоматического регулирования (см. главу 9).

§ 4.7. Дифференцирующие звенья

1. Идеальное дифференцирующее звено. Звено описывается уравнением

$$x_2 = k \frac{dx_1}{dt}. \quad (4.51)$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = kp. \quad (4.52)$$

Примеры идеальных дифференцирующих звеньев изображены на рис. 4.23. Единственным идеальным дифференцирующим звеном, которое точно описывается уравнением (4.51), является тахогенератор постоянного тока (рис. 4.23, а), если в качестве входной величины рассматривать угол поворота его ротора α , а в качестве выходной — э. д. с. якоря e . В тахогенераторе постоянного тока при неизменном потоке возбуждения э. д. с. в якоре пропорциональна скорости вращения: $e = k\Omega$. Скорость вращения есть производная по времени от угла поворота: $\Omega = \frac{d\alpha}{dt}$. Следовательно, $e = k \frac{d\alpha}{dt}$. В режиме, близком к холостому ходу (сопротивление нагрузки велико), можно считать, что напряжение якоря равно э. д. с.: $u = e$. Тогда $u = k \frac{d\alpha}{dt}$.

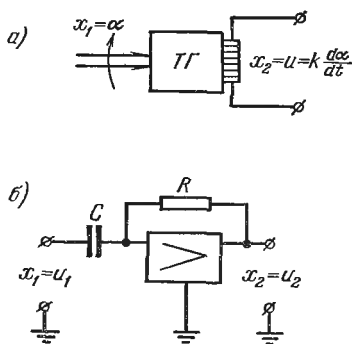


Рис. 4.23.

Приближенно в качестве идеального дифференцирующего звена может рассматриваться операционный усилитель в режиме дифференцирования (рис. 4.23, б).

Временные характеристики приведены в табл. 4.6, а частотные — в табл. 4.7.

2. Дифференцирующее звено с замедлением. Звено описывается уравнением

$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k \frac{dx_1}{dt}. \quad (4.53)$$

Передаточная функция звена

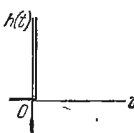
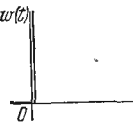
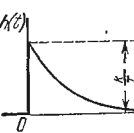
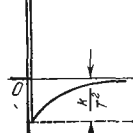
$$W(p) = \frac{kp}{1 + Tp}. \quad (4.54)$$

Звено условно можно представить в виде двух включенных последовательно звеньев — идеального дифференцирующего и аperiodического первого порядка.

На рис. 4.24 изображены примеры дифференцирующих звеньев с замедлением. Наиболее часто употребляются электрические цепи (рис. 4.24, а, б

Таблица 4.6

Временные характеристики дифференцирующих звеньев

Тип звена и его передаточная функция	Переходная функция	Функция веса
Идеальное дифференцирующее $W(p) = kp$	 $h(t) = k\delta(t)$	 $w(t) = k\delta(t) = k \frac{d\delta(t)}{dt}$
Дифференцирующее с замедлением $W(p) = \frac{kp}{1+Tp}$	 $h(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$	 $w(t) = \frac{k}{T} \delta(t) - \frac{k}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$

и е). В некоторых случаях используются дифференцирующие устройства, состоящие из гидравлического демпфера и пружины (рис. 4.24, з).

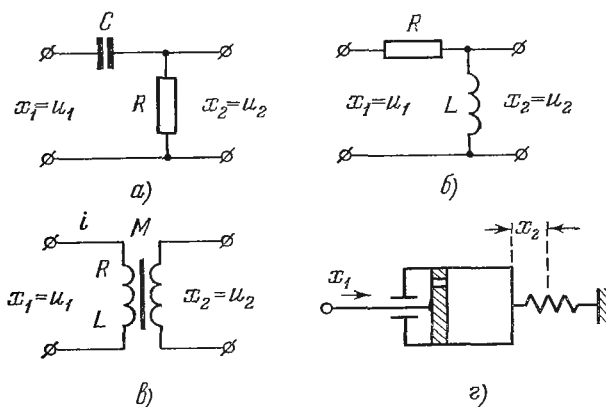


Рис. 4.24.

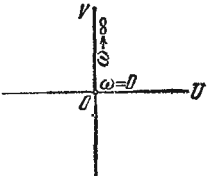
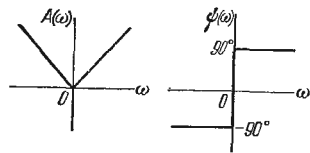
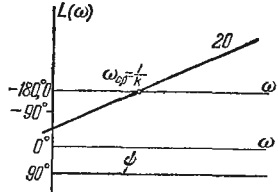
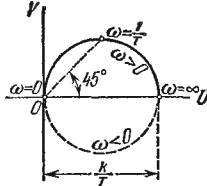
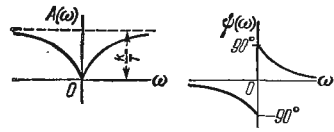
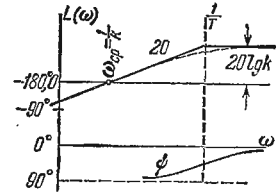
Составим, например, уравнение для дифференцирующего конденсатора (рис. 4.24, а). Ток в рассматриваемой цепи определяется уравнением

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt = u_1.$$

Переходя к изображениям и решая это уравнение относительно тока, получаем:

$$I(p) = \frac{U_1(p)}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{pC}{1 + RCp} U_1(p)$$

Частотные характеристики дифференцирующих звеньев

Тип звена и его частотная передаточная функция	Амплитудно-фазовая	Амплитудная и фазовая	Логарифмические
Идеальное дифференцирующее $W(j\omega) = kj\omega$			
Дифференцирующее с замедлением $W(j\omega) = \frac{kj\omega}{1 + j\omega T}$			

Напряжение на выходе цепи

$$U_2(p) = RI(p) = \frac{T_p}{1+T_p} U_1(p),$$

где $T = RC$ — постоянная времени цепи.

Временные характеристики звена приведены в табл. 4.6, а частотные — в табл. 4.7.

Амплитудная частотная характеристика имеет иной вид, чем у идеального звена. Характеристики совпадают в области низких частот. В области высоких частот реальное звено пропускает сигнал хуже, чем идеальное звено. Коэффициент передачи стремится к значению $\frac{k}{T}$ при $\omega \rightarrow \infty$. Для звеньев, представляющих собой RC - или RL -цепь (рис. 4.24, а и б), $k = T$ и на высоких частотах коэффициент передачи стремится к единице.

Фазовые сдвиги, вносимые звеном, являются наибольшими при низких частотах. На высоких частотах фазовый сдвиг постепенно уменьшается, стремясь в пределе к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. Здесь также видно, что это звено ведет себя подобно идеальному только в области низких частот.

Л. а. х. строится по выражению

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k\omega}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}. \quad (4.55)$$

Асимптотическая л. а. х. может быть представлена в виде двух прямых. Одна из них имеет положительный наклон 20 дБ/дек (при $\omega < 1/T$), а вторая — параллельна оси частот (при $\omega > 1/T$).

§ 4.8. Неустойчивые и неминимально-фазовые звенья

Рассмотренные выше звенья позиционного типа относятся к *устойчивым* звеньям, или к звеньям с *самовыравниванием*. Под самовыравниванием понимается способность звена самопроизвольно приходить к новому установившемуся значению при ограниченном изменении входной величины или возмущающего воздействия. Термин *самовыравнивание* обычно применяется для звеньев, представляющих собой объекты регулирования.

Существуют звенья, у которых ограниченное изменение входной величины или возмущающего воздействия не вызывает прихода звена к новому установившемуся состоянию, а выходная величина имеет тенденцию неограниченного возрастания во времени. К таким звеньям относятся, например, звенья интегрирующего типа. Они были рассмотрены выше.

Существуют звенья, у которых этот процесс выражен еще заметнее. Это объясняется наличием положительных вещественных корней или комплексных корней с положительной вещественной частью в характеристическом уравнении (знаменателе передаточной функции, приравненном нулю), в результате чего звено будет относиться к категории *неустойчивых* звеньев. Вопрос устойчивости будет изложен подробно в главе 6. Рассмотрим в качестве примера звено, описываемое дифференциальным уравнением

$$T \frac{dx_2}{dt} - x_2 = kx_1, \quad (4.56)$$

которому соответствует передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{-1+Tp}. \quad (4.57)$$

Переходная функция такого звена представляет собой показательную функцию с положительным показателем степени:

$$h(t) = k(e^{\frac{t}{T}} - 1) \cdot 1(t). \quad (4.58)$$

Эта функция изображена на рис. 4.25.

Таким звеном может быть, например, двигатель любого типа (рис. 4.13, а) если его механическая характеристика, т. е. зависимость вращающего момента от скорости вращения $M = f(\Omega)$, имеет положительный наклон. На рис. 4.26 изображены разновидности механических характеристик двигателя. В случае, соответствующем кривой 1, двигатель представляет собой

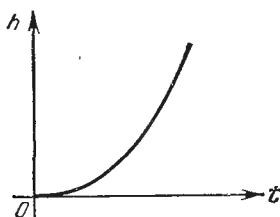


Рис. 4.25.

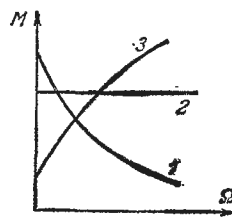


Рис. 4.26.

устойчивое апериодическое звено первого порядка, уравнения движения которого были рассмотрены в § 4.5. Это звено имеет положительное самовыравнивание.

В случае, соответствующем кривой 2, когда вращающий момент не зависит от скорости вращения, уравнение движения двигателя, записанное для угловой скорости, приобретает вид

$$J \frac{d\Omega}{dt} = k_m x_1,$$

где J — суммарный приведенный момент инерции на валу двигателя, k_m — коэффициент пропорциональности между управляющим воздействием x_1 и вращающим моментом. Здесь скорость двигателя связана с управляющим воздействием передаточной функцией, соответствующей интегрирующему звену

$$W(p) = \frac{k_m}{Jp} = \frac{k}{p}.$$

Это звено не имеет самовыравнивания. В случае, соответствующем кривой 3, дифференциальное уравнение движения будет

$$J \frac{d\Omega}{dt} = k_m x_1 + k_1 \Omega,$$

где k_1 — наклон механической характеристики в точке, где производится линеаризация.

Это уравнение приводится к следующему:

$$T \frac{d\Omega}{dt} - \Omega = k x_1,$$

где $T = J/k_1$ — постоянная времени двигателя. Оно совпадает с выражением (4.56). Звено имеет отрицательное самовыравнивание.

Признаком отрицательного самовыравнивания является отрицательный знак перед самой выходной величиной в левой части дифференциального уравнения (см., например, формулу (4.56)) или появление отрицательного знака у свободного члена знаменателя передаточной функции (см., например, формулу (4.57)).

Существенной особенностью неустойчивых звеньев является наличие больших по сравнению с устойчивыми звеньями фазовых сдвигов. Так, для рассматриваемого апериодического звена с отрицательным самовыравниванием (неустойчивого) частотная передаточная функция на основании (4.57)

будет равна

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - 1 + j\omega T^2} \quad (4.59)$$

Модуль ее не отличается от модуля частотной передаточной функции устойчивого апериодического звена (табл. 4.3):

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

Поэтому а. ч. х. и л. а. х. этих двух звеньев (устойчивого и неустойчивого) совпадают и по одной амплитудной характеристике нельзя определить, к какому звену она относится.

Фазовый сдвиг, соответствующий неустойчивому апериодическому звену,

$$\psi = -\arctg \frac{\omega T}{1 - 1} = -180^\circ + \arctg \omega T$$

имеет большие абсолютные значения по сравнению с фазовым сдвигом устойчивого апериодического звена первого порядка (табл. 4.3): $\psi = -\arctg \omega T$.

В связи с этим неустойчивые звенья относятся к группе так называемых *неминимально-фазовых* звеньев, поскольку минимальные по абсолютному значению фазовые сдвиги при одинаковых амплитудных характеристиках будут у устойчивых звеньев. К минимально-фазовым звеньям относятся также устойчивые звенья, имеющие в числителе передаточной функции (в правой части дифференциального уравнения) вещественные положительные корни или комплексные корни с положительной вещественной частью. Например звено с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1 - T_1 p}{1 + T_2 p}$$

относится к группе минимально-фазовых звеньев. Действительно, по сравнению со звеном, имеющим передаточную функцию

$$W(p) = \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p},$$

оно будет иметь большие по абсолютной величине фазовые сдвиги, так как $|\arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2| > |\arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2|$ при одинаковом виде амплитудной частотной характеристики.

Напомним, что к минимально-фазовым звеньям относятся такие, у которых корни числителя и знаменателя передаточной функции находятся в левой полуплоскости (см. § 4.3).

К неустойчивым звеньям, кроме рассмотренного выше звена, относятся также следующие звенья с соответствующими передаточными функциями: квазиконсервативное звено —

$$W(p) = \frac{k}{-1 + T^2 p^2} = \frac{k}{(-1 + T p)(1 + T p)}, \quad (4.60)$$

квазиколебательное звено —

$$W(p) = \frac{k}{-1 + 2\zeta T p + T^2 p^2}, \quad (4.61)$$

колебательное звено с отрицательным затуханием —

$$W(p) = \frac{k}{1 - 2\zeta T p + T^2 p^2}, \quad (4.62)$$

квазиколебательное звено с отрицательным затуханием—

$$W(p) = \frac{k}{-1 - 2\zeta Tp + T^2 p^2}, \quad (4.63)$$

неустойчивое интегрирующее звено —

$$W(p) = \frac{k}{p(-1 + Tp)}, \quad (4.64)$$

и ряд других звеньев.

Наличие в автоматической системе неустойчивых звеньев вызывает некоторые особенности расчета, которые будут рассмотрены ниже (см. главу 6).

§ 4.9. Звенья с модулированным сигналом

До сих пор рассматривались звенья, в которых сигнал был немодулированным. В автоматических системах часто используются звенья (чувствительные элементы, усилители, серводвигатели и т. п.), у которых сигнал представляет собой переменное напряжение (или ток) некоторой частоты ω_0 , называемой несущей. В этом случае закон изменения сигнала во времени характеризуется изменением амплитуды или действующего значения этого напряжения, т. е. огибающей. На рис. 4.27 для иллюстрации приведены формы немодулированного и модулированного сигналов. Изменению знака сигнала соответствует изменение фазы несущей частоты ω_0 на 180° .

При расчете автоматических систем с модулированным сигналом могут возникать две задачи:

1) нахождение такого звена, которое по своему воздействию на огибающую модулированного сигнала было бы эквивалентным какому-либо обычному звену, используемому в системах с немодулированным сигналом, например аperiодическому первого порядка, дифференцирующему, интегрирующему и т. п.;

2) определение воздействия звена с заданной передаточной функцией на огибающую модулированного сигнала, т. е. нахождение передаточной функции по огибающей.

Рассмотрим первую задачу. Ниже без строгих доказательств показывается путь, позволяющий сформулировать требования к частотной передаточной функции звена, чтобы его воздействие на огибающую сигнала было определенным и заранее заданным.

Для уяснения этого пути обратимся к какому-либо простейшему звену с немодулированным сигналом, например к аperiодическому звену первого порядка. Для определенности в качестве такого звена возьмем RC -цель (рис. 4.13, б). Передаточная функция этого звена

$$W(p) = \frac{1}{1 + Tp},$$

где $T = RC$.

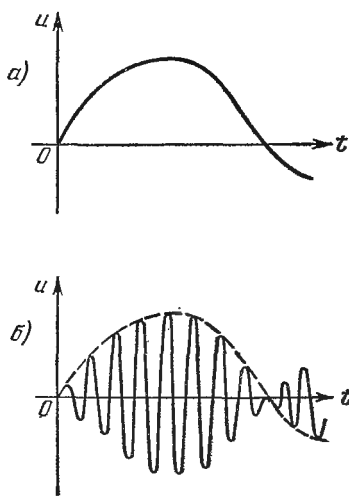


Рис. 4.27.

Представим себе, что динамические свойства рассматриваемого звена изучаются при помощи экспериментального снятия его амплитудной частотной характеристики. Для этой цели на вход RC -цепи нужно подавать напряжение от источника с переменной частотой, например от звукового генератора, и измерять отношение амплитуд выходного и входного напряжений. Характеристика снимается только для положительных частот, а затем дополняется симметричной ветвью в области отрицательных частот (рис. 4.28).

По отношению к амплитудной частотной характеристике можно применить следующий формальный прием. Входное напряжение при снятии частотной характеристики представляет собой гармоническую функцию с угловой частотой ω и амплитудой $U_{1 \max}$:

$$u_1 = U_{1 \max} \sin \omega t. \quad (4.65)$$

Используя понятие отрицательной частоты, можно представить эту функцию в виде алгебраической суммы сигнала положительной частоты и сигнала отрицательной частоты:

$$u_1 = \frac{U_{1 \max}}{2} [\sin \omega t - \sin (-\omega) t]. \quad (4.66)$$

Эти сигналы называются боковыми частотами. Название произошло по следующей причине. Если на вход звена поступает постоянный по величине сигнал, то его можно представить как сигнал

нулевой частоты. В этом случае коэффициент передачи звена равен ординате пересечения амплитудной характеристикой оси ординат. В рассматриваемой RC -цепи этот коэффициент равен единице, т. е. $k = 1$.

Если теперь на вход звена подать сигнал, представляющий собой гармоническую функцию, то реакцию звена на такой сигнал можно получить, рассматривая реакцию звена на две частоты, расположенные симметрично относительно исходной нулевой частоты. Эти две частоты и являются боковыми по отношению к исходной частоте.

При наличии амплитудной частотной характеристики (рис. 4.28) постоянная времени звена может быть определена по эффекту подавления боковых частот по сравнению с исходной нулевой частотой. Из выражения для амплитудной частотной характеристики аperiodического звена первого порядка (см. табл. 4.3) в общем случае, когда $k \neq 1$,

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

следует, что на нулевой частоте коэффициент передачи звена по амплитуде равен k , а при $\omega = \frac{1}{T}$ этот коэффициент равен

$$A\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{k}{\sqrt{1+1}} = \frac{k}{\sqrt{2}} = 0,707k.$$

На основании этого соотношения по амплитудной характеристике можно легко найти постоянную времени. Для этой цели на высоте $0,707k$ проводится горизонтальная линия до пересечения с амплитудной характеристикой. Абсциссы точек пересечения будут равны $\frac{1}{T}$ в области положительных частот и $-\frac{1}{T}$ в области отрицательных частот.

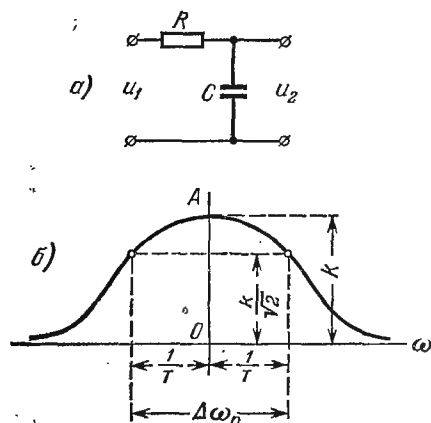


Рис. 4.28.

Расстояние между точками пересечения часто называют полосой пропускания звена (4.25):

$$\Delta\omega_{\Pi} = \frac{2}{T}.$$

Постоянная времени может быть вычислена по полосе пропускания:

$$T = \frac{2}{\Delta\omega_{\Pi}}. \quad (4.67)$$

Обратимся теперь к звену с модулированным сигналом. Предположим, что динамические свойства некоторого звена изучаются при помощи частотных характеристик (рис. 4.29). Постоянному сигналу на входе такого звена соответствует напряжение

$$u_1 = U_{1 \max} \cos \omega_0 t, \quad (4.68)$$

где ω_0 — несущая угловая частота.

Допустим теперь, что сигнал (огibaющая) изменяется по гармоническому закону с угловой частотой Ω . Это значит, что по гармоническому закону должна изменяться амплитуда в выражении (4.68), и модулированный сигнал может быть представлен виде

$$u_1 = U(t) \cos \omega_0 t = U_{1 \max} \sin \Omega t \cos \omega_0 t, \quad (4.69)$$

где $U(t) = U_{1 \max} \sin \Omega t$ — гармонический закон изменения огibaющей (сигнала).

Это выражение может быть преобразовано к виду

$$u_1 = \frac{U_{1 \max}}{2} [\sin(\omega_0 + \Omega)t - \sin(\omega_0 - \Omega)t]. \quad (4.70)$$

Таким образом, модулированный сигнал (4.69) может быть заменен двумя гармоническими сигналами с частотами, равными сумме и разности несущей частоты и частоты огibaющей: $\omega_1 = \omega_0 + \Omega$ и $\omega_2 = \omega_0 - \Omega$. Эти гармонические сигналы являются боковыми частотами.

Выясним теперь, какой должна быть амплитудная частотная характеристика звена, чтобы по отношению к модулированному сигналу звено представляло собой, например, апериодическое звено первого порядка. Очевидно, что характеристика должна быть такой же самой, как характеристика апериодического звена с немодулированным сигналом, но она должна быть симметричной относительно несущей частоты ω_0 (рис. 4.29). Тогда боковые частоты будут подавляться рассматриваемым звеном так же, как они подавляются звеном с немодулированным сигналом (рис. 4.28).

Постоянную времени звена с модулированным сигналом, если оно представляет собой для огibaющей апериодическое звено первого порядка, можно определить по той частоте огibaющей, при которой боковые частоты подавляются в $\sqrt{2}$ раз.

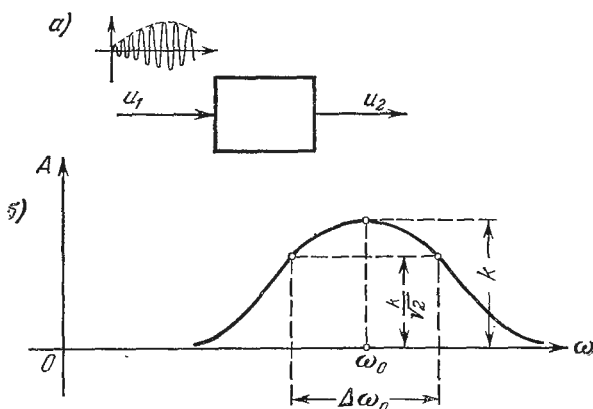


Рис. 4.29.

Для этого, аналогично предыдущему, на амплитудной частотной характеристике звена (рис. 4.29) должно быть сделано следующее построение. Необходимо определить коэффициент передачи звена k на несущей частоте, что соответствует постоянному входному сигналу (4.68) или частоте огибающей $\Omega = 0$. Затем на высоте $0,707k$ проводится горизонтальная прямая до пересечения с частотной характеристикой и определяется полоса пропускания $\Delta\omega_n$. Постоянная времени определяется на основании (4.67) и равна $T = \frac{2}{\Delta\omega_n}$.

Рассмотренная выше методика позволяет сформулировать правило, устанавливающее требования к амплитудной частотной характеристике звена с модулированным сигналом для того, чтобы его воздействие на огибающую было таким же, каким является воздействие обычного звена заданного типа на немодулированный сигнал. Это правило сводится к следующему. Амплитудная частотная характеристика звена с модулированным сигналом должна быть такой же, как амплитудная частотная характеристика звена с немодулированным сигналом, но эта характеристика должна быть симметричной не относительно оси ординат, а относительно несущей частоты. Звено с немодулированным сигналом может рассматриваться при этом как частный случай звена с модулированным сигналом при несущей частоте $\omega_0 = 0$.

Для того чтобы избежать ошибок в связи с наличием неминимально-фазовых звеньев, сформулированное выше правило для амплитудных характеристик должно быть дополнено аналогичным правилом для фазовых частотных характеристик. Если известно, что все рассматриваемые звенья относятся к категории минимально-фазовых звеньев, то привлечение фазовых характеристик не является необходимым и можно ограничиться использованием только амплитудных характеристик.

Таким образом, в общем случае, если обозначить эквивалентную частотную передаточную функцию по огибающей $W_s(j\Omega)$, то для частотной передаточной функции звена с модулированным сигналом $W(j\omega)$ должно выполняться условие

$$W(j\omega) = W_s(j\Omega) |_{\Omega=\omega-\omega_0} = W_s[j(\omega - \omega_0)]. \quad (4.71)$$

Так, например, если необходимо, чтобы по своему действию на огибающую модулированного сигнала звено соответствовало апериодическому звену первого порядка с эквивалентной частотной передаточной функцией

$$W_s(j\Omega) = \frac{k}{1 + j\Omega T},$$

то оно должно иметь частотную передаточную функцию

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j(\omega - \omega_0)T}.$$

Приблизительно такую передаточную функцию имеют, в частности, резонансные усилители, настроенные на несущую частоту ω_0 , причем постоянная времени T определяется полосой пропускания усилителя в соответствии с (4.67).

Проиллюстрируем применение изложенного правила на другом примере. Возьмем рассмотренную ранее дифференцирующую RC-цепь (рис. 4.24, а). Эта цепь годится для дифференцирования немодулированного сигнала. Если на ее вход подать модулированный сигнал, то дифференцирования не получится. Действительно, рассмотрим входной сигнал $u_1 = U_1(t) \cos \omega_0 t$, где $U_1(t)$ представляет собой закон изменения амплитуды во времени, т. е. огибающую или сам передаваемый сигнал. Продифференцируем это выражение.

считая для простоты, что дифференцирующая цепь идеальна:

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{dU_1(t)}{dt} \cos \omega_0 t - \omega_0 U_1(t) \sin \omega_0 t. \quad (4.72)$$

В результате получилось два слагаемых. Первое слагаемое является полезным, так как содержит требуемую производную от огибающей, а второе — вредным, так как оно представляет собой ложный сигнал, который может в сотни и тысячи раз превышать по уровню полезный сигнал.

Амплитудная частотная характеристика дифференцирующей RC -цепи (дифференцирующего звена с замедлением) изображена в табл. 4.7. Для получения дифференцирования огибающей модулированного сигнала необходимо осуществить такую цепь, у которой амплитудная характеристика была бы подобна изображенной в табл. 4.7 и была бы при этом расположена симметрично относительно несущей частоты. Такая характеристика изображена на рис. 4.30, а.

Из рассмотрения характеристики следует, что звено не должно пропускать несущую частоту. Это должно быть понятным и физически, так как несущая частота в чистом виде, т. е. отсутствие боковых частот, будет при постоянном сигнале на входе (см. (4.68)). В этом случае производная сигнала (по огибающей) будет равна нулю и на выходе звена не должно быть никакого сигнала.

При изменении сигнала по какому-либо закону, например в соответствии с выражением (4.69), появятся боковые частоты, которые будут пропускаться звеном тем сильнее, чем дальше они отстоят от несущей частоты, т. е. чем больше частота огибающей. Таким образом, звено будет обладать дифференцирующими свойствами по отношению к огибающей модулированного сигнала.

Амплитудная частотная характеристика, изображенная на рис. 4.30, а, может реализоваться различным образом. Такая характеристика может быть получена, например, от резонансной параллельной LC -цепи, Т-образной цепи и т. п., настроенных на несущую частоту (рис. 4.30, б и в).

Обратимся теперь ко второй указанной выше задаче. При известной частотной передаточной функции звена $W(j\omega)$ определим эквивалентную частотную передаточную функцию $W_s(j\Omega)$ для огибающей модулированного сигнала. Для этого вспомним, что частотная передаточная функция звена (4.17)

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\psi} = U(\omega) + jV(\omega)$$

представляет собой комплексное число, модуль которого $A(\omega)$ равен отношению амплитуд выходной и входной величин, а аргумент ψ — сдвигу фаз при гармоническом входном сигнале в установившемся режиме. Если на входе

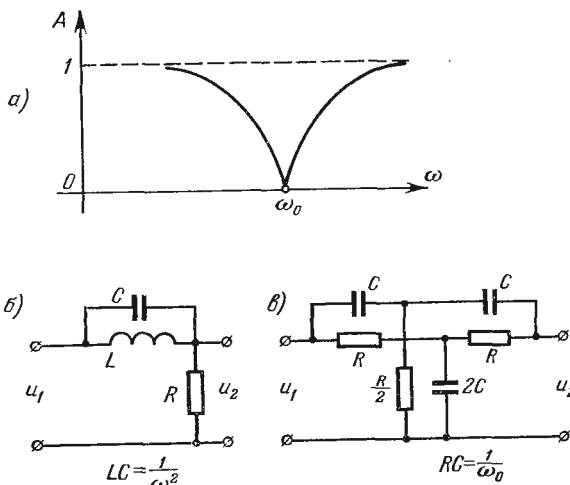


Рис. 4.30.

звена действует величина $x_1(t) = X_{1 \max} \sin \omega t$, то на выходе будет

$$x_2(t) = X_{2 \max} \sin(\omega t + \psi) = X_{1 \max} A(\omega) \sin(\omega t + \psi) =$$

$$= X_{1 \max} [U(\omega) \sin \omega t + V(\omega) \cos \omega t]. \quad (4.73)$$

Для получения частотной передаточной функции по огибающей $W_s(j\Omega)$ звена с модулированным сигналом обратимся к гармоническому сигналу по огибающей (4.69). Разложим его на боковые частоты $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$ в соответствии с выражением (4.70). Тогда, используя зависимость (4.73), получим

$$u_2(t) = \frac{U_{1 \max}}{2} [U(\omega_0 + \Omega) \sin(\omega_0 + \Omega)t + V(\omega_0 + \Omega) \cos(\omega_0 + \Omega)t -$$

$$- U(\omega_0 - \Omega) \sin(\omega_0 - \Omega)t - V(\omega_0 - \Omega) \cos(\omega_0 - \Omega)t], \quad (4.74)$$

где $U(\omega)$ и $V(\omega)$ — вещественная и мнимая части частотной передаточной функции $W(j\omega)$.

Путем разложения синусов и косинусов сумм и разностей углов это выражение преобразуется к виду

$$u_2(t) = U_{1 \max} \left[\frac{U(\omega_0 + \Omega) + U(\omega_0 - \Omega)}{2} \sin \Omega t + \frac{V(\omega_0 + \Omega) - V(\omega_0 - \Omega)}{2} \cos \Omega t \right] \times$$

$$\times \cos \omega_0 t + U_{1 \max} \left[\frac{U(\omega_0 + \Omega) - U(\omega_0 - \Omega)}{2} \cos \Omega t - \right.$$

$$\left. - \frac{V(\omega_0 + \Omega) + V(\omega_0 - \Omega)}{2} \sin \Omega t \right] \sin \omega_0 t. \quad (4.75)$$

Остановимся теперь на двух важных частных случаях.

1. Рассмотрим случай «симметричной» относительно несущей частоты частотной передаточной функции, что определяется равенством $W[j(\omega_0 + \Omega)] = W^*[j(\omega_0 - \Omega)]$, где звездочкой отмечена сопряженная комплексная величина. Из этого равенства вытекают два других: $U(\omega_0 + \Omega) = U(\omega_0 - \Omega)$ и $V(\omega_0 + \Omega) = -V(\omega_0 - \Omega)$.

Тогда формула (4.75) существенно упрощается и может быть записана в виде

$$u_2(t) = U_{1 \max} [U(\omega_0 + \Omega) \sin \Omega t + V(\omega_0 + \Omega) \cos \Omega t] \cos \omega_0 t. \quad (4.76)$$

Рассматривая огибающую, т. е. отбрасывая множитель $\cos \omega_0 t$, и сравнивая выражения (4.76) и (4.73), убеждаемся, что эквивалентная частотная передаточная функция для огибающей $W_s(j\Omega)$ может быть получена из частотной передаточной функции звена $W(j\omega)$ подстановкой $\omega = \omega_0 + \Omega$:

$$W_s(j\Omega) = W(j\omega) |_{\omega=\omega_0+\Omega} = W[j(\omega_0 + \Omega)], \quad (4.77)$$

что согласуется с полученной ранее формулой (4.71).

Так, например, если звено типа резонансного усилителя имеет частотную передаточную функцию

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j(\omega - \omega_0)T},$$

то передаточная функция для огибающей будет

$$W_s(j\Omega) = \frac{k}{1 + j(\omega - \omega_0)T} \Big|_{\omega=\omega_0+\Omega} = \frac{k}{1 + j\Omega T}.$$

Переход к обычной передаточной функции может быть сделан заменой $j\Omega = p$. В результате из (4.77) получаем

$$W_s(p) = W(j\omega_0 + p). \quad (4.78)$$

2. Рассмотрим теперь другой важный случай, когда передаточная функция $W(j\omega)$ не является «симметричной», но слагаемое в формуле (4.75), определяемое множителем $\sin \omega_0 t$, отсеивается в последующих звеньях каким-либо фазочувствительным устройством, например фазовым дискриминатором. Тогда это слагаемое может быть отброшено и формула (4.74) упрощается:

$$u_2(t) = U_{1\max} \left[\frac{U(\omega_0 + \Omega) + U(\omega_0 - \Omega)}{2} \sin \Omega t + \frac{V(\omega_0 + \Omega) - V(\omega_0 - \Omega)}{2} \cos \Omega t \right] \cos \omega_0 t. \quad (4.79)$$

Так как $U(\omega)$ — функция четная, [а $V(\omega)$ — нечетная, то последнее выражение может быть представлено в следующем виде:

$$u_2(t) = U_{1\max} \left[\frac{U(\Omega + \omega_0) + U(\Omega - \omega_0)}{2} \sin \Omega t + \frac{V(\Omega + \omega_0) + V(\Omega - \omega_0)}{2} \cos \Omega t \right] \cos \omega_0 t. \quad (4.80)$$

В этом случае эквивалентная частотная передаточная функция для огибающей может быть определена из выражения

$$W_g(j\Omega) = \frac{W[j(\Omega + \omega_0)] + W[j(\Omega - \omega_0)]}{2}. \quad (4.81)$$

Аналогичный результат может быть получен, если фазочувствительное устройство пропускает сигнал фиксированной фазы, например $U(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$, где $\varphi = \text{const}$. Тогда вместо выражения (4.81) получается

$$W_g(j\Omega) = \frac{W[j(\Omega + \omega_0)] e^{j\varphi} + W[j(\Omega - \omega_0)] e^{-j\varphi}}{2}. \quad (4.82)$$

Переход к обычной передаточной функции $W_g(p)$ делается, как и выше, заменой $j\Omega = p$.

Формулы (4.81) и (4.82) позволяют просто находить передаточную функцию по огибающей. Однако к ним следует относиться с осторожностью. Сформулированное выше условие применимости этих формул заключалось в том, что можно было отбросить слагаемое в (4.75), пропорциональное $\sin \omega_0 t$, и оставить слагаемое, пропорциональное $\cos \omega_0 t$ или в общем случае $\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Однако для этого еще недостаточно, чтобы последующее фазочувствительное устройство в принципе могло отсеивать слагаемое с множителем $\sin \omega_0 t$. Необходимо, чтобы это можно было реализовать технически, для чего нужна относительная малость слагаемого с $\sin \omega_0 t$ по сравнению со слагаемым с $\cos \omega_0 t$. Только в этих условиях при имеющейся всегда неустойчивости фазочувствительного устройства может быть уверенно выделено слагаемое с множителем $\cos \omega_0 t$.

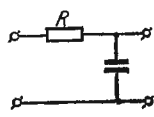
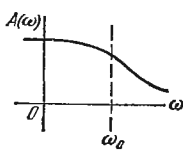
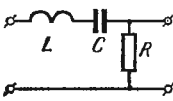
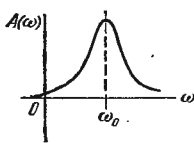
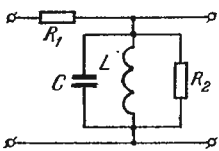
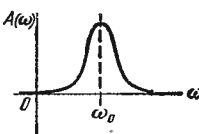
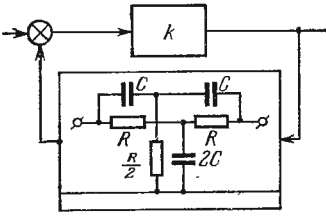
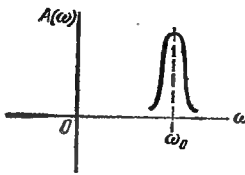
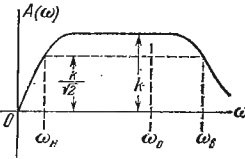
В качестве примера, иллюстрирующего случай, когда формула (4.81) практически неприменима, рассмотрим опять дифференцирующую RC -цепь (рис. 4.24, а). Примем для простоты, что ее частотная передаточная функция соответствует идеальному дифференцирующему звену $W(j\omega) = kj\omega$. Тогда, в соответствии с формулой (4.81), частотная передаточная функция для огибающей будет

$$W_g(j\Omega) = \frac{kj(\Omega + \omega_0) + kj(\Omega - \omega_0)}{2} = kj\Omega.$$

Это выражение показывает, что звено обладает дифференцирующими свойствами и для огибающей. Действительно, если обратиться к формуле (4.72), то видно, что при устранении слагаемого с множителем $\sin \omega_0 t$ звено

Таблица 4.8

Эквивалентные передаточные функции для огибающей некоторых звеньев

Звено и значение фиксированной фазы	А.ч.х. и несущая частота	Передаточная функция для огибающей
RC-цепь  $\varphi = 0$ или $\varphi = \arctg \omega_0 T$, $T = RC$, $\omega_0 < \frac{1}{T}$		$W_{\vartheta}(p) = \frac{k}{1 + T_{\vartheta} p}$ $k = \frac{1}{1 + \omega_0^2 T^2}$ $T_{\vartheta} = \frac{T}{1 + \omega_0^2 T^2}$
Резонансная LCR-цепь  $\varphi = 0$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$		$W_{\vartheta}(p) = \frac{1}{1 + T_{\vartheta} p}$ $T_{\vartheta} = 2 \frac{L}{R}$
Резонансная LCR-цепь  $\varphi = 0$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$		$W_{\vartheta}(p) = \frac{k}{1 + T_{\vartheta} p}$ $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ $T_{\vartheta} = \frac{2CR_1 R_2}{R_1 + R_2}$
Узкополосный усилитель  $\varphi = 0$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$		$W_{\vartheta}(p) = \frac{k}{1 + T_{\vartheta} p}$ $T_{\vartheta} = \frac{k}{2\omega_0}$ $k \gg 1$
Широкополосный усилитель  $\varphi = 0$		$W_{\vartheta}(p) = \frac{k}{1 + T_{\vartheta} p}$ $T_{\vartheta} = \frac{T}{1 + (\omega_0 - \omega_c)^2 T^2}$ $\omega_c = \frac{\omega_B + \omega_H}{2}$ $T = \frac{2}{\omega_B - \omega_H}$

будет обладать дифференцирующими свойствами. Однако, как уже указывалось выше при анализе выражения (4.72), его второе (вредное) слагаемое может в сотни и тысячи раз превышать первое (полезное) слагаемое. Выделить первое слагаемое и отсеять второе практически не удастся. Поэтому обычная дифференцирующая RC -цепь не может применяться для дифференцирования огибающей.

Пользоваться формулами (4.81) и (4.82) можно тем уверенней, чем большую симметрию относительно несущей частоты будет иметь частотная передаточная функция звена $W(j\omega)$. При полной симметрии слагаемое с множителем $\sin \omega_0 t$ в выражении (4.75) будет отсутствовать и формула (4.81) вырождается в формулу (4.77). В рассмотренном примере дифференцирующей RC -цепи частотная передаточная функция обладает сильной несимметрией относительно несущей частоты, что и привело к отрицательному результату.

В табл. 4.8 приведены приближенные значения передаточных функций для некоторых звеньев с модулированным сигналом, используемых в практике и сводящихся для огибающей к апериодическому звену первого порядка. Параметры передаточных функций определены для фиксированной фазы последующего фазочувствительного устройства $\varphi = \text{const}$. Эта фаза может устанавливаться равной нулю ($\varphi = 0$), т. е. устройство фазировано с входным сигналом звена (4.69). Фазочувствительное устройство может фазироваться также с выходным сигналом звена при постоянном входном сигнале вида (4.68). В этом случае $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, где φ_0 — фазовый сдвиг несущей частоты при входном сигнале $u_1 = U_{1\max} \cos \omega_0 t$. При симметричной относительно несущей частоты частотной передаточной функции соблюдается условие $\varphi = \varphi_0 = 0$.

На рис. 4.31 изображена для иллюстрации переходная характеристика звена с модулированным сигналом, эквивалентная для огибающей апериодическому звену первого порядка.

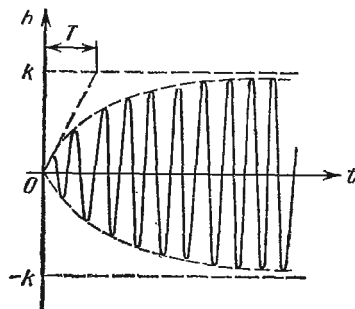


Рис. 4.31.

СОСТАВЛЕНИЕ ИСХОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 5.1. Общий метод составления исходных уравнений

Системы автоматического регулирования в большинстве случаев являются сложными устройствами, динамика которых описывается совокупностью дифференциальных уравнений. Для получения этой совокупности необходимо составить дифференциальное уравнение для каждого элемента автоматической системы так, чтобы общее число уравнений было не меньше, чем число независимых обобщенных координат, определяющих состояние системы.

При составлении дифференциального уравнения каждого элемента необходимо прежде всего выявить физический закон, определяющий его поведение. Таким законом может быть, например, закон сохранения вещества (объекты регулирования уровня, давления), закон сохранения энергии (объекты регулирования температуры), закон равновесия моментов (объекты регулирования скорости или угла поворота), закон равновесия электродвижущих сил (электрические цепи) и другие основные законы физики.

Математическое выражение соответствующего физического закона и является исходным дифференциальным уравнением данного элемента автоматической системы.

Например, для электродвигателя закон равновесия моментов на его валу может быть записан в следующем виде:

$$J \frac{d\Omega}{dt} = M_{\text{в}} - M_{\text{т}},$$

где J и Ω — приведенный момент инерции и угловая скорость двигателя, $M_{\text{в}}$ — вращающий момент двигателя, $M_{\text{т}}$ — тормозной момент внешних сил (момент нагрузки).

После записи дифференциального уравнения необходимо определить факторы, от которых зависят переменные, входящие в это уравнение.

Для приведенного выше примера необходимо установить, от каких величин зависят и какими выражениями определяются вращающий момент двигателя $M_{\text{в}}$ и тормозной момент $M_{\text{т}}$ на его валу. Нужно также выяснить, является ли приведенный момент инерции постоянной величиной или он изменяется в функции какой-либо переменной (например, в функции угла поворота двигателя).

Дальнейшим шагом является линеаризация полученных уравнений в соответствии с главой 3, если линеаризация вообще является допустимой. Обычно линеаризация допустима, если отсутствуют разрывные, неоднозначные или резко изгибающиеся характеристики и уравнения справедливы в течение всего интервала времени регулирования.

В результате линеаризации получается совокупность дифференциальных уравнений, описывающих движение рассматриваемой системы. Введя алгеб-

Из (5.2) вытекает, что ошибка системы автоматического регулирования может быть представлена в виде суммы двух составляющих. Первая составляющая определяется наличием задающего воздействия $g(t)$. Вторая составляющая определяется наличием возмущающего воздействия (в общем случае — возмущающих воздействий или начальных условий). В системах автоматической стабилизации ошибка сводится только ко второй составляющей, т. е. определяется только наличием возмущающих воздействий.

При решении системы дифференциальных уравнений относительно регулируемой величины $y(t)$ получается так называемое уравнение движения регулируемого объекта при наличии автоматического регулирования.

Это уравнение может быть получено в результате подстановки выражения для ошибки $x(t) = g(t) - y(t)$ в уравнение (5.2):

$$D(p)y(t) = R(p)g(t) - N(p)f(t), \quad (5.5)$$

$$R(p) = D(p) - Q(p).$$

Степень этого полинома $m \leq n$:

$$R(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m.$$

Как уже говорилось выше, в системах автоматической стабилизации при $g(t) = \text{const}$ можно при соответствующем выборе начала отсчета получить $g(t) = 0$, что упрощает выражение (5.5).

При заданных функциях времени в правых частях дифференциальных уравнений (5.2) и (5.5) эти уравнения могут быть решены (проинтегрированы) относительно искомым функций времени, т. е. может быть найдено изменение ошибки регулирования во времени $x(t)$ из (5.2) и движение регулируемого объекта вместе с регулятором $y(t)$ из (5.5).

Уравнения (5.1) могут быть также представлены в форме Коши, т. е. в виде совокупности n уравнений первого порядка, где n — порядок полинома $D(p)$:

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i + \sum_{i=1}^k b_{ji} f_i \quad (j=1, \dots, n). \quad (5.6)$$

Здесь x_i ($i=1, \dots, n$), в отличие от (5.1), представляют собой так называемые фазовые координаты системы, f_i ($i=1, \dots, k$) — задающие и возмущающие воздействия, а коэффициенты a_{ji} и b_{ji} суть вещественные числа.

Если в (5.6) ввести алгебраизированный оператор и обозначить $\dot{x}_j = p x_j$, то эта совокупность уравнений может быть разрешена относительно любой из фазовых координат x_i .

§ 5.2. Передаточные функции систем автоматического регулирования

Записанные выше дифференциальные уравнения систем автоматического регулирования (5.2) и (5.5) могут быть получены также на основании понятия передаточной функции, которое было введено в главе 3. Рассмотрим рис. 5.1, где изображена система автоматического регулирования по замкнутому циклу.

Предположим вначале, что чувствительный элемент (ЧЭ) отсоединен от регулируемого объекта (РО), и рассмотрим так называемую разомкнутую систему автоматического регулирования.

Управляющее (или регулирующее) воздействие, которое прикладывает исполнительный элемент (ИЭ) к регулируемому объекту, определяется выражением

$$u(t) = W_{\text{пер}}(p) x(t), \quad (5.7)$$

где x — рассогласование на выходе чувствительного элемента, $W_{\text{рег}}(p)$ — передаточная функция цепи регулирования.

Регулируемая величина может быть найдена из выражения

$$y(t) = W_o(p) u(t) + W_f(p) f(t), \quad (5.8)$$

где $W_o(p)$ — передаточная функция регулируемого объекта по регулируемому воздействию, $W_f(p)$ — передаточная функция регулируемого объекта по возмущающему воздействию $f(t)$.

Как и ранее, предполагается, что на объект регулирования (или на систему регулирования) действует одно возмущающее воздействие $f(t)$. При наличии нескольких возмущений на основании принципа суперпозиции необходимо будет просуммировать члены вида $W_k(p) f_k(t)$, где $f_k(t)$ и $W_k(p)$ — возмущение и соответствующая ему передаточная функция по возмущению.

Подставляя (5.7) и (5.8), получаем

$$y(t) = W(p) x(t) + W_f(p) f(t). \quad (5.9)$$

Здесь введена так называемая *передаточная функция разомкнутой системы*

$$W(p) = W_o(p) W_{\text{рег}}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, \quad (5.10)$$

где $R(p)$ и $Q(p)$ представляют собой некоторые полиномы от p .

Передаточную функцию разомкнутой системы можно определить как отношение изображений регулируемой величины и ошибки при нулевых начальных условиях и возмущающих воздействиях, равных нулю:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}, \quad (5.11)$$

где $p = s + j\omega$ — комплексная величина.

Применительно к функциям времени, которые использовались в формулах (5.7) — (5.9), передаточная функция разомкнутой системы дает возможность в символической или операторной форме записать дифференциальное уравнение, связывающее регулируемую величину $y(t)$ с ошибкой $x(t)$ в разомкнутой системе:

$$y(t) = W(p) x(t), \quad (5.12)$$

где $p = \frac{d}{dt}$ — алгебраизированный оператор дифференцирования.

Учитывая (5.10), формулу (5.12) можно также записать в виде

$$Q(p) y(t) = R(p) x(t). \quad (5.13)$$

Передаточная функция разомкнутой системы имеет весьма большое значение в теории автоматического регулирования, так как многие методы анализа и синтеза основаны на использовании именно этой функции.

Рассмотрим теперь замкнутую систему, т. е. предположим, что чувствительный элемент соединен с регулируемым объектом. При этом можно записать так называемое уравнение замыкания:

$$x(t) = g(t) - y(t). \quad (5.14)$$

Решая (5.9) и (5.14) совместно, получаем для регулируемой величины

$$y(t) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} g(t) + \frac{W_f(p)}{1 + W(p)} f(t) \quad (5.15)$$

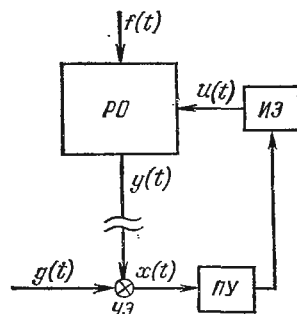


Рис. 5.1.

и для ошибки

$$x(t) = \frac{g(t)}{1+W(p)} - \frac{W_f(p)}{1+W(p)} f(t). \quad (5.16)$$

Выражение

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{R(p)}{R(p)+Q(p)} \quad (5.17)$$

называется *передаточной функцией замкнутой системы* или *главным оператором*. Передаточная функция замкнутой системы дает связь между регулируемой величиной и задающим воздействием при равенстве нулю возмущающих воздействий:

$$y(t) = \Phi(p) g(t) = \frac{W(p)}{1+W(p)} g(t). \quad (5.18)$$

Выражение

$$\Phi_x(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{Q(p)}{R(p)+Q(p)} \quad (5.19)$$

называют *передаточной функцией замкнутой системы по ошибке*. Оно дает связь между ошибкой и задающим воздействием в замкнутой системе при равенстве нулю возмущающих воздействий:

$$x(t) = \Phi_x(p) g(t) = \frac{g(t)}{1+W(p)}. \quad (5.20)$$

Как и ранее, формулы (5.15), (5.16), (5.18) и (5.20) представляют собой символическую (операторную) запись дифференциальных уравнений. Более строго передаточную функцию замкнутой системы можно определить как отношение изображений регулируемой величины $Y(p)$ и управляющего воздействия $G(p)$ при нулевых начальных условиях и отсутствии внешних возмущений:

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{G(p)}, \quad (5.21)$$

а передаточную функцию по ошибке — как отношение изображений ошибки $X_e(p)$ и управляющего воздействия $G(p)$:

$$\Phi_x(p) = \frac{X(p)}{G(p)}, \quad (5.22)$$

также при нулевых начальных условиях и отсутствии внешних возмущений.

Из формул (5.15) и (5.16) видно, что введение автоматического регулирования «уменьшает» отклонение регулируемой величины под действием возмущающих воздействий в $[1 + W(p)]$ раз по сравнению с отклонением в разомкнутой системе (5.9), когда цепь регулирования разорвана и автоматическое регулирование отсутствует.

Передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена в виде дробно-рациональной функции от оператора p . В результате сравнения формул (5.2) и (5.16), а также (5.5) и (5.15) видно, что полиномы $R(p)$ и $Q(p)$ в выражении (5.10) совпадают с аналогичными полиномами в дифференциальных уравнениях, приведенных в предыдущем параграфе.

Полином

$$D(p) = R(p) + Q(p) \quad (5.23)$$

называется *характеристическим*.

Приравнивание нулю характеристического полинома дает *характеристическое уравнение* системы:

$$D(p) = R(p) + Q(p) = 0. \quad (5.24)$$

Оно может быть записано в более удобной форме, которая непосредственно получается из (5.15) или (5.16):

$$1 + W(p) = 0, \quad (5.25)$$

так как характеристическое уравнение системы есть знаменатель операторного решения, приравненный нулю.

Из рассмотренного видно, что знание передаточной функции разомкнутой системы позволяет найти выражение для ошибки и регулируемой величины в функции задающего и возмущающих воздействий, а также характеристическое уравнение системы.

Передаточная функция разомкнутой системы может находиться непосредственно по структурной схеме и передаточным функциям входящих в нее звеньев (см. ниже, § 5.4) или по какому-либо соотношению, связывающему передаточную функцию разомкнутой системы с другими функциями:

по передаточной функции замкнутой системы (5.17)

$$W(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - \Phi(p)}; \quad (5.26)$$

по передаточной функции для ошибки (5.19)

$$W(p) = \frac{1 - \Phi_x(p)}{\Phi_x(p)}; \quad (5.27)$$

по дифференциальному уравнению для ошибки (5.2) или по дифференциальному уравнению для регулируемой величины (5.5)

$$W(p) = \frac{D(p) - Q(p)}{Q(p)} = \frac{D(p)}{Q(p)} - 1 = \frac{R(p)}{D(p) - R(p)}. \quad (5.28)$$

§ 5.3. Законы регулирования

Под *законом регулирования* или — в более общем случае — *законом управления* понимается алгоритм или функциональная зависимость, в соответствии с которыми управляющее устройство формирует управляющее воздействие $u(t)$. Эта зависимость может быть представлена в виде

$$u(t) = F(x, g, f), \quad (5.29)$$

где F — некоторая, в общем случае нелинейная, функция от ошибки x задающего воздействия g и возмущающего воздействия f , а также от их производных и интегралов по времени.

Формула (5.29) обычно может быть записана следующим образом:

$$u(t) = F_1(x) + F_2(g) + F_3(f). \quad (5.30)$$

Первое слагаемое (5.30) соответствует *регулированию по отклонению* (принцип Ползунова — Уатта), второе и третье — *регулированию по внешнему воздействию* (принцип Понселе).

Здесь мы рассмотрим только линейные законы, когда управляющее устройство вырабатывает величину $u(t)$ в функции ошибки в соответствии с линейной формой

$$u(t) = k_1 x + k_2 \int x dt + k_3 \iint x dt^2 + \dots + k_4 \dot{x} + k_5 \ddot{x} + \dots \quad (5.31)$$

или в операторной записи

$$u(t) = k_1 x + \frac{k_2}{p} x + \frac{k_3}{p^2} x + \dots + k_4 p x + k_5 p^2 x + \dots \quad (5.32)$$

Регулирование по внешнему воздействию будет рассмотрено в § 9.2.

Предположим вначале, что регулируемый объект представляет собой звено статического типа. Это означает, что в установившемся состоянии между регулируемой величиной и управляющим воздействием существует пропорциональная зависимость, вытекающая из (5.8) при равенстве нулю возмущающих воздействий:

$$y_{уст} = k_0 u_{уст},$$

где $k_0 = W_0(0)$ — коэффициент передачи объекта.

1. Пропорциональное регулирование. В случае пропорционального регулирования выражение (5.7) для простейшей безынерционной цепи регулирования (см. рис. 5.1) приобретает вид

$$u(t) = W_{рег}(p) x(t) = k_1 x(t). \quad (5.33)$$

Передаточная функция $W_{рег}(p)$ может иметь более сложный вид, например:

$$W_{рег}(p) = k_1 \frac{A(p)}{B(p)},$$

где $A(p)$ и $B(p)$ — некоторые полиномы от оператора p .

Однако существенным здесь является то обстоятельство, что цепь регулирования представляет собой позиционное (статическое) звено и при $p \rightarrow 0$ передаточная функция $W_{рег}(p) \rightarrow k_1$, где k_1 — коэффициент передачи цепи регулирования¹⁾.

В связи с изложенным здесь и далее ради облегчения анализа рассматривается упрощенное выражение (5.33), которое является справедливым, по крайней мере, для медленных изменений величины x .

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = W_{рег}(p) W_0(p) = k_1 W_0(p).$$

В установившемся состоянии передаточная функция стремится к значению

$$\lim_{p \rightarrow 0} W(p) = k_1 k_0 = K. \quad (5.34)$$

Эта величина называется *общим коэффициентом усиления разомкнутой системы*. Коэффициент усиления является безразмерной величиной, так же как и передаточная функция разомкнутой системы. Это вытекает из соотношения (5.11).

Коэффициент усиления разомкнутой цепи (рис. 5.1) физически представляет собой отношение установившегося значения регулируемой величины к постоянному значению ошибки $x = x_0$, если цепь регулирования совместно с регулируемым объектом рассматривать как некоторый усилитель, на входе которого действует сигнал в виде ошибки x , а на выходе — усиленный сигнал y . Таким образом, для коэффициента усиления можно записать

$$K = \frac{y_{уст}}{x_0}.$$

Для установившегося состояния замкнутой системы при постоянном задающем воздействии $g = g_0$ из формулы (5.16) может быть получено следующее соотношение:

$$x_{уст} = \frac{g_0}{1+K} + \frac{x_{fуст}}{1+K}, \quad (5.35)$$

где $x_{уст}$ — установившаяся (статическая) ошибка, $x_{fуст}$ — установившееся значение ошибки от возмущающих воздействий в объекте без регулирования.

¹⁾ Заметим, что режим $p \rightarrow 0$ соответствует установившемуся режиму, [так как приравливание оператора дифференцирования нулю означает приравливание нулю всех производных.

Таким образом, пропорциональное регулирование позволяет уменьшить установившиеся ошибки в объекте в $1 + K$ раз. Регулирование в этом случае получается статическим, так как при любом конечном значении коэффициента усиления цепи установившаяся ошибка будет отличной от нуля.

Передаточная функция разомкнутой системы (5.10) для этого случая может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{b_m + b_{m-1}p + \dots + b_0 p^m}{c_n + c_{n-1}p + \dots + c_0 p^n} = \frac{K(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0 p^m)}{1 + C_{n-1}p + \dots + C_0 p^n}, \quad (5.36)$$

где $K = \frac{b_m}{c_n}$.

2. Интегральное регулирование. При интегральном регулировании осуществляется пропорциональная зависимость между скоростью изменения регулирующего воздействия и ошибкой:

$$\frac{du}{dt} = k_2 x; \quad (5.37)$$

при этом регулирующее воздействие получается пропорциональным интегралу от ошибки по времени:

$$u = k_2 \int x dt. \quad (5.38)$$

В операторной форме это можно записать в виде

$$u = W_{\text{рег}}(p) x = \frac{k_2}{p} x. \quad (5.39)$$

Интегральное регулирование может быть осуществлено при помощи каких-либо интегрирующих звеньев, которые были рассмотрены в главе 4.

Аналогично изложенному выше (при рассмотрении пропорционального регулирования) передаточная функция цепи регулирования может иметь более сложный вид, например:

$$W_{\text{рег}}(p) = \frac{k_2}{p} \frac{A(p)}{B(p)}.$$

Однако существенным здесь является то, что цепь регулирования представляет собой или имеет в своем составе интегрирующее звено. Поэтому выражение (5.39) будет справедливым по крайней мере для медленных изменений ошибки x .

Передаточная функция разомкнутой системы регулирования

$$W(p) = W_{\text{рег}}(p) W_o(p) = \frac{k_2}{p f_i} W_o(p). \quad (5.40)$$

В установившемся состоянии ($p = 0$) передаточная функция стремится к бесконечности: $W(p) \rightarrow \infty$. В результате первая составляющая ошибки (5.16) при $g = g_0 = \text{const}$ обращается в нуль. Вторая составляющая, определяемая наличием возмущающих воздействий, может не обращаться в нуль, так как в установившемся состоянии числитель ее может также стремиться к бесконечности. Поэтому должен быть найден предел выражения при $f = f_0 = \text{const}$:

$$x_{\text{уст}} = -\lim_{p \rightarrow 0} \frac{W_f(p) f_0}{1 + W(p)}, \quad (5.41)$$

который может быть как равным нулю, так и отличным от нуля.

Таким образом, при интегральном регулировании получается система, астатическая по отношению к задающему воздействию. Она может быть при этом как статической, так и астатической по отношению к возмущающим воздействиям.

Передаточная функция разомкнутой системы для случая интегрального регулирования может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{K_v(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{p(1 + C_{n-2}p + \dots + C_0p^{n-1})}, \quad (5.42)$$

где $K_v \left[\frac{1}{сек} \right]$ — коэффициент усиления разомкнутой системы. Физически он представляет собой отношение установившейся скорости изменения регулируемой величины к постоянной по величине ошибке $x = x_0 = \text{const}$ в разомкнутой системе (рис. 5.1):

$$K_v = \frac{\left(\frac{dy}{dt} \right)_{уст}}{x_0}, \quad (5.43)$$

если цепь регулирования совместно с регулируемым объектом представить себе в виде некоторого усилителя с входной величиной x и выходной y .

Коэффициент K_v часто называют добротностью по скорости системы регулирования. В дальнейшем, при рассмотрении вопросов точности, будет показано, что он равен отношению постоянной скорости изменения задающего воздействия

$$\frac{dg}{dt} = v = \text{const}$$

к установившейся ошибке:

$$K_v = \frac{v}{x_{уст}}, \quad (5.44)$$

что и определило подобное название.

Регулирование может осуществляться и по второму интегралу от ошибки по времени:

$$u = k_3 \int \int x dt dt \quad (5.45)$$

или

$$u = W_{\text{рег}}(p) x = \frac{k_3}{p^2} x. \quad (5.46)$$

В этом случае передаточная функция разомкнутой системы будет иметь вид

$$W(p) = \frac{K_e(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{p^2(1 + C_{n-3}p + \dots + C_0p^{n-2})}, \quad (5.47)$$

где $K_e \left[\frac{1}{сек^2} \right]$ — коэффициент усиления разомкнутой системы, представляющий собой отношение установившегося ускорения изменения регулируемой величины к постоянной по величине ошибке $x = x_0 = \text{const}$ в разомкнутой системе (рис. 5.1):

$$K_e = \frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)_{уст}}{x_0}. \quad (5.48)$$

В этом случае установившееся значение ($p = 0$) передаточной функции $W(p) \rightarrow \infty$. Система также будет обладать астатизмом относительно задающего воздействия. Однако это будет уже астатизм второго порядка. Ошибка, определяемая задающим воздействием в (5.16), будет равна нулю не только при $g = \text{const}$, но и при изменении задающего воздействия с постоянной скоростью $\frac{dg}{dt} = \text{const}$.

Аналогичным образом можно получить астатизм третьего и выше порядков, вводя регулирование по третьему и высшим интегралам, т. е. осуществляя регулирование по закону

$$u = W_{\text{рег}}(p) x = \frac{k}{p^r} x, \quad (5.49)$$

где r — порядок астатизма.

Случай пропорционального регулирования (5.30) можно рассматривать как частный случай астатизма при $r = 0$.

Повышение порядка астатизма приводит к увеличению установившейся точности системы регулирования, но одновременно делает систему более замедленной в действии, т. е. снижает ее быстродействие, а также приводит к ухудшению устойчивости. Последнее будет показано ниже в главе, посвященной устойчивости.

Для иллюстрации появления замедленности действия систем с интегральным регулированием рассмотрим рис. 5.2. Предположим, что ошибка в системе регулирования начинает возрастать по линейному закону $x = at$. В системе пропорционального регулирования по такому же закону начнет создаваться регулирующее воздействие $u = k_1 x = k_1 at$. В системе интегрального регулирования регулирующее воздействие будет создаваться по закону $u = k_2 \int x dt = \frac{k_2 at^2}{2}$. При $t = 0$ в этом случае в системе интегрального регулирования не только регулирующее воздействие равно нулю, но равна нулю также и его первая производная, что обуславливает весьма медленный рост u в первые моменты времени. В системе пропорционального регулирования рост u в первые моменты времени происходит более интенсивно, так как наличие ошибки сразу дает появление регулирующего воздействия, в то время как в системе интегрального регулирования должно пройти некоторое время, пока не «накопится» интеграл $\int x dt$.

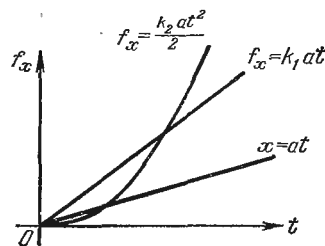


Рис. 5.2.

Если перейти к регулированию по второму интегралу, то снижение быстродействия станет еще более заметным.

3. Изодромное регулирование. При изодромном регулировании осуществляется регулирование по пропорциональному и интегральному законам:

$$u = k_1 x + \frac{k_2}{p} \dot{x} = \frac{k_1 p + k_2}{p} \dot{x}. \quad (5.50)$$

В этом случае $W(p) \rightarrow \infty$ при $p = 0$ и регулирование оказывается астатическим относительно задающего воздействия. Изодромное регулирование может осуществляться при помощи использования двух параллельных ветвей в цепи регулирования или при помощи установки изодромных звеньев, рассмотренных в главе 4.

Изодромное регулирование сочетает в себе высокую точность интегрального регулирования (астатизм) с большим быстродействием пропорционального регулирования. В первые моменты времени при появлении ошибки система изодромного регулирования работает как система пропорционального регулирования. Это определяется первым слагаемым в правой части закона (5.50). В дальнейшем система начинает работать как система интегрального регулирования, так как с течением времени преобладающее значение начинает приобретать второе слагаемое (5.50).

4. Регулирование по производным. При регулировании по первой производной от ошибки осуществляется зависимость

$$u = k_d \frac{dx}{dt} = k_d p x. \quad (5.51)$$

Регулирование по производной не имеет самостоятельного значения, так как в установившемся состоянии производная от ошибки равна нулю и регулирование прекращается. Однако оно может играть весьма большую роль в переходных процессах и вообще в динамике в качестве вспомогательного средства, так как такое регулирование позволяет учитывать не только наличие ошибки, но и тенденцию к росту или уменьшению ошибки. При осуществлении регулирования по закону

$$u = k_1 x + k_d p x \quad (5.52)$$

в системе образуется регулирующее воздействие даже в том случае, когда $x = 0$, но $\frac{dx}{dt} \neq 0$. Так, например, в рассмотренном выше случае (рис. 5.2) при $x = at$ регулирующее воздействие, определяемое вторым слагаемым в правой части (5.52), возникает уже при $t = 0$. В результате введение регулирования по производной от ошибки увеличивает скорость реакции системы регулирования, повышает ее быстродействие, что приводит к снижению ошибки в динамике.

В некоторых случаях в закон регулирования могут вводиться производные более высоких порядков — вторая, третья и т. д. Это еще больше улучшает динамические качества системы автоматического регулирования. Однако в настоящее время техническая реализация производных выше второго порядка встречает значительные трудности.

В общем случае закон регулирования может иметь сложный вид и содержать кроме члена, пропорционального ошибке, также интегралы (для улучшения точности) и производные (для улучшения динамических свойств) от ошибки. Так, например, часто используется издромное регулирование с введением первой производной

$$u = \left(k_1 + \frac{k_2}{p} + k_d p \right) x. \quad (5.53)$$

Таким образом, передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена в следующем общем виде:

$$W(p) = \frac{K_r (1 + B_{m-1}p + \dots + B_0 p^m)}{p^r (1 + C_{n-r-1}p + \dots + C_0 p^{n-r})}, \quad (5.54)$$

где $K_r \left[\frac{1}{сек^r} \right]$ — коэффициент усиления разомкнутой системы, r — степень астатизма.

Для последующего использования при анализе и синтезе передаточную функцию разомкнутой системы удобно представлять в виде произведения сомножителей типа $(1 + T_i p)$:

$$W(p) = \frac{K_r \prod_{j=1}^m (1 + T_j p)}{p^r \prod_{i=1}^{n-r} (1 + T_i p)}. \quad (5.55)$$

Если знаменатель или числитель (5.54) содержит комплексные корни,

то в (5.55) появятся множители вида

$$1 + ap + bp^2 = 1 + 2\xi T_p + T^2 p^2,$$

которые характерны, например, для звеньев колебательного типа.

Формула (5.55) особенно удобна при использовании логарифмических частотных характеристик, так как T_i^{-1} и T_j^{-1} соответствуют сопрягающим частотам асимптотической л. а. х., которая при известных T_i и T_j может быть построена без вычислительной работы.

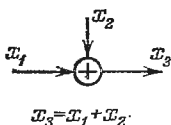
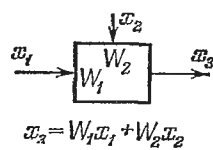
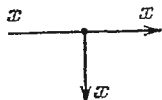
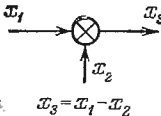
§ 5.4. Использование структурных схем и графов

Составление основных уравнений системы автоматического регулирования (5.15) и (5.16) во многих случаях может быть значительно облегчено использованием понятия динамических звеньев. Динамические звенья были подробно рассмотрены в главе 4.

Часто систему автоматического регулирования можно рассматривать как комбинацию динамических звеньев с определенными типовыми или не типовыми передаточными функциями. Изображение системы регулирования в виде совокупности динамических звеньев с указанием связей между ними носит название *структурной схемы*. Структурная схема может быть составлена на основе известных уравнений системы, и, наоборот, уравнения системы могут быть получены из структурной схемы. Однако первая задача может иметь различные варианты решения (различные структурные схемы), тогда как вторая задача имеет всегда единственное решение.

Элементы структурных схем приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Наименование	Обозначение	Наименование	Обозначение
Звено с одним входом		Сумматор	
Звено с двумя входами			
Узел (разветвление)		Элемент сравнения (для отрицательных обратных связей)	

Рассмотрим вначале простейшие сочетания звеньев.

Последовательное соединение звеньев. Такое соединение показано на рис. 5.3.

Нетрудно показать, что результирующая передаточная функция равна произведению передаточных функций отдельных звеньев:

$$W_p(p) = W_1(p) W_2(p) W_3(p) \dots, \quad (5.56)$$

или

$$W_p(p) = \frac{R_p(p)}{Q_p(p)} = \frac{R_1(p)}{Q_1(p)} \frac{R_2(p)}{Q_2(p)} \frac{R_3(p)}{Q_3(p)} \dots \quad (5.57)$$

Следует подчеркнуть, что это справедливо только в том случае, если соединение выхода предыдущего звена со входом последующего не меняет исходных уравнений каждого звена и, следовательно, его передаточной функции. В подобной последовательной цепи звеньев сигнал проходит только в одном направлении, и она называется детектирующей цепью.

Если при соединении двух звеньев наблюдается влияние одного звена на другое, в результате которого меняются исходные уравнения какого-либо звена, то такое соединение двух звеньев должно рассматриваться как новое самостоятельное звено со своей передаточной функцией.

Параллельное соединение звеньев. Такое соединение звеньев изображено на рис. 5.4.

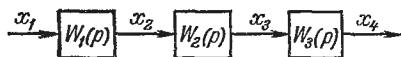


Рис. 5.3.

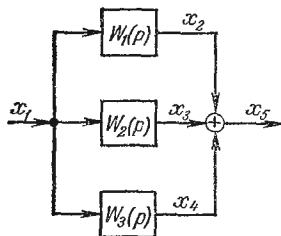


Рис. 5.4.

Так как сигналы на выходе всех звеньев складываются, то результирующая передаточная функция равна сумме передаточных функций:

$$W_p(p) = W_1(p) + W_2(p) + W_3(p) + \dots = \frac{R_1(p)}{Q_1(p)} + \frac{R_2(p)}{Q_2(p)} + \frac{R_3(p)}{Q_3(p)} + \dots \quad (5.58)$$

Здесь остаются справедливыми замечания, сделанные выше относительно взаимного влияния звеньев.

Обратные связи. Такое соединение звеньев изображено на рис. 5.5. Обратная связь может быть положительной, если сигнал x_3 , снимаемый с выхода второго звена, суммируется с сигналом x_1 на входе, и отрицательной, если x_3 вычитается.

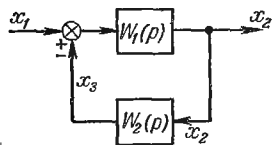


Рис. 5.5.

Для определения результирующей передаточной функции такой комбинации звеньев запишем следующие очевидные соотношения:

$$x_2 = W_1(p) [x_1 \pm x_3], \quad x_3 = W_2(p) x_2,$$

где знак плюс относится к положительной, а знак минус — к отрицательной обратной связи. Решая

эти уравнения совместно относительно x_2 , можно найти результирующую передаточную функцию:

$$W_p(p) = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p) W_2(p)}, \quad (5.59)$$

или

$$W_p(p) = \frac{R_1(p) Q_2(p)}{Q_1(p) Q_2(p) \mp R_1(p) R_2(p)}. \quad (5.60)$$

Здесь знак минус относится к положительной, а знак плюс — к отрицательной обратной связи.

Обратные связи будут рассмотрены подробно в главе, посвященной методам улучшения динамических свойств системы автоматического регулирования.

При использовании динамических звеньев обычно наиболее просто находится передаточная функция разомкнутой системы (рис. 5.1). Затем по формулам, приведенным в § 5.2, легко находятся все уравнения системы автоматического регулирования.

При анализе системы автоматического регулирования необходимо составить ее так называемую структурную схему, представляющую собой совокупность динамических звеньев со связями между звеньями. Такая структурная схема часто является весьма простой и ее составление не представляет особого труда. Однако в некоторых случаях составление структурной схемы сопряжено с большими трудностями и может быть сделано только на основании детального анализа исходных дифференциальных уравнений системы регулирования. В этом случае структурная схема не облегчает нахождения основных уравнений системы; однако и в этом случае она остается весьма

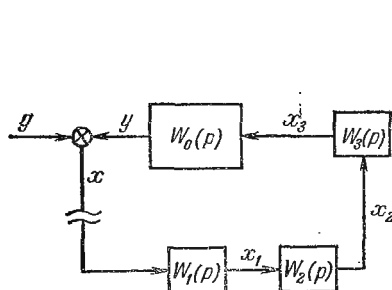


Рис. 5.6.

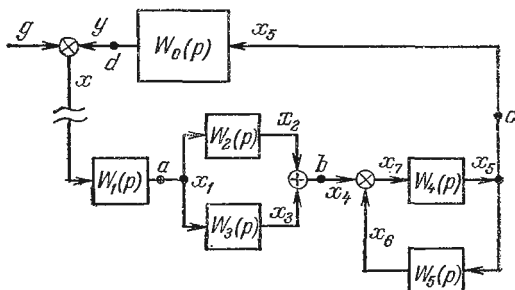


Рис. 5.7.

ценной, так как на ней в наглядной форме представлены все узлы исследуемой системы и все существующие между ними связи. Это может оказаться полезным во всех дальнейших исследованиях.

На рис. 5.6 в качестве примера приведена структурная схема разомкнутой системы регулирования в том случае, когда цепь регулирования представляет собой простую цепь последовательно включенных звеньев. В этом случае передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = W_1(p) W_2(p) W_3(p) W_o(p). \quad (5.61)$$

Здесь $W_o(p)$, $W_1(p)$, $W_2(p)$ и $W_3(p)$ представляют собой заданные передаточные функции объекта регулирования и отдельных звеньев, входящих в систему регулирования.

Нетрудно видеть, что для нахождения передаточной функции разомкнутой системы можно разомкнуть систему не обязательно так, как это показано на рис. 5.6, а в произвольном месте.

На рис. 5.7 изображен более сложный пример системы автоматического регулирования. Передаточная функция разомкнутой системы в этом случае

$$W(p) = W_1(p) [W_2(p) + W_3(p)] \frac{W_4(p)}{1 + W_4(p) W_5(p)} W_o(p). \quad (5.62)$$

И в этом случае для нахождения передаточной функции разомкнутой системы можно разомкнуть систему в другом месте, например в точках a , b , c или d .

Для рассмотренных на рис. 5.6 и 5.7 систем, зная передаточную функцию разомкнутой системы $W(p)$, легко найти по формулам (5.15) и (5.16) дифференциальные уравнения для регулируемой величины и ошибки, записанные

в символической форме:

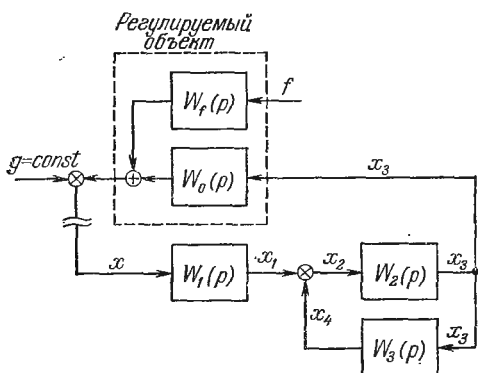
$$y(t) = \frac{W(p)}{1+W(p)} g(t), \quad x(t) = \frac{g(t)}{1+W(p)},$$

где $g(t)$ — задающее воздействие.

На рис. 5.8 изображена структурная схема системы стабилизации. В этом случае задающее воздействие $g(t) = \text{const}$ представляет собой настройку регулятора.

Определив передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(p) = W_1(p) \frac{W_2(p)}{1+W_2(p)W_3(p)} W_0(p), \quad (5.63)$$



можно по формулам (5.15) и (5.16) получить символические записи дифференциальных уравнений для регулируемой величины:

$$y(t) = \frac{W_f(p)}{1+W(p)} f(t),$$

и ошибки:

$$x(t) = -\frac{W_f(p)}{1+W(p)} f(t),$$

Рис. 5.8.

где $f(t)$ — возмущение, действующее на объект, а $W_f(p)$ — передаточная

функция регулируемого объекта по возмущению.

В тех случаях, когда структурная схема оказывается сложной и содержит много различных перекрестных связей, можно попытаться ее упростить

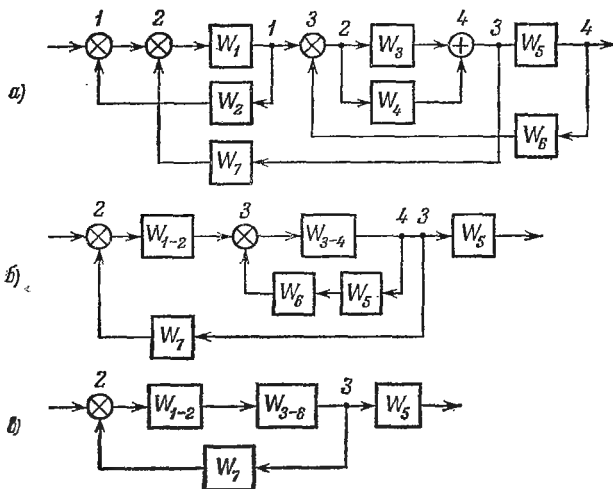
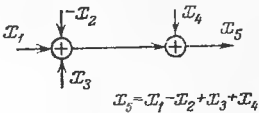
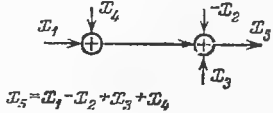
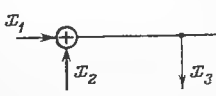
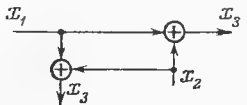
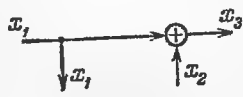
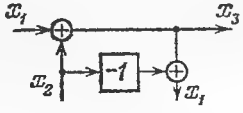
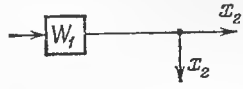
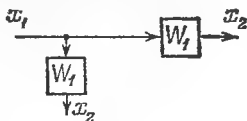
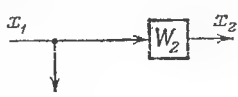
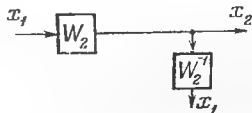
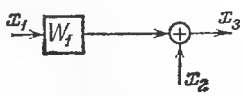
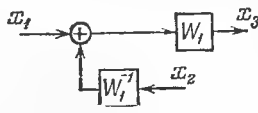
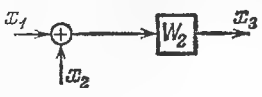
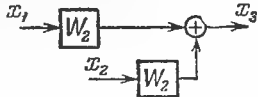
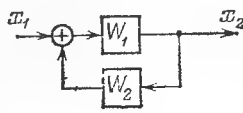
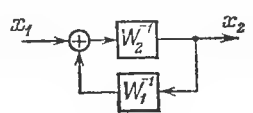
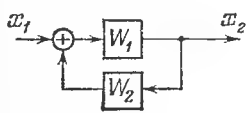
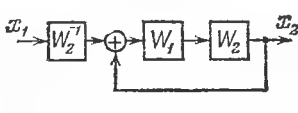


Рис. 5.9.

и свести к простейшему виду, например к изображенной на рис. 5.6. Преобразование структурных схем линейных систем делается на основе некоторых правил, которые даны в табл. 5.2.

На рис. 5.9 изображены этапы упрощения сложной структурной схемы на основе приведенных выше правил. При упрощении введены

Правила преобразования структурных схем и линейных систем

Операция	Исходная схема	Эквивалентная схема
Перестановка сумматоров или элементов сравнения	 $x_5 = x_1 - x_2 + x_3 + x_4$	 $x_5 = x_1 - x_2 + x_3 + x_4$
Перестановка звеньев		
Перенос узла с выхода на вход сумматора		
Перенос узла с входа на выход сумматора		
Перенос узла с выхода на вход звена		
Перенос узла с входа на выход звена		
Перенос сумматора с выхода на вход звена		
Перенос сумматора с входа на выход звена		
Замена звеньев прямой и обратной цепей		
Переход к единичной обратной связи		

дополнительные передаточные функции, определяемые выражениями

$$W_{1-2} = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2}, \quad W_{3-4} = W_3 + W_4, \quad W_{5-6} = \frac{W_3 + W_4}{1 + (W_3 + W_4) W_5 W_6}.$$

Полученная в результате преобразования схема (рис. 5.9, в) уже относится к простейшим.

Использование графов. Подобно структурным схемам графы прохождения сигналов используются для наглядного изображения математических зависимостей в системах регулирования. *Графом* (рис. 5.10, б) называется множество вершин и ребер. Каждому ребру соответствуют две вершины — начало и конец ребра. Вершине и ребру могут быть сопоставлены или некоторые величины, или операторы, например передаточные функции.

Основные свойства графов прохождения сигналов следующие.

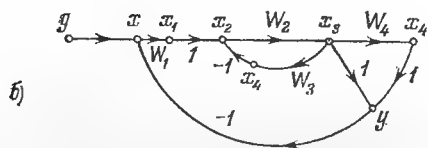
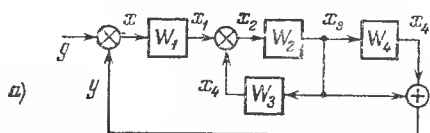


Рис. 5.10.

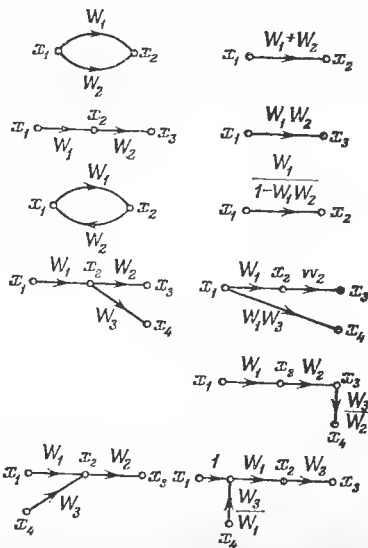


Рис. 5.11.

1. Каждая вершина, отмеченная на графе кружком или точкой, соответствует некоторой переменной (координате) рассматриваемой системы.
2. Каждое ребро графа, изображаемое в виде линии со стрелкой, указывающей направление прохождения сигнала, имеет вершину-начало (входную величину) и вершину-конец (выходную величину). Если из вершины выходит несколько ребер, то все они имеют одинаковую входную величину.
3. Выходная величина ребра получается как результат преобразования, осуществляемого соответствующим ребру оператором, входной величины ребра.
4. Если к одной вершине подходит несколько ребер, то величина, соответствующая этой вершине, получается алгебраическим суммированием выходных величин этих ребер.

Между структурной схемой и графом прохождения сигналов имеется прямое соответствие: прямоугольник структурной схемы соответствует ребру, а линия передачи сигнала — вершине графа.

На рис. 5.10 для сравнения изображены одновременно структурная схема (а) и граф прохождения сигналов (б) одной и той же системы.

Правила преобразования графов подобны правилам преобразования структурных схем линейных систем. Эти правила изображены на рис. 5.11 в виде исходных (первый столбец) и эквивалентных (второй столбец) схем.

В дальнейшем изложении будут использоваться более удобные структурные схемы.

§ 5.5. Многомерные системы регулирования

К *многомерным* относятся системы управления и регулирования, имеющие несколько регулируемых величин y_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Это имеет место во многих современных сложных системах. К ним относятся, например, системы регулирования напряжения и частоты синхронных генераторов, системы управления подвижных объектов, многие системы регулирования технологических процессов и др.

Многомерная система предполагает наличие *многомерного объекта управления* (рис. 5.12), который характеризуется существованием нескольких входов (точек приложения управляющих и возмущающих воздействий) и нескольких выходов, определяемых регулируемыми величинами.

Многомерный объект описывается системой уравнений, которую удобно представлять в матричной форме.

Введем одностолбцовую m -мерную матрицу регулируемых величин

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \| y_1 y_2 \dots y_m \|', \quad (5.64)$$

одностолбцовую k -мерную матрицу управляющих величин

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} = \| u_1 u_2 \dots u_k \|' \quad (5.65)$$

и одностолбцовую l -мерную матрицу возмущающих воздействий

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix} = \| f_1 f_2 \dots f_l \|'. \quad (5.66)$$

Здесь штрихом обозначена операция транспонирования матрицы.

Если регулируемые величины имеют одинаковую физическую размерность и могут трактоваться как проекции некоторого вектора на оси координат, матрица-столбец может отождествляться с этим вектором. Тогда можно говорить о векторе регулируемых величин.

Если регулируемые величины имеют разную физическую размерность, то переход от матрицы-столбца к вектору в принципе может быть сделан и в этом случае, если ввести в матрицу-столбец весовые коэффициенты, уравнивающие размерности отдельных составляющих. Однако такой переход не является единственным, а имеет бесчисленное количество вариантов.

Аналогичным образом при равенстве физических размерностей отдельных составляющих матриц-столбцов управляющих величин и возмущений может быть введен *вектор управления* и *вектор возмущения*. При разных физических размерностях отдельных составляющих матриц-столбцов переход к вектору возможен, но не будет единственным.

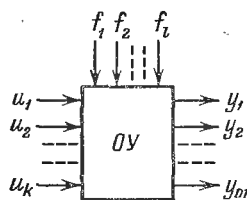


Рис. 5.12.

Линеаризованные уравнения движения многомерного объекта могут быть записаны в матричном виде:

$$q(p) y(t) = r(p) u(t) + s(p) f(t). \quad (5.67)$$

Здесь введена квадратная матрица операторных коэффициентов

$$q(p) = \| q_{ji}(p) \|_{m \times m} = \left\| \begin{array}{cccc} q_{11}(p) & q_{12}(p) & \dots & q_{1m}(p) \\ q_{21}(p) & q_{22}(p) & \dots & q_{2m}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{m1}(p) & q_{m2}(p) & \dots & q_{mm}(p) \end{array} \right\| \quad (5.68)$$

и прямоугольные матрицы операторных коэффициентов

$$r(p) = \| r_{ji}(p) \|_{m \times k} = \left\| \begin{array}{cccc} r_{11}(p) & r_{12}(p) & \dots & r_{1k}(p) \\ r_{21}(p) & r_{22}(p) & \dots & r_{2k}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1}(p) & r_{m2}(p) & \dots & r_{mk}(p) \end{array} \right\|, \quad (5.69)$$

$$s(p) = \| s_{ji}(p) \|_{m \times l} = \left\| \begin{array}{cccc} s_{11}(p) & s_{12}(p) & \dots & s_{1l}(p) \\ s_{21}(p) & s_{22}(p) & \dots & s_{2l}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m1}(p) & s_{m2}(p) & \dots & s_{ml}(p) \end{array} \right\|. \quad (5.70)$$

Если в выражениях (5.64) — (5.70) перейти к изображениям Лапласа при нулевых начальных условиях, то матричное уравнение (5.67) может быть записано для изображений в следующем виде:

$$Q(p) Y(p) = R(p) U(p) + S(p) F(p). \quad (5.71)$$

Здесь $Y(p)$, $U(p)$ и $F(p)$ — матрицы-столбцы изображений регулируемых величин, управляющих величин и возмущений.

В уравнение (5.71) входят также квадратная матрица $Q(p) = \| q_{ji}(p) \|_{m \times m}$ и прямоугольные матрицы $R(p) = \| r_{ji}(p) \|_{m \times k}$ и $S(p) = \| s_{ji}(p) \|_{m \times l}$.

Если матрица $Q(p)$ неособая, т. е. определитель $|Q(p)| \neq 0$, то, умножив левую и правую части (5.71) слева на обратную матрицу $Q^{-1}(p)$, получим

$$Y(p) = W_o(p) U(p) + W_f(p) F(p). \quad (5.72)$$

Здесь введены матрицы передаточных функций объекта для управляющих величин

$$W_o(p) = \| W_{ji}^o(p) \|_{m \times k} = \frac{\tilde{Q}(p)}{|Q(p)|} R(p) \quad (5.73)$$

и для возмущений

$$W_f(p) = \| W_{ji}^f(p) \|_{m \times l} = \frac{\tilde{Q}(p)}{|Q(p)|} S(p). \quad (5.74)$$

В (5.74) символом $\tilde{Q}(p) = \| Q_{ji}(p) \|'_{m \times m}$ обозначена матрица, присоединенная для матрицы $Q(p)$, а $Q_{ji}(p)$ — алгебраическое дополнение определителя $|Q(p)|$.

Формулы (5.72) — (5.74) позволяют получить связь между регулируемыми величинами и управляющими и возмущающими воздействиями. Так,

например, если $m = 3$, $k = 2$ и $l = 0$, то из (5.72) и (5.73) можно получить для изображений

$$\left. \begin{aligned} Y_1(p) &= W_{11}^0(p) U_1(p) + W_{12}^0(p) U_2(p), \\ Y_2(p) &= W_{21}^0(p) U_1(p) + W_{22}^0(p) U_2(p), \\ Y_3(p) &= W_{31}^0(p) U_1(p) + W_{32}^0(p) U_2(p). \end{aligned} \right\} \quad (5.75)$$

Если в матрице передаточных функций объекта (5.73) или (5.74) для каждого элемента матрицы (частной передаточной функции) найти обратное преобразование Лапласа (оригинал), то будет получена так называемая матрица Коши (матрица весовых функций). Запишем ее, например, для управляющих воздействий:

$$w_o(t) = \begin{Bmatrix} w_{11}(t) & w_{12}(t) & \dots & w_{1k}(t) \\ w_{21}(t) & w_{22}(t) & \dots & w_{2k}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{m1}(t) & w_{m2}(t) & \dots & w_{mk}(t) \end{Bmatrix}. \quad (5.76)$$

Если в момент времени $t = 0$ на все входы поступают управляющие воздействия $u_i(t)$, где $i = 1, 2, \dots, k$, то изменение j -й регулируемой величины может быть записано посредством интеграла Дюамеля — Карсона (4.9) на основании принципа суперпозиции:

$$y_j(t) = \sum_{i=1}^k \int_0^t u_i(\tau) w_{ji}(t-\tau) d\tau.$$

На рис. 5.13 изображена условная структурная схема замкнутой многомерной системы регулирования. На схеме все указанные символы соответствуют матрицам: $g(t)$ — задающих воздействий, $y(t)$ — регулируемых величин, $x(t)$ — ошибок для каждой регулируемой величины, $u(t)$ — управляющих воздействий, $f(t)$ — возмущений, $W_o(p)$ — передаточных функций для управлений, $W_f(p)$ — передаточных функций для возмущений. Кроме того, введена прямоугольная матрица передаточных функций регулирующего устройства $W_{\text{per}}(p) = \|k_{ji}(p)\|_{k \times m}$, которая определяет используемые законы регулирования. Она дает связь между изображениями управляющих величин и ошибок:

$$U(p) = \begin{Bmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \\ \vdots \\ U_k(p) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11}(p) & k_{12}(p) & \dots & k_{1m}(p) \\ k_{21}(p) & k_{22}(p) & \dots & k_{2m}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{k1}(p) & k_{k2}(p) & \dots & k_{km}(p) \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \\ \vdots \\ X_m(p) \end{Bmatrix}. \quad (5.77)$$

Уравнения многомерной системы (рис. 5.13) могут быть получены действиями, аналогичными одномерному случаю (§ 5.2).

Матрица передаточных функций разомкнутой по всем каналам системы

$$W(p) = W_o(p) W_{\text{per}}(p). \quad (5.78)$$

Характеристическая матрица системы представляет собой квадратную матрицу размером $m \times m$:

$$D(p) = I + W(p) = \| d_{ji}(p) \|_{m \times m}. \quad (5.79)$$

Здесь I — единичная матрица размером $m \times m$, т. е. квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, а остальные — нулю.

Характеристическое уравнение системы получается приравниванием нулю определителя характеристической матрицы:

$$|D(p)| = |I + W(p)| = 0. \quad (5.80)$$

Заметим, что в случае, когда многомерная система представляет совокупность m независимых одномерных систем, характеристическая матрица будет диагональной и определитель системы тогда равен произведению частных определителей каждой из систем, т. е. $|D(p)| = |D_1(p)| \times \dots \times |D_m(p)|$. В этом случае общее характеристическое уравнение распадается на m независимых характеристических уравнений $|D_i(p)| = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Матрицы передаточных функций замкнутой системы, замкнутой системы по ошибке и замкнутой системы по возмущениям при условии, что матрица $D(p)$ неособая, что означает независимость исходных дифференциальных уравнений, могут быть определены из выражений

$$\Phi(p) = D^{-1}(p) W(p) = \frac{\tilde{D}(p)}{|D(p)|} W(p), \quad (5.81)$$

$$\Phi_x(p) = D^{-1}(p) = \frac{\tilde{D}(p)}{|D(p)|}, \quad (5.82)$$

$$\Phi_f(p) = D^{-1}(p) W_f(p) = \frac{\tilde{D}(p)}{|D(p)|} W_f(p). \quad (5.83)$$

Здесь $\tilde{D}(p) = \| D_{ji}(p) \|_{m \times m}$ — матрица, присоединенная для матрицы $D(p)$, а $D_{ji}(p)$ — алгебраическое дополнение определителя $|D(p)|$.

Полученные выражения для матриц передаточных функций замкнутой системы позволяют использовать формулы, аналогичные формулам § 5.2, но записанные уже для матриц-столбцов ошибок и регулируемых величин. Так, например, для матрицы изображений ошибок имеем

$$X(p) = \begin{Bmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \\ \vdots \\ X_m(p) \end{Bmatrix} = \Phi_x(p) G(p) - \Phi_f(p) F(p). \quad (5.84)$$

На рис. 5.14 изображены для иллюстрации некоторые структурные схемы двумерных систем регулирования. Схема на рис. 5.14, а соответствует так называемому сепаратному регулированию объекта с двумя входами и двумя выходами. Матрица передаточных функций регулирующего устройства в этом случае получается диагональной. Матрицу изображений управляющих величин для этого случая можно представить в виде

$$\begin{Bmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \end{Bmatrix} = W_{\text{пер}}(p) X(p) = \begin{Bmatrix} k_{11}(p) & 0 \\ 0 & k_{22}(p) \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \end{Bmatrix}. \quad (5.85)$$

Схемы на рис. 5.14, б и в соответствуют комбинированному регулированию. В этом случае

$$\begin{Bmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11}(p) & k_{12}(p) \\ k_{21}(p) & k_{22}(p) \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \end{Bmatrix}. \quad (5.86)$$

Исходные дифференциальные уравнения многомерной системы регулирования могут быть также представлены в форме Коши в матричной записи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu + Ef, \\ y &= Cx, \\ u &= Dx. \end{aligned} \right\} \quad (5.87)$$

В этих выражениях $x = \|x_i\|_{1 \times n}$ — матрица-столбец фазовых координат системы, n — порядок дифференциального уравнения, $y = \|y_i\|_{1 \times m}$ — матрица-столбец регулируемых величин, $u = \|u_i\|_{1 \times k}$ — матрица-столбец управляющих величин, $f = \|f_i\|_{1 \times l}$ — матрица-столбец возмущающих и задающих воздействий, $A = \|a_{ji}\|_{n \times n}$ — квадратная матрица коэффициентов, $B = \|b_{ji}\|_{n \times k}$, $C = \|c_{ji}\|_{m \times n}$, $D = \|d_{ji}\|_{k \times n}$ и $E = \|e_{ji}\|_{n \times l}$ — прямоугольные матрицы коэффициентов.

Величины x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) представляют собой некоторые абстрактные величины, задание которых полностью определяет текущее состояние системы. Эти величины называются *фазовыми координатами* системы. Состояние системы может быть также отождествлено с положением изображающей точки в n -мерном пространстве, которое носит название *пространства состояния*.

При переходе к изображениям и совместном решении система уравнений может быть приведена, например, к виду (5.84).

Характеристическое уравнение, соответствующее системе (5.87), имеет вид

$$|Ip - A - BD| = 0, \quad (5.88)$$

где I — единичная матрица $n \times n$.

Векторная запись исходных уравнений. Введем в рассмотрение n -мерное векторное пространство состояния, которое определяется базисом (набором векторов) $e = \|e_1 e_2 \dots e_n\|$ так, что с матрицей-столбцом фазовых координат $x = \|x_1 x_2 \dots x_n\|'$ может быть отождествлен вектор состояния

$$\bar{x} = e_1 x_1 + e_2 x_2 + \dots + e_n x_n. \quad (5.89)$$

Длины векторов базиса $|e_i|$ ($i = 1, \dots, n$) играют роль весовых коэффициентов в переходе от матрицы-столбца фазовых координат к вектору состояния. Заметим, что в общем случае, когда рассматриваются абсолютные, а не относительные значения фазовых координат, их физические размерности не совпадают и длины векторов базиса не могут считаться единичными.

Аналогичным образом может быть введено векторное пространство управления, возмущения и выходных величин.

При введении векторов $\bar{x}$, $\bar{u}$, $\bar{f}$ и $\bar{y}$ исходные уравнения системы могут быть записаны в векторной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= A\bar{x} + B\bar{u} + E\bar{f}, \\ \bar{y} &= C\bar{x}, \\ \bar{u} &= D\bar{x}. \end{aligned} \right\} \quad (5.90)$$

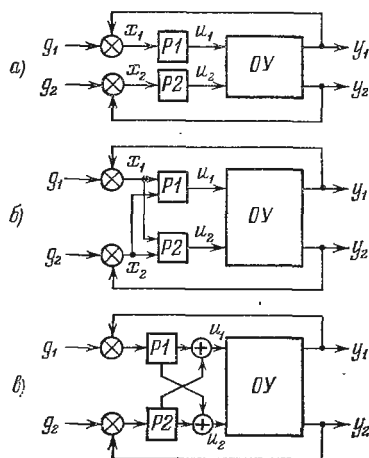


Рис. 5.14.

Фазовые координаты, а также составляющие управления, возмущения и выходные координаты могут быть получены как проекции соответствующих векторов на оси, определяющие выбранные векторные пространства.

При использовании относительных (безразмерных) величин в качестве базиса может приниматься совокупность ортогональных векторов единичной длины, т. е. обычное n -мерное евклидово пространство.

§ 5.6. Управляемость и наблюдаемость

Рассмотрим n -мерное пространство состояния X , в котором каждому состоянию системы соответствует некоторое положение изображающей точки, определяемое значениями фазовых координат x_i ($i = 1, \dots, n$).

Пусть в пространстве состояния X заданы два множества $\Gamma_1 \subset X$ и $\Gamma_2 \subset X$. Рассматриваемая система будет *управляемой*, если существует такое управление $u(t) = \|u_1 u_2 \dots u_h\|'$, определенное на конечном интервале времени $0 \leq t \leq T$, которое переводит изображающую точку в пространстве X из подобласти Γ_1 в подобласть Γ_2 .

Можно сузить определение управляемости и понимать под ней возможность перевода изображающей точки из любой области пространства состояния X в начало координат. Система будет полностью управляемой, если каждое состояние управляемо в этом смысле.

От пространства состояния X перейдем к другому пространству $\tilde{X}$ посредством неособого преобразования $\tilde{x} = Rx$, причем $|R| \neq 0$, где R — матрица коэффициентов $n \times n$.

Тогда вместо (5.87) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u + \tilde{E}f, \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}, \\ u &= \tilde{D}\tilde{x}. \end{aligned} \right\} \quad (5.94)$$

Здесь использованы преобразованные матрицы коэффициентов: $\tilde{A} = RAR^{-1}$, $\tilde{B} = RB$, $\tilde{C} = CR^{-1}$, $\tilde{D} = DR^{-1}$ и $\tilde{E} = RE$.

Введение новых фазовых координат посредством неособого преобразования $\tilde{x} = Rx$ приводит к эквивалентным системам различной структуры. При некотором преобразовании может оказаться, что часть управляющих величин не входит в некоторые дифференциальные уравнения (5.94) или часть фазовых координат не участвует в формировании выхода y . В первом случае система будет не полностью управляемой, а во втором — не полностью наблюдаемой.

В случае не полностью управляемой системы ее исходные уравнения (5.87) могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + Bu, \\ \frac{dx^2}{dt} &= A_{22}x^2, \\ y &= Cx, \\ u &= Dx. \end{aligned} \right\} \quad (5.92)$$

Это иллюстрирует рис. 5.15. Набор фазовых координат x^1 соответствует управляемой части фазовых координат, а набор x^2 — неуправляемой части.

Р. Калманом [50] был доказан критерий управляемости, который гласит, что размерность v управляемой части системы, то есть порядок первой группы уравнений (5.91), совпадает с рангом матрицы

$$U = \| B, AB, (A)^2 B \dots (A)^{n-1} B \|_{n \times kn}. \quad (5.93)$$

При $v = n$ система полностью управляема, при $0 < v < n$ не полностью управляема и при $v = 0$ полностью неуправляема.

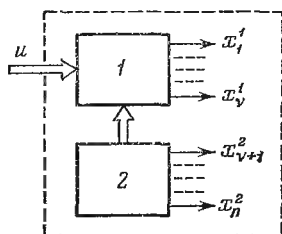


Рис. 5.15.

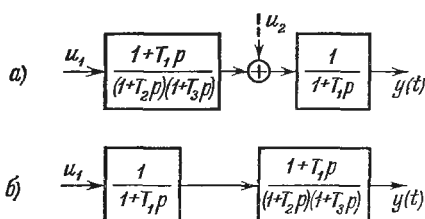


Рис. 5.16.

На рис. 5.16, а изображен простейший пример. Если рассматривать выходную величину $y(t)$ при ненулевых начальных условиях, то можно записать

$$y(t) = y_{\text{в}}(t) + C_1 e^{-at} + C_2 e^{-bt} + C_3 e^{-ct}, \quad (5.94)$$

где $a = T_1^{-1}$, $b = T_2^{-1}$ и $c = T_3^{-1}$, C_1 , C_2 и C_3 определяются начальными условиями до приложения входного сигнала $u_1(t)$, а $y_{\text{в}}(t)$ — вынужденная составляющая. Система устойчива при $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.

Если начальные условия до приложения $u_1(t)$ были нулевыми, то поведение системы может быть рассчитано по передаточной функции

$$W_1(p) = \frac{1+T_1 p}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)(1+T_3 p)} = \frac{1}{(1+T_2 p)(1+T_3 p)}. \quad (5.95)$$

В этом случае по интегралу Дюамеля — Карсона

$$y(t) = \int_0^t u_1(\tau) w_1(t-\tau) d\tau = y_{\text{в}}(t) + C_2 e^{-bt} + C_3 e^{-ct}. \quad (5.96)$$

Как следует из выражений (5.95) и (5.96), система во втором случае описывается дифференциальным уравнением не третьего, а второго порядка. Система будет устойчивой даже при $a < 0$.

Рассмотренная система будет не полностью управляемой. В ней оказывается, что $n = 3$, а $v = 2$.

При введении второй составляющей управления $u_2(t)$ система оказывается полностью управляемой, и ей будет соответствовать матрица-строка передаточных функций по управлению

$$W(p) = \| W_1(p), W_2(p) \| = \left\| \frac{1}{(1+T_2 p)(1+T_3 p)}, \frac{1}{1+T_1(p)} \right\|.$$

В случае не полностью наблюдаемой системы ее уравнения могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= A_{11}x^1 + B_1 u, \\ \frac{dx^2}{dt} &= A_{21}x^1 + A_{22}x^2 + B_2 u, \\ y &= C_1 x^1, \\ u &= D_1 x^1. \end{aligned} \right\} \quad (5.97)$$

Эти уравнения отличаются от (5.87) тем, что фазовые координаты группы x^2 не входят ни в выражения для y и u , ни в первое уравнение, куда входят только фазовые координаты группы x^1 . Группа фазовых координат x^2 относится к ненаблюдаемым. Это иллюстрирует рис. 5.17.

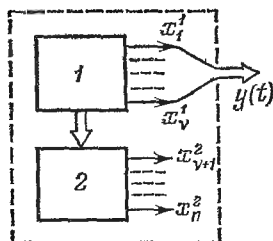


Рис. 5.17.

Р. Калманом [50] показано, что порядок первой группы уравнений v совпадает с рангом матрицы

$$V = \| C', A'C', (A')^2 C', \dots, (A')^{n-1} C' \|_{n \times mn}. \quad (5.98)$$

При $v = n$ система полностью наблюдаема, при $0 < v < n$ — не полностью наблюдаема и при $v = 0$ полностью ненаблюдаема.

На рис. 5.16, б изображен простейший пример. Для него легко показать, что в формировании выхода участвуют только две фазовые координаты из трех.

В общем случае система может содержать четыре группы фазовых координат: управляемую, но ненаблюдаемую часть x^1 , управляемую и наблюдаемую часть x^2 , неуправляемую и ненаблюдаемую часть x^3 и неуправляемую, но наблюдаемую часть x^4 .

Исходные уравнения системы (5.87) в этом случае можно для самого общего случая записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + A_{13}x^3 + A_{14}x^4 + B_1u, \\ \frac{dx^2}{dt} &= A_{22}x^2 + A_{24}x^4 + B_2u, \\ \frac{dx^3}{dt} &= A_{33}x^3 + A_{34}x^4, \\ \frac{dx^4}{dt} &= A_{44}x^4, \\ y &= C_2x^2 + C_4x^4, \\ u &= D_2x^2 + D_4x^4. \end{aligned} \right\} \quad (5.99)$$

Левая часть характеристического уравнения (5.88) системы в этом случае содержит четыре сомножителя:

$$\begin{aligned} |Ip - A - BD| &= \begin{vmatrix} Ip - A_{11} & -A_{12} - B_1D_2 & -A_3 & -A_{14} - B_1D_4 \\ 0 & Ip - A_{22} - B_2D_2 & 0 & -A_{24} - B_2D_4 \\ 0 & 0 & Ip - A_{33} & -A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & Ip - A_{44} \end{vmatrix} = \\ &= |Ip - A_{11}| \cdot |Ip - A_{22} - B_2D_2| \cdot |Ip - A_{33}| \cdot |Ip - A_{44}| = 0. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Управляемость и наблюдаемость системы в изложенном смысле не всегда совпадает с практическими представлениями. Даже если какая-либо фазовая координата и может быть вычислена по доступным для измерения выходным величинам, обработка измеренных величин может быть, во-первых, сложной и, во-вторых, она может быть затруднена наличием помех. Поэтому практически наблюдаемыми координатами обычно считаются те из них, которые могут быть непосредственно измерены датчиками различных типов.

или коэффициент передачи потенциометра. Напряжение на выходе чувствительного элемента равно разности

$$u = u_1 - u_2 = k_1 (\vartheta_1 - \vartheta_2) = k_1 \vartheta. \quad (5.101)$$

Это дает передаточную функцию чувствительного элемента

$$W_1(p) = k_1. \quad (5.102)$$

Электронные усилители. Считая усилители безынерционными, можно записать их передаточные функции в виде

$$W_2(p) = k_2, \quad (5.103)$$

$$W_3(p) = k_3, \quad (5.104)$$

где k_2 и k_3 — коэффициенты усиления по напряжению первого и второго усилителей.

Обмотка возбуждения генератора. Дифференциальное уравнение можно записать на основе второго закона Кирхгофа:

$$L_B \frac{di_B}{dt} + r_B i_B = u_{\text{вых}}, \quad (5.105)$$

где r_B и L_B — суммарные сопротивление и индуктивность цепи возбуждения с учетом выходного каскада усилителя.

Приведем это уравнение к стандартному виду:

$$(T_B p + 1) i_B = \frac{u_{\text{вых}}}{r_B} = k_4 u_{\text{вых}}, \quad (5.106)$$

где $T_B = \frac{L_B}{r_B}$ — постоянная времени цепи возбуждения.

Отсюда находим передаточную функцию обмотки возбуждения:

$$W_4(p) = \frac{k_4}{1 + T_B p}. \quad (5.107)$$

Генератор. Для прямолинейной части характеристики намагничивания можно положить

$$e = k_5 i_B, \quad (5.108)$$

где k_5 — коэффициент пропорциональности между э. д. с. генератора и током возбуждения в линейной части характеристики. Отсюда получаем передаточную функцию генератора:

$$W_5(p) = k_5. \quad (5.109)$$

Двигатель. Так как при фиксированном возбуждении двигатель имеет две степени свободы, то необходимо иметь для него два исходных дифференциальных уравнения. Первое уравнение может быть получено, если записать второй закон Кирхгофа для цепи якоря:

$$L_A \frac{di_A}{dt} + r_A i_A + C_E \Phi \Omega = e. \quad (5.110)$$

Второе уравнение представляет собой закон равновесия моментов на валу двигателя:

$$C_M \Phi i_A - M = J \frac{d\Omega}{dt}. \quad (5.111)$$

В этих уравнениях L_A и r_A — индуктивность и сопротивление цепи якоря (суммарные), C_E и C_M — коэффициенты пропорциональности, J — приведенный к оси двигателя суммарный момент инерции, Ω — угловая скорость двигателя, Φ — поток возбуждения, M — момент нагрузки, приведенный к валу двигателя.

Так как поток возбуждения двигателя $\Phi = \text{const}$, то можно положить $C'_E \Phi = C_E$ и $C'_M \Phi = C_M$.

Вводя оператор дифференцирования и решая уравнения (5.110) и (5.114) совместно, получаем

$$(T_{я} T_{м} p^2 + T_{м} p + 1) \Omega = \frac{e}{C_E} - \frac{r_{я} (1 + T_{я} p) M}{C_E C_M}. \quad (5.112)$$

Здесь введены две постоянные времени двигателя: электромеханическая постоянная времени

$$T_{м} = \frac{r_{я} J}{C_E C_M} \quad (5.113)$$

и постоянная времени якорной цепи

$$T_{я} = \frac{L_{я}}{r_{я}}. \quad (5.114)$$

Коэффициенты пропорциональности C_E и C_M могут быть найдены из соотношений

$$C'_E \Phi = C_E = \frac{U_{ном}}{\Omega_{хх}},$$

$$C'_M \Phi = C_M = \frac{M_{ном}}{I_{я. ном}},$$

где $U_{ном}$ и $I_{я. ном}$ — номинальные значения напряжения и якорного тока двигателя, $M_{ном}$ и $\Omega_{хх}$ — номинальный вращающий момент и скорость идеального холостого хода двигателя.

Учитывая эти соотношения, электромеханическую постоянную времени можно представить в другом виде:

$$T_{м} = \frac{r_{я}}{r_{ном}} \frac{\Omega_{хх}}{M_{ном}} J = \frac{\Omega_{хх}}{M_{кз}} J, \quad (5.115)$$

где $r_{ном} = \frac{U_{ном}}{I_{я. ном}}$ — номинальное сопротивление якоря двигателя, $M_{кз}$ — момент короткого замыкания двигателя (вращающий момент заторможенного двигателя).

В формуле (5.115) перейдем к углу поворота двигателя α , который связан с угловой скоростью Ω зависимостью $\Omega = p\alpha$:

$$(T_{я} T_{м} p^2 + T_{м} p + 1) p\alpha = \frac{e}{C_E} - \frac{r_{я} (1 + T_{я} p) M}{C_E C_M}. \quad (5.116)$$

Из последнего выражения, сравнивая его с формулой (5.9), можно получить передаточную функцию двигателя, связывающую его угол поворота α с э. д. с. генератора:

$$W_6(p) = \frac{1}{C_E} \frac{1}{p(1 + T_{м} p + T_{я} T_{м} p^2)}, \quad (5.117)$$

и передаточную функцию по возмущению, связывающую угол поворота α с моментом M , приложенным к его оси:

$$W_f(p) = \frac{r_{я}}{C_E C_M} \frac{-(1 + T_{я} p)}{p(1 + T_{м} p + T_{я} T_{м} p^2)}. \quad (5.118)$$

Редуктор. Считая редуктор линейным безынерционным звеном, запишем его передаточную функцию в виде

$$W_i(p) = \frac{1}{i}, \quad (5.119)$$

где $i > 1$ — передаточное отношение редуктора.

Результирующий коэффициент усиления основной цепи с учетом действия местной обратной связи, называемый также добротностью по скорости, будет

$$K = \frac{K'}{1+k_{oc}} = \frac{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5}{i C_E (1+k_{oc})} \left[\frac{1}{сек} \right]. \quad (5.127)$$

Найдем операторные выражения для регулируемой величины ϑ_2 и ошибки ϑ по общим формулам (5.15) и (5.16). Для этого необходимо найти передаточную функцию по возмущению $W_f(p)$, связывающую угол поворота ϑ_2 с возмущением M при разомкнутой главной цепи, но замкнутой цепи местной обратной связи. Из структурной схемы (рис. 5.19) при разомкнутой главной обратной связи и при разомкнутой местной обратной связи будет

$$\vartheta_2 = \frac{W'_f(p)}{i} M, \quad (5.128)$$

где i — передаточное отношение редуктора.

При замыкании местной обратной связи в соответствии с формулой (5.59) получаем

$$\vartheta_2 = \frac{W'_f(p)}{i} \frac{1}{1+W_3(p)W_4(p)W_5(p)W_6(p)W_8(p)} M, \quad (5.129)$$

откуда искомая передаточная функция по возмущению

$$\begin{aligned} W_f(p) &= \frac{W'_f(p)}{i} \frac{1}{1+W_3(p)W_4(p)W_5(p)W_6(p)W_8(p)} = \\ &= \frac{r_H}{i C_E C_M p [(1+T_{BP})(1+T_{MP}+T_{BT} T_{MP}^2) + k_{oc}]} = \\ &= \frac{r_H}{i C_E C_M (1+k_{oc}) p (1+ap+bp^2+cp^3)}, \end{aligned} \quad (5.130)$$

где k_{oc} , a , b и c определяются формулами (5.124) и (5.126).

Имея теперь значения передаточных функций $W(p)$ и $W_f(p)$, по общим формулам (5.15) и (5.16) находим операторное выражение для регулируемой величины

$$\vartheta_2 = \frac{K \vartheta_1}{p(1+ap+bp^2+cp^3)+K} - \frac{r_H}{i C_M C_E (1+k_{oc})} \frac{(1+T_{HP})(1+T_{BP}) M}{p(1+ap+bp^2+cp^3)+K} \quad (5.131)$$

и для ошибки

$$\vartheta = \frac{p(1+ap+bp^2+cp^3) \vartheta_1}{p(1+ap+bp^2+cp^3)+K} + \frac{r_H}{i C_E C_M (1+k_{oc})} \frac{(1+T_{HP})(1+T_{BP}) M}{p(1+ap+bp^2+cp^3)+K}. \quad (5.132)$$

Из (5.132) можно, в частности, получить установившуюся ошибку в неподвижном положении при $\vartheta_1(t) = \text{const}$ и $M(t) = M_0 = \text{const}$. Для этого необходимо в (5.175) положить $p = 0$:

$$\vartheta_{ст} = \frac{r_H M_0}{i C_E C_M (1+k_{oc}) K} = \frac{r_H M_0}{C_M k_1 k_2 k_3 k_4 k_5} = \frac{M_0}{K_M}. \quad (5.133)$$

Здесь введено понятие, так называемой добротности по моменту (или крутизны по моменту), которая равна отношению приведенного к оси двигателя момента нагрузки к возникающей при этом статической (моментной) ошибке:

$$K_M = \frac{M_0}{\vartheta_{ст}} = \frac{C_M k_1 k_2 k_3 k_4 k_5}{r_H}. \quad (5.134)$$

Из формулы (5.133) видно, что в неподвижном положении ошибка определяется только моментом нагрузки (возмущающим воздействием). Это

означает, что рассматриваемая система обладает астатизмом относительно задающего воздействия ϑ_1 и статизмом относительно возмущающего воздействия M .

Заметим, что в формулу (5.133) входит момент нагрузки, приведенный к валу двигателя. Поэтому в эту формулу не вошло передаточное отношение редуктора. Если перейти к моменту нагрузки оси управляемого объекта, то в знаменателе последнего выражения (5.133) появится в качестве множителя i . В соответствии с этим можно сформулировать другое понятие добротности по моменту, как отношение момента нагрузки на оси управляемого объекта к установившейся ошибке.

При движении с постоянной скоростью $p\vartheta_1 = \Omega_1 = \text{const}$ и $M = M_0 = \text{const}$ из (5.132) получается установившаяся ошибка

$$\vartheta_c = \frac{\Omega_1}{K} + \frac{M_0}{K_M}. \quad (5.135)$$

Здесь можно ввести понятие добротности по скорости, которая является коэффициентом пропорциональности между скоростью движения следящей системы и возникающей при этом установившейся ошибкой (при отсутствии возмущения). В данном случае она равна общему коэффициенту усиления по разомкнутой цепи:

$$K_\Omega = \frac{\Omega_1}{\vartheta_c} = K \quad \text{при} \quad M_0 = 0.$$

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 6.1. Понятие об устойчивости систем регулирования

Понятие *устойчивости* системы регулирования связано со способностью возвращаться в состояние равновесия после исчезновения внешних сил, которые вывели ее из этого состояния. Наглядно устойчивость равновесия иллюстрируется рис. 6.1, а, на котором изображен шар, лежащий в некотором углублении. При всяком отклонении его от положения равновесия он будет стремиться возвратиться к нему точно (при отсутствии сил трения) или к некоторой конечной области, окружающей предшествующее положение равновесия (при наличии сил трения). Такое положение шара будет устойчивым.

На рис. 6.1, б изображен другой случай, когда положение шара оказывается неустойчивым. Рис. 6.1, в соответствует случаю безразличного положения равновесия.

Можно ввести понятия о невозмущенном состоянии равновесия, соответствующем точке A_0 на рис. 6.1, а, и возмущенном состоянии равновесия (точка A_2). После прекращения действия внешних сил шар возвратится в точку A_0 или A_1 . Условие устойчивости здесь можно сформулировать так: система называется устойчивой, если из возмущенного состояния равновесия она перейдет в некоторую конечную область, окружающую невозмущенное состояние равновесия.

Понятие устойчивости можно распространить и на случай движения некоторой системы. Пусть ее состояние определяется независимыми координатами $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$. Заданное движение системы определяется некоторым законом изменения координат: $x_{10}(t)$, $x_{20}(t)$, ..., $x_{n0}(t)$.

Аналогично случаю равновесия положения заданное движение можно назвать *невозмущенным движением*. Приложение внешних сил к рассматриваемой системе вызовет отклонение действительного движения от заданного:

$$x_1(t) \neq x_{10}(t), \quad x_2(t) \neq x_{20}(t) \quad \text{и т. д.}$$

Это движение будет *возмущенным*.

Заданное невозмущенное движение будет устойчивым, если в результате приложения внешних сил, которые затем снимаются, возмущенное движение по истечении некоторого времени войдет в заданную область:

$$|x_i(t) - x_{i0}(t)| \leq \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Рассмотрим вопрос устойчивости более подробно. Пусть система регулирования описывается нелинейными дифференциальными уравнениями

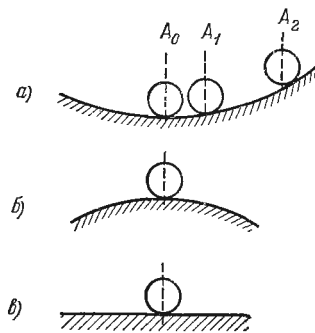


Рис. 6.1.

в форме Коши

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6.1)$$

Если при $t = t_0$ заданы начальные значения x_{i0} ($i = 1, 2, \dots, n$), то решение может быть представлено в виде $x_i = x_i(x_{10}, \dots, x_{n0})$, где $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть установившиеся процессы в системе характеризуются координатами $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$. Введем также отклонения координат $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ ($i = 1, \dots, n$), характеризующие отклонения процесса от установившегося. Систему уравнений (6.1) перепишем для отклонений:

$$\frac{d\Delta x_i}{dt} = f_i(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n), \quad (6.2)$$

где f_i — некоторые нелинейные функции. Эти уравнения называются *уравнениями возмущенного движения*. Их тривиальные решения $\Delta x_i^0 = 0$ соответствуют невозмущенному движению, так как при этом $x_i = x_i^0$.

Начальные значения отклонений Δx_{i0} носят название *возмущений*. Решение системы (6.2) для некоторых начальных отклонений $\Delta x_i = \Delta x_i(\Delta x_{10}, \dots, \Delta x_{n0}, t)$ представляет собой *возмущенное движение*.

А. М. Ляпунов [82] дал следующее определение устойчивости.

Невозмущенное движение (при $\Delta x_i^0 = 0$) называется устойчивым по отношению к переменным x_i , если при всяком заданном положительном числе A^2 , как бы мало оно ни было, можно выбрать другое положительное число $\lambda^2 (A^2)$ так, что для всех возмущений Δx_{i0} , удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=0}^n \mu_i^2 \Delta x_{i0}^2 \leq \lambda^2, \quad (6.3)$$

возмущенное движение (6.2) будет для времени $t \geq T$ удовлетворять неравенству

$$\sum_{i=0}^n \mu_i^2 \Delta x_i^2 \leq A^2. \quad (6.4)$$

Здесь μ_i — некоторые весовые коэффициенты, необходимые для уравнивания физических размерностей величин Δx_i .

Геометрическая интерпретация этого условия заключается в следующем. В пространстве координат $\mu_i \Delta x_i$ построим две сферы с радиусами λ и A . Система будет устойчивой, если при возмущениях, не выведших изображающую точку $M(\Delta x_{10}, \dots, \Delta x_{n0})$ из пределов сферы λ , возмущенное движение будет таково, что, начиная с некоторого времени $t \geq T$, изображающая точка $M(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ будет в пределах сферы A .

Если с течением времени изображающая точка стремится к началу координат, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то система *асимптотически устойчива*.

Несколько другое изложение этой теоремы будет дано ниже в § 16.1.

Перейдем теперь к вопросу устойчивости линейных, а точнее, линеаризованных систем регулирования.

Рассмотрим дифференциальное уравнение движения линеаризованной системы автоматического регулирования, записанное для регулируемой величины $y(t)$ при наличии задающего воздействия $g(t)$ и при равенстве нулю

возмущающих воздействий:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) g(t). \quad (6.5)$$

Коэффициенты $a_0, \dots, a_n$ и $b_0, \dots, b_m$ представляют собой постоянные величины, а оператор $p = \frac{d}{dt}$.

Дифференциальное уравнение движения системы регулирования можно записать и для возмущающего воздействия. В этом случае левая часть (6.5) останется без изменения, а правая часть будет иметь иной вид. В общем виде дифференциальное уравнение, определяющее изменение регулируемой величины, может быть записано так, что в правой его части будет находиться некоторая функция времени $f(t)$.

Характер переходных процессов в системе определяется видом левой части дифференциального уравнения (6.5). Поэтому для определения качественной картины переходных процессов является практически безразличным, записать ли исходное дифференциальное уравнение для управляющего или возмущающего воздействия.

Уравнение (6.5) может с равным успехом быть записано для ошибки регулирования $x(t)$. При этом левая часть уравнения (6.5) полностью сохраняет свой вид.

Процесс регулирования определяется решением дифференциального уравнения как сумма двух решений — *частного решения* неоднородного уравнения (6.5) с правой частью и *общего решения* уравнения (6.5) без правой части, т. е. с правой частью, равной нулю:

$$y(t) = y_{\text{частн}}(t) + y_{\text{общ}}(t) \quad (6.6)$$

В случае $y_{\text{частн}}(t) = \text{const}$ это будет *установившееся значение*. Первое слагаемое (6.6) называют также *вынужденным решением* $y_{\text{в}}(t)$, а второе слагаемое — *переходной составляющей* $y_{\text{п}}(t)$. Тогда формула (6.6) может быть записана в виде

$$y(t) = y_{\text{в}}(t) + y_{\text{п}}(t).$$

Система будет называться *устойчивой*, если с течением времени при $t \rightarrow \infty$ переходная составляющая будет стремиться к нулю: $y_{\text{п}}(t) \rightarrow 0$. Найдем эту составляющую из (6.5). Для этой цели необходимо решить дифференциальное уравнение без правой части

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0. \quad (6.7)$$

Общее решение ищется в виде

$$y_{\text{п}}(t) = y_{\text{общ}}(t) = C e^{\delta t}.$$

Дифференцируя это выражение n раз и подставляя в (6.7), получаем после сокращения на общий множитель $C e^{\delta t}$

$$a_0 \delta^n + a_1 \delta^{n-1} + \dots + a_{n-1} \delta + a_n = 0. \quad (6.8)$$

Полученное алгебраическое уравнение называется *характеристическим*. Корни его $\delta_1, \dots, \delta_n$ будут определять характер переходного процесса в системе. Нетрудно заметить, что по своему виду левая часть (6.8) полностью совпадает с левой частью (6.5). Поэтому характеристическое уравнение получается приравнованием левой части (6.5) нулю:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (6.9)$$

Однако здесь буква $p = \delta$ означает уже не символ дифференцирования, а некоторое комплексное число, которое является решением (корнем) характеристического уравнения.

Так как в решении характеристического уравнения содержится n корней, то переходная составляющая может быть записана в виде

$$y_n(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}, \quad (6.10)$$

где $p_1, \dots, p_n$ — корни характеристического уравнения, $C_1, \dots, C_n$ — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Корни характеристического уравнения определяются только видом левой части уравнения (6.5). Постоянные интегрирования определяются также и видом правой его части. Поэтому быстрота затухания и форма переходного процесса определяются как левой, так и правой частями исходного

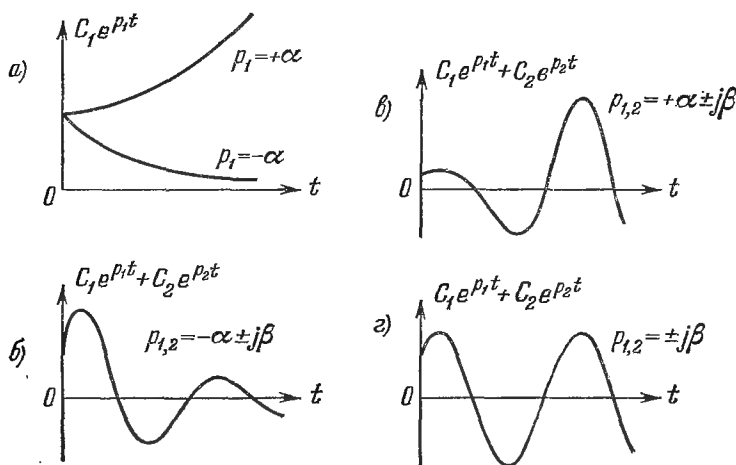


Рис. 6.2.

дифференциального уравнения. Однако поскольку в понятие устойчивости системы входит только факт наличия или отсутствия затухания переходного процесса (независимо от быстроты затухания и формы переходного процесса), то устойчивость линейной системы не зависит от вида правой части дифференциального уравнения (6.5) и определяется только характеристическим уравнением (6.9).

Чтобы определить, устойчива система или нет, нет необходимости решать характеристическое уравнение и определять его корни. Выясним, какие свойства корней необходимы и достаточны для того, чтобы система была устойчивой.

Корни могут быть вещественными, комплексными и чисто мнимыми. Рассмотрим эти случаи.

1. Вещественный корень. Пусть один из корней, например p_1 , является вещественным. Если он отрицательный ($p_1 = -\alpha_1$), то слагаемое, определяемое этим корнем в (6.10), будет представлять собой экспоненту $C_1 e^{-\alpha_1 t}$. Очевидно, что при $t \rightarrow \infty$ этот член будет затухать.

При $p_1 = +\alpha_1$ получится не затухающий, а расходящийся процесс (рис. 6.2, а).

2. Комплексные корни. Комплексные корни бывают попарно сопряженными. При отрицательной вещественной части два корня, например p_1 и p_2 , будут иметь вид $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$. В этом случае слагаемые,

определяемые этими корнями в уравнении (6.8), могут быть представлены в виде

$$C_1 e^{-(\alpha + j\beta)t} + C_2 e^{-(\alpha - j\beta)t} = A e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \psi),$$

где A и ψ — новые постоянные интегрирования.

Нетрудно видеть, что в этом случае получаются затухающие колебания, причем мнимая часть корня β представляет собой круговую частоту затухающих колебаний, а α — показатель затухания, определяющий затухание огибающей к кривой переходного процесса (рис. 6.2, б).

При положительной вещественной части $p_{1,2} = +\alpha \pm j\beta$ колебания будут не затухающими, а расходящимися (рис. 6.2, в).

3. Чисто мнимые корни. В этом случае $p_1 = +j\beta$ и $p_2 = -j\beta$. Слагаемое, определяемое этими корнями в (6.10), будет представлять собой незатухающие колебания, т. е. колебания с постоянной амплитудой:

$$C_1 e^{j\beta t} + C_2 e^{-j\beta t} = A \sin(\beta t + \psi).$$

Такой процесс изображен на рис. 6.2, г.

Следовательно, для затухания переходного процесса необходимо, чтобы вещественные части корней были отрицательными. Это относится как к вещественным, так и к комплексным корням. Если хотя бы один корень характеристического уравнения будет иметь положительную вещественную часть, то переходный процесс в целом будет расходиться, т. е. система окажется неустойчивой.

Корни характеристического уравнения можно представить в виде точек на комплексной плоскости величины p (рис. 6.3).

Для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни лежали слева от мнимой оси плоскости корней. Если хотя бы один корень окажется справа от мнимой оси, то система будет неустойчивой. Таким образом, мнимая ось представляет собой граничную линию в плоскости корней, за которую не должны переходить корни характеристического уравнения. Вся левая полуплоскость представляет собой при этом область устойчивости.

Превращение устойчивой системы в неустойчивую произойдет в том случае, если хотя бы один вещественный или пара комплексных корней перейдет из левой полуплоскости в правую. Границей перехода будет так называемая *граница устойчивости системы*. Система будет находиться на границе устойчивости при наличии:

- 1) нулевого корня;
- 2) пары чисто мнимых корней;
- 3) бесконечного корня.

Во всех трех случаях предполагается, что все остальные корни имеют отрицательные вещественные части.

В первом случае вещественный корень попадает на границу устойчивости (ось мнимых) в начале координат, т. е. выполняется условие $p_k = 0$. Это означает, что в характеристическом уравнении (6.9) будет отсутствовать свободный член $a_n = 0$. Дифференциальное уравнение (6.5) в этом случае может быть записано в виде

$$(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) p y(t) = (b_0 p^m + \dots + b_m) g(t)$$

и система будет устойчивой не относительно регулируемой величины y , а относительно ее скорости изменения py . Величина же отклонения

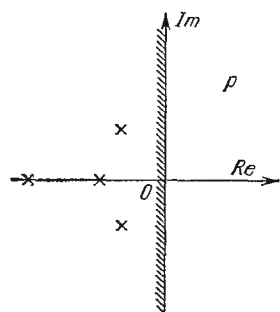


Рис. 6.3.

регулируемой величины может принимать произвольные значения. Такую систему называют *нейтрально устойчивой*, имея в виду ее безразличие к значению самой регулируемой величины.

На границе устойчивости второго типа, которая называется колебательной границей устойчивости, два корня попадают на ось мнимых. Система в этом случае будет иметь незатухающие гармонические колебания с постоянной амплитудой (рис. 6.2, з).

Наконец, вещественный корень может попасть из левой полуплоскости в правую, проходя через бесконечность. В этом случае соответствующее слагаемое $C_k e^{-\alpha_k t}$ в выражении (6.10) обращается в нуль, что соответствует понижению порядка дифференциального уравнения на единицу. Это будет при $a_0 = 0$. Граница устойчивости третьего типа встречается сравнительно редко, и в дальнейшем будут рассматриваться практически только первый и второй типы границы устойчивости.

Как было сказано выше, ни одна реальная система автоматического регулирования не является строго линейной. Линейные характеристики звеньев и линейные дифференциальные уравнения получаются путем линеаризации реальных характеристик и уравнений. При разложении в ряд Тейлора удерживались линейные члены и отбрасывались члены высших порядков, которые для малых отклонений считались пренебрежимо малыми.

Обоснование законности такой линеаризации содержится в теоремах Ляпунова.

1. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет все корни с отрицательными вещественными частями, то реальная система будет также устойчивой, т. е. малые нелинейные члены не могут в этом случае нарушить устойчивость системы.

2. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то реальная система будет также неустойчивой, т. е. малые нелинейные члены не могут сделать ее устойчивой.

3. При наличии нулевых и чисто мнимых корней поведение реальной системы не всегда даже качественно определяется ее линеаризованными уравнениями. При этом даже малые нелинейные члены могут коренным образом изменить вид переходного процесса, сделав систему устойчивой или неустойчивой.

Опираясь в своих линейных расчетах на эти теоремы Ляпунова, необходимо всегда иметь в виду, что они, во-первых, относятся к исследованию устойчивости в малом, т. е. в малой окрестности данного состояния равновесия, когда кривая CB мало отличается от прямой CD (см. рис. 3.2) и, соответственно, отбрасываемые в формуле члены малы. Во-вторых, все это относится только к описанному выше способу линеаризации уравнений — разложению нелинейных функций в степенные ряды, что геометрически соответствует замене кривой отрезком касательной, а не к какому-либо другому способу линеаризации.

К сильно выраженным нелинейностям на больших участках, в том числе и к нелинейностям релейного типа, эти теоремы, вообще говоря, неприменимы. Для исследования устойчивости нелинейных систем общего вида имеются другие теоремы Ляпунова, так называемый прямой метод Ляпунова или, по старой терминологии, «вторая метода» Ляпунова, которые будут изложены ниже, в главе 17.

Далеко не всегда бывает удобно вычислять корни характеристического уравнения. Поэтому желательно иметь такие критерии, с помощью которых можно было бы судить об устойчивости системы непосредственно по коэффициентам характеристического уравнения, без вычисления корней. Эти критерии называются *критериями устойчивости*.

Покажем, что необходимым (но не достаточным) условием устойчивости системы является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения. Это значит, что при положительности всех коэффициентов система может быть устойчивой, но не исключена возможность неустойчивости системы. Если же не все коэффициенты характеристического уравнения положительны, то система наверняка неустойчива и никаких дополнительных исследований устойчивости не требуется.

Заметим, что вместо того, чтобы быть положительными, все коэффициенты характеристического уравнения могут быть отрицательными. Умножая все члены характеристического уравнения на минус единицу, можно сделать все коэффициенты положительными, т. е. в этом случае выполнить указанное выше требование.

Для доказательства сформулированного необходимого условия устойчивости будем вначале предполагать, что все корни вещественные. Представим левую часть характеристического уравнения (6.9) в виде произведения

$$a_0 (p - p_1) (p - p_2) \dots (p - p_n) = 0,$$

где $p_1, \dots, p_n$ — корни характеристического уравнения. При этом будем считать, что $a_0 > 0$. Это всегда можно выполнить умножением уравнения на минус единицу.

В устойчивой системе все корни должны быть отрицательными, т. е. $p_1 = -\alpha_1, p_2 = -\alpha_2$ и т. д. При этом получим

$$a_1 (p + \alpha_1) (p + \alpha_2) \dots (p + \alpha_n) = 0.$$

Если теперь раскрыть скобки и вернуться к уравнению вида (6.9), то все коэффициенты уравнения получатся положительными, так как, перемножая и складывая положительные величины $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ и т. д., нельзя получить отрицательных величин.

При наличии в решении характеристического уравнения комплексных корней с отрицательной вещественной частью, например $p_{1-2} = -\alpha \pm j\beta$, результат не изменится, так как множители, соответствующие этим корням, будут иметь вид

$$(p + \alpha - j\beta) (p + \alpha + j\beta) = (p + \alpha)^2 + \beta^2.$$

Очевидно, что появление такого множителя не может изменить вывод о положительности всех коэффициентов характеристического уравнения.

Имея в виду рассмотренное необходимое условие устойчивости, далее будем всегда предполагать, что все коэффициенты характеристического уравнения положительны.

Необходимое условие устойчивости становится достаточным только для уравнений первого и второго порядков. В этом случае система будет устойчивой при положительности всех коэффициентов характеристического уравнения, в чем нетрудно убедиться прямым нахождением корней уравнения.

§ 6.2. Критерий устойчивости Гурвица

Задача отыскания критерия устойчивости для систем, описываемых дифференциальными уравнениями любого порядка, была сформулирована Максвеллом в 1868 году. Эта задача была впервые решена в алгебраической форме Раусом в 1873 году для уравнений четвертой и пятой степени и в 1877 году — полностью.

Поскольку критерий Рауса дан в форме алгоритма, определяющего последовательность математических операций, необходимых для решения задачи, использование его в практике является неудобным. Поэтому

большее распространение получил алгебраический критерий устойчивости, сформулированный в 1895 году математиком А. Гурвицем. Этот критерий был найден Гурвицем] по просьбе словацкого профессора Стодолы, занимавшегося исследованием процесса регулирования турбин.

Ниже критерий Гурвица приводится без доказательства.

Для характеристического уравнения (6.9) составим квадратную матрицу (таблицу) коэффициентов, содержащую n строк и n столбцов:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}. \quad (6.11)$$

Эта таблица составляется следующим образом.

По диагонали от левого верхнего до правого нижнего углов выписываются все коэффициенты по порядку от a_1 до a_n . Каждая строка дополняется коэффициентами с возрастающими индексами слева направо так, чтобы чередовались строки с нечетными и четными индексами. В случае отсутствия данного коэффициента, а также если индекс его меньше нуля или больше n , на месте его пишется нуль.

Критерий устойчивости сводится к тому, что при $a_0 > 0$ должны быть больше нуля все n определители Гурвица, получаемых из квадратной матрицы коэффициентов.

Определители Гурвица составляются по следующему правилу (см. (6.11)):

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad (6.12)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad (6.13)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad (6.14)$$

.....

Последний определитель включает в себя всю матрицу. Но так как в последнем столбце матрицы все элементы, кроме нижнего, равны нулю, то последний определитель Гурвица, выражается через предпоследний следующим образом:

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0. \quad (6.15)$$

Однако в устойчивой системе предпоследний определитель тоже должен быть положительным. Поэтому условие положительности последнего определителя сводится к условию $a_n > 0$, т. е. к положительности свободного члена характеристического уравнения.

Условия нахождения системы на границе устойчивости можно получить, приравняв нулю последний определитель: $\Delta_n = 0$, при положительности всех остальных определителей. Как следует из (6.15), это условие распадается на два условия: $a_n = 0$ и $\Delta_{n-1} = 0$. Первое условие соответствует границе устойчивости первого типа (апериодическая граница устойчивости) и второе — границе устойчивости второго типа (колебательная граница устойчивости).

Раскрывая определители, фигурирующие в общей формулировке критерия устойчивости Гурвица, можно получить в виде частных случаев критерии устойчивости для системы первого, второго, третьего, четвертого и более высоких порядков.

1. Уравнение первого порядка

$$a_0 p + a_1 = 0.$$

Для этого уравнения критерий Гурвица дает

$$a_0 > 0, \Delta_1 = a_1 > 0,$$

т. е. коэффициенты характеристического уравнения должны быть положительными.

2. Уравнение второго порядка

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0.$$

Для этого уравнения критерий Гурвица требует

$$a_0 > 0, \Delta_1 = a_1 > 0.$$

Последний определить, как отмечалось выше, сводится к условию положительности последнего коэффициента: $a_2 > 0$.

Таким образом, и для уравнения второго порядка необходимым и достаточным условием устойчивости является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения.

3. Уравнение третьего порядка

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Для этого уравнения получаем условия

$$a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Третий (последний) определитель Δ_3 дает условие $a_3 > 0$. Условие $\Delta_2 > 0$ при $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ и $a_3 > 0$ может выполняться только при $a_2 > 0$.

Следовательно, для уравнения третьего порядка уже недостаточно положительности всех коэффициентов характеристического уравнения. Требуется еще выполнение определенного соотношения между коэффициентами: $a_1 a_2 > a_0 a_3$.

4. Уравнение четвертого порядка

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0.$$

На основании критерия Гурвица можно получить, что для уравнения четвертого порядка, кроме положительности всех коэффициентов, требуется выполнение условия

$$a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0.$$

5. Уравнение пятого порядка

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0.$$

Для уравнения пятого порядка, кроме положительности всех коэффициентов, должны выполняться еще два условия:

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \quad (a_1 a_2 - a_0 a_3) (a_3 a_4 - a_2 a_5) - (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2 > 0.$$

Как видно, уже для уравнения пятой степени условия устойчивости по критерию Гурвица получаются достаточно громоздкими. Поэтому использование этого критерия практически ограничивается уравнениями четвертого порядка.

Существенным недостатком критерия Гурвица является также то, что для уравнений высоких порядков в лучшем случае можно получить ответ

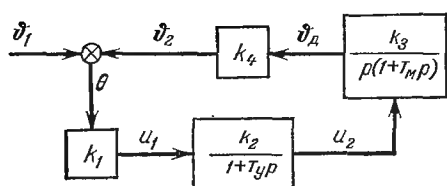
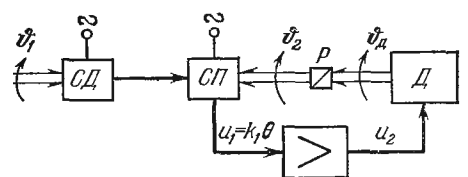


Рис. 6.4.

о том, устойчива или неустойчива система автоматического регулирования. При этом в случае неустойчивой системы критерий не дает ответа на то, каким образом надо изменить параметры системы, чтобы сделать ее устойчивой. Это обстоятельство привело к поискам других критериев, которые были бы более удобными в инженерной практике.

Для иллюстрации применения критерия Гурвица рассмотрим пример на определение устойчивости дистанционной следящей системы. Принципиальная и структурная схемы изображены на рис. 6.4. В качестве чувствительного элемента использо-

ваны два сельсина (СД и СП), включенные по трансформаторной схеме. Передаточная функция сельсинов равна коэффициенту передачи схемы:

$$W_1(p) = k_1 = \frac{U_1}{\Phi} \left[\frac{e}{rad} \right],$$

где $\Phi = \vartheta_1 - \vartheta_2$ — ошибка, равная разности углов поворота командной и исполнительной осей.

Передаточная функция усилителя:

$$W_2(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{k_2}{1 + T_y p},$$

где k_2 — коэффициент усиления и T_y — постоянная времени усилителя.

Передаточная функция двигателя (Д):

$$W_3(p) = \frac{\vartheta_d}{U_2} = \frac{k_3}{p(1 + T_m p)} \left[\frac{rad}{e} \right],$$

где $k_3 \left[\frac{rad}{e \cdot сек} \right]$ — коэффициент передачи двигателя по скорости, а T_m — электромеханическая постоянная времени двигателя совместно с оконечным каскадом усилителя.

Передаточная функция редуктора (Р) равна его коэффициенту передачи, определяемому передаточным отношением:

$$W_4(p) = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_d} = k_4.$$

Так как цепь регулирования состоит из включенных последовательно звеньев, то передаточная функция разомкнутой цепи будет равна произведению передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = W_1(p) W_2(p) W_3(p) W_4(p) = \frac{K}{p(1 + T_y p)(1 + T_m p)},$$

где $K = k_1 k_2 k_3 k_4 \left[\frac{1}{сек} \right]$ — общий коэффициент усиления разомкнутой цепи.

Характеристическое уравнение:

$$1 + W(p) = 0.$$

После подстановки $W(p)$ получаем

$$T_y T_m p^3 + (T_y + T_m) p^2 + p + K = 0.$$

В данном случае характеристическое уравнение имеет третий порядок. Нетрудно видеть, что условие положительности всех коэффициентов выполняется всегда, если выполнено условие $K > 0$, что будет при правильном согласовании направления вращения двигателя со знаком рассогласования.

Дополнительное условие $a_1 a_2 > a_0 a_3$, накладываемое на коэффициенты характеристического уравнения, сводится при подстановке значений коэффициентов ($a_0 = T_y T_m$, $a_1 = T_y + T_m$, $a_2 = 1$ и $a_3 = K$), к неравенству

$$K < \frac{1}{T_y} + \frac{1}{T_m},$$

которое и является условием устойчивости рассматриваемой системы.

Из этого неравенства, в частности, можно заметить, что увеличение каждой постоянной времени сказывается отрицательно на устойчивости системы, так как при этом снижается предельное значение общего коэффициента усиления K , при котором система еще остается устойчивой.

§ 6.3. Критерий устойчивости Михайлова

Рассмотрим отдельно левую часть характеристического уравнения (6.9), которая представляет собой *характеристический полином*:

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n. \quad (6.16)$$

Подставим в этот полином чисто мнимое значение $p = j\omega$, где ω представляет собой угловую частоту колебаний, соответствующих чисто мнимому корню характеристического уравнения. При этом получим характеристический комплекс

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) = D(\omega) e^{j\psi(\omega)}, \quad (6.17)$$

где вещественная часть будет содержать четные степени ω :

$$X(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + \dots, \quad (6.18)$$

а мнимая — нечетные степени ω :

$$Y(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots \quad (6.19)$$

Функции $D(\omega)$ и $\psi(\omega)$ представляют собой модуль и фазу (аргумент) характеристического комплекса.

Характеристический полином (6.16) не будет иметь корней в правой полуплоскости, если полное приращение фазы или аргумента $\psi(\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ равно $n \frac{\pi}{2}$, где n — степень полинома $D(p)$. Следовательно, система регулирования будет устойчивой. Если полное приращение аргумента $\psi(\omega)$ окажется меньше $n \frac{\pi}{2}$, то система неустойчива. Докажем это.

Если все коэффициенты заданы и задано определенное значение частоты ω , то величина $D(j\omega)$ изобразится на комплексной плоскости в виде точки с координатами X и Y или в виде вектора, соединяющего эту точку с началом координат. Если же значение частоты ω менять непрерывно от нуля до бесконечности, то вектор будет изменяться по величине и по направлению, описывая своим концом некоторую кривую (годограф), которая называется *кривой Михайлова* (рис. 6.5).

Практически кривая Михайлова строится по точкам, причем задаются различные значения частоты ω и по формулам (6.18) и (6.19) вычисляются $X(\omega)$ и $Y(\omega)$. Результаты расчетов сводятся в таблицу, по которой и строится затем кривая.

Выясним связь между видом кривой Михайлова и знаками вещественных корней, характеристического уравнения. Для этого определим, чему должен равняться угол поворота ψ вектора $D(j\omega)$ при изменении ω от нуля

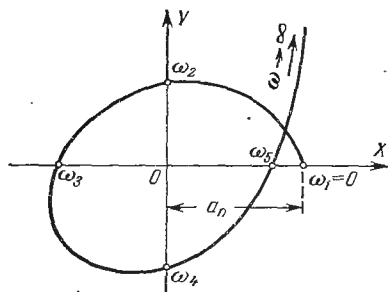


Рис. 6.5.

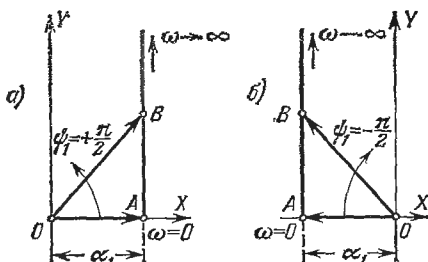


Рис. 6.6.

до бесконечности. Для этого запишем характеристический полином в виде произведения сомножителей

$$D(p) = a_0 (p - p_1) (p - p_2) \dots (p - p_n), \quad (6.20)$$

где $p_1, \dots, p_n$ — корни характеристического уравнения.

Характеристический вектор можно тогда представить в следующем виде:

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega - p_1) (j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n). \quad (6.21)$$

Каждая из скобок представляет собой комплексное число. Следовательно, $D(j\omega)$ представляет собой произведение n комплексных чисел. При перемножении аргументы комплексных чисел складываются. Поэтому результирующий угол поворота вектора $D(j\omega)$ при изменении ω от нуля до бесконечности будет равен сумме углов поворота отдельных сомножителей (6.21):

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n. \quad (6.22)$$

Определим каждое слагаемое (6.22) в отдельности.

1. Пусть какой-либо корень, например p_1 , является вещественным и отрицательным, т. е. $p_1 = -\alpha_1$, где $\alpha_1 > 0$. Сомножитель в выражении (6.21), определяемый этим корнем, будет тогда иметь вид $(\alpha_1 + j\omega)$.

Построим годограф этого вектора на комплексной плоскости при изменении ω от нуля до бесконечности (рис. 6.6, а). При $\omega = 0$ вещественная часть $X = \alpha_1$, а мнимая $Y = 0$. Этому соответствует точка А, лежащая на оси вещественных. При $\omega \neq 0$ вектор будет изменяться так, что его вещественная часть будет по-прежнему равна α_1 , а мнимая часть $Y = \omega$ (точка В на графике). При увеличении частоты до бесконечности конец вектора уходит в бесконечность, причем конец вектора все время остается на вертикальной прямой, проходящей через точку А, а вектор поворачивается против часовой стрелки. Результирующий угол поворота вектора $\psi_1 = +\frac{\pi}{2}$.

2. Пусть теперь корень p_1 является вещественным и положительным, т. е. $p_1 = +\alpha_1$, причем $\alpha_1 > 0$. Тогда сомножитель в (6.12), определяемый этим корнем, будет иметь вид $(-\alpha_1 + j\omega)$. Аналогичные построения (рис. 6.6, б) показывают, что результирующий угол поворота будет $\psi_1 =$

$= -\frac{\pi}{2}$. Знак минус показывает, что вектор поворачивается по часовой стрелке.

3. Пусть два корня, например p_2 и p_3 , представляют собой комплексные сопряженные величины с отрицательной вещественной частью, т. е. $p_{2,3} = -\alpha \pm j\beta$. Сомножители в выражении (6.21), определяемые этими корнями, будут иметь вид $(\alpha - j\beta + j\omega)(\alpha + j\beta + j\omega)$.

При $\omega = 0$ начальные положений двух векторов определяются точками A_1 и A_2 (рис. 6.7, а). Первый вектор повернут относительно оси вещественных по часовой стрелке на угол $\gamma = \arctg \frac{\beta}{\alpha}$, а второй вектор — на тот

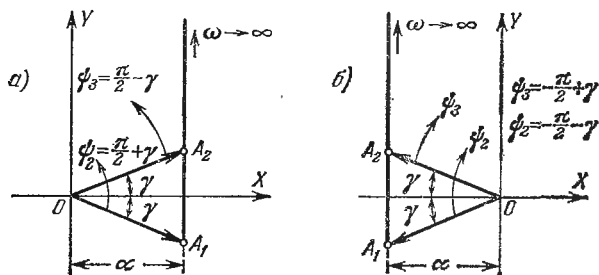


Рис. 6.7.

же угол против часовой стрелки. При увеличении ω от нуля до бесконечности концы обоих векторов уходят вверх в бесконечность и оба вектора в пределе сливаются с осью мнимых.

Результирующий угол поворота первого вектора $\psi_2 = \frac{\pi}{2} + \gamma$. Результирующий угол поворота второго вектора $\psi_3 = \frac{\pi}{2} - \gamma$. Вектор, соответствующий произведению $(\alpha - j\beta + j\omega)(\alpha + j\beta + j\omega)$, повернется на угол $\psi_2 + \psi_3 = 2\frac{\pi}{2}$.

4. Пусть те же комплексные корни имеют положительную вещественную часть, т. е. $p_{2,3} = +\alpha \pm j\beta$. Проводя построения, аналогичные предыдущим (рис. 6.7, б), можно получить, что результирующий угол поворота вектора, соответствующего произведению двух сомножителей, будет $\psi_2 + \psi_3 = -2\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, если характеристическое уравнение будет иметь l корней с положительной вещественной частью, то, каковы бы ни были эти корни (вещественные или комплексные), им будет соответствовать сумма углов поворотов, равная $-l\frac{\pi}{2}$. Всем же остальным $n - l$ корням характеристического уравнения, имеющим отрицательные вещественные части, будет соответствовать сумма углов поворотов, равная $(n - l)\frac{\pi}{2}$. В результате общий угол поворота вектора $D(j\omega)$ при изменении ω от нуля до бесконечности, согласно формуле (6.22), будет

$$\psi = (n - l)\frac{\pi}{2} - l\frac{\pi}{2} = n\frac{\pi}{2} - l\pi. \quad (6.23)$$

Этим выражением и определяется искомая связь между формой кривой Михайлова и знаками вещественных частей корней характеристического

уравнения. В 1936 году А. В. Михайловым был сформулирован следующий критерий устойчивости для линейных систем любого порядка.

Для устойчивости системы n -го порядка необходимо и достаточно, чтобы вектор $D(j\omega)$, описывающий кривую Михайлова, при изменении ω от нуля до бесконечности имел угол поворота $\psi = n \frac{\pi}{2}$.

Эта формулировка непосредственно вытекает из (6.23). Для устойчивости системы необходимо, чтобы все корни лежали в левой полуплоскости, т. е. должно быть $l = 0$. Отсюда определяется требуемый результирующий угол поворота вектора.

Оказывается, что кривая Михайлова для устойчивых систем всегда имеет плавную спиралевидную форму, причем конец ее уходит в бесконечность

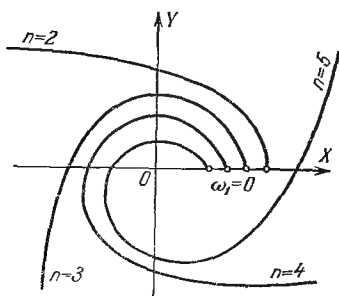


Рис. 6.8.

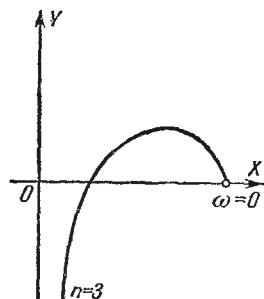


Рис. 6.9.

в том квадранте комплексной плоскости, номер которого равен степени характеристического уравнения n (рис. 6.8). Число квадрантов, большее чем n , кривая Михайлова вообще не может пройти. Поэтому неустойчивость системы всегда связана с тем, что в кривой Михайлова нарушается последовательность прохождения квадрантов, вследствие чего угол поворота вектора $D(j\omega)$ оказывается меньшим чем $n \frac{\pi}{2}$ (рис. 6.9).

Сказанное выше позволяет сформулировать критерий Михайлова в несколько измененном виде. Для устойчивой системы кривая Михайлова проходит последовательно n квадрантов. Поэтому корни уравнений $X(\omega) = 0$ и $Y(\omega) = 0$ должны чередоваться. Так как кривая Михайлова всегда начинается с точки, расположенной на оси вещественных (рис. 6.8), где мнимая часть обращается в нуль: $Y(\omega_1) = Y(0) = 0$, то при постепенном увеличении частоты от нуля до бесконечности должна обратиться в нуль сначала вещественная часть: $X(\omega_2) = 0$, затем мнимая: $Y(\omega_3) = 0$, затем опять вещественная: $X(\omega_4) = 0$ и т. д., причем $0 = \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \dots < \omega_n$.

По кривой Михайлова можно судить о том, сколько корней с положительными вещественными частями содержит характеристическое уравнение данной неустойчивой системы. Для нахождения искомого числа l должна использоваться зависимость (6.23). Если известны результирующий угол поворота вектора $\psi < n \frac{\pi}{2}$ и степень характеристического уравнения n , то в уравнении (6.23) неизвестным будет только l .

При подсчете результирующего угла поворота ψ следует иметь в виду, что при четной степени уравнения кривая Михайлова стремится к бесконечности параллельно оси X и при нечетной степени — параллельно оси Y . Это видно из выражений (6.18) и (6.19), так как при четной степени наивысшая степень ω будет стоять в выражении X , а при нечетной — в выражении Y .

Так, например, для кривой, показанной на рис. 6.9 и соответствующей $n = 3$, результирующий угол поворота

$$\psi = -\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда имеем

$$-\frac{\pi}{2} = 3\frac{\pi}{2} - \pi$$

и число корней в правой полуплоскости $l = 2$.

Наличие границы устойчивости всех трех типов может быть определено по кривой Михайлова следующим образом.

В случае границы устойчивости первого типа (нулевой корень) отсутствует свободный член характеристического полинома $a_n = 0$ и кривая Михайлова идет из начала координат (рис. 6.10, а).

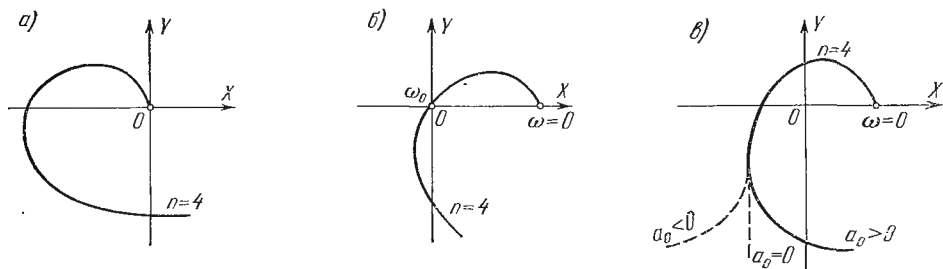


Рис. 6.10.

При границе устойчивости второго типа (колебательная граница устойчивости) левая часть характеристического уравнения, т. е. характеристический полином, обращается в нуль при подстановке $p = j\omega_0$:

$$D(j\omega_0) = X(\omega_0) + jY(\omega_0) = 0, \quad (6.24)$$

откуда вытекают два равенства:

$$\left. \begin{aligned} X(\omega_0) &= 0, \\ Y(\omega_0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

Это значит, что точка $\omega = \omega_0$ на кривой Михайлова попадает в начало координат (рис. 6.10, б). При этом величина ω_0 есть частота незатухающих колебаний системы.

Для границы устойчивости третьего типа (бесконечный корень) конец кривой Михайлова перебрасывается, как показано на рис. 6.10, в. При этом коэффициент a_0 характеристического полинома (6.16) будет проходить через нулевое значение, меняя знак плюс на минус.

Необходимо помнить, что все остальные корни характеристического уравнения должны иметь отрицательные вещественные части. Графически это выражается в том, что в первых двух случаях после малой деформации кривой Михайлова около начала координат (рис. 6.10), а в третьем случае при малом $a_0 > 0$ кривая Михайлова должна удовлетворять критерию устойчивости.

Применим критерий Михайлова для определения устойчивости рассмотренной в предыдущем параграфе следящей системы (рис. 6.4). Из полученного характеристического уравнения определяем характеристический полином

$$D(p) = T_y T_m p^3 + (T_y + T_m) p^2 + p + K$$

и характеристический комплекс

$$D(j\omega) = K + j\omega - \omega^2(T_y + T_m) - j\omega^3 T_y T_m.$$

Вещественная и мнимая части:

$$X(\omega) = K - \omega^2(T_y + T_m), \quad Y(\omega) = \omega - \omega^3 T_y T_m.$$

Примерный вид кривой Михайлова для этого случая изображен на рис. 6.11.

Найдем условие устойчивости из требования чередования корней $0 = \omega_1 < \omega_2 < \omega_3$. Корень ω_2 находится из уравнения $X(\omega) = 0$:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{T_y + T_m}}.$$

Отсюда имеем первое условие устойчивости: $K > 0$.

Корень ω_3 находится из уравнения $Y(\omega) = 0$:

$$\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{T_y T_m}}.$$

Рис. 6.11.

Подставляя эти значения в требуемое условие

$\omega_2 < \omega_3$, получаем второе условие устойчивости системы

$$K < \frac{1}{T_y} + \frac{1}{T_m},$$

которое, конечно, совпадает с полученным ранее условием устойчивости по критерию Гурвица.

§ 6.4. Построение областей устойчивости. D-разбиение

При расчете и проектировании системы автоматического регулирования иногда бывает необходимым исследовать влияние ее различных параметров на устойчивость. Для решения этой задачи служит построение областей устойчивости, т. е. определение таких областей значений параметров, при которых система оказывается устойчивой.

Различают построение областей устойчивости в плоскости одного параметра и в плоскости двух параметров. Ниже будет рассматриваться только построение областей устойчивости в плоскости двух параметров. Для построения таких областей на плоскости двух параметров A и B необходимо нанести линии, соответствующие границе устойчивости. Тогда область, ограниченная этими линиями, будет представлять собой область устойчивости. Для того чтобы окончательно убедиться в этом, необходимо для любой точки, лежащей внутри полученной области, по какому-либо критерию проверить устойчивость. Если устойчивость для этой точки будет иметь место, то она будет выполняться и для всех других точек, лежащих в этой области.

Для построения границ области устойчивости используются все три признака существующих типов границы устойчивости. Для границы устойчивости первого типа это будет равенство $a_n = 0$. Для границы устойчивости третьего типа — равенство $a_0 = 0$.

Для получения условия, соответствующего границе устойчивости второго типа (колебательной), можно использовать различные критерии устойчивости.

Для систем, описываемых уравнением не выше четвертого порядка, может применяться критерий Гурвица. В этом случае колебательной границе устойчивости соответствует равенство нулю предпоследнего определителя Гурвица: $\Delta_{n-1} = 0$.

Для уравнений любого порядка удобно использовать критерий Михайлова. Колебательной границе устойчивости в этом случае соответствует равенство нулю характеристического комплекса: $D(j\omega) = 0$, т. е. прохождение кривой Михайлова через начало координат.

Предположим, что два рассматриваемых параметра системы регулирования A и B входят линейно в характеристический комплекс. Тогда для границы устойчивости колебательного типа уравнение $D(j\omega, A, B) = 0$ распадается на два уравнения:

$$\begin{cases} X(\omega, A, B) = 0, \\ Y(\omega, A, B) = 0. \end{cases} \quad (6.26)$$

Здесь величина ω дает значение чисто мнимого корня, т. е. частоту гармонических колебаний системы.

Два последних выражения представляют собой параметрические уравнения границы устойчивости при соблюдении дополнительного условия отрицательности вещественных частей всех остальных корней, кроме чисто мнимых. Полная же совокупность всех кривых на плоскости параметров, разбивающая всю плоскость на области с определенным распределением корней, называется *D-разбиением* плоскости параметров. Обычно практическое значение имеет лишь часть кривых *D-разбиения*, соответствующая границе устойчивости.

Для упрощения выделения границ области устойчивости из всего комплекса кривых *D-разбиения* на плоскости двух параметров вводится штриховка этих кривых, производимая по правилу, которое будет приведено без доказательства. Переменяясь вдоль кривой в сторону увеличения ω , надо штриховать ее с левой стороны, если будет положительным определитель, составленный из частных производных (6.26):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial A} & \frac{\partial X}{\partial B} \\ \frac{\partial Y}{\partial A} & \frac{\partial Y}{\partial B} \end{vmatrix}. \quad (6.27)$$

Если же определитель отрицателен, то кривую надо штриховать справа. При соблюдении этого правила штриховка будет направлена внутрь области устойчивости, если параметр A отложен по оси абсцисс вправо, а параметр B — по оси ординат вверх.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую систему, схема которой изображена на рис. 6.4. Для этой системы было получено характеристическое уравнение

$$T_y T_m p^3 + (T_y + T_m) p^2 + p + K = 0.$$

Предположим, что электромеханическая постоянная времени двигателя T_m является заданной величиной и требуется построить область устойчивости в плоскости двух параметров: общего коэффициента усиления K и постоянной времени усилителя T_y .

Характеристический комплекс

$$D(j\omega) = K + j\omega - \omega^2 (T_y + T_m) - j\omega^3 T_y T_m.$$

Уравнения, определяющие границу устойчивости,

$$X = K - \omega^2 (T_y + T_m) = 0, \quad Y = \omega - \omega^3 T_y T_m = 0.$$

Решая их совместно относительно параметров K и T_y , получим

$$T_y = \frac{1}{T_M \omega^2}, \quad K = \frac{1}{T_M} + T_M \omega^2.$$

Задаваясь затем различными значениями ω в пределах от нуля до бесконечности, по этим формулам можно вычислить значения искомых параметров

Таблица 6.1

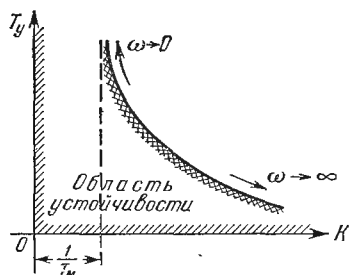


Рис. 6.12.

ω	K	T_y
0	$\frac{1}{T_M}$	∞
...	...	...
∞	∞	0

и составить табл. 6.1, одинаковую для положительных и отрицательных частот.

По полученным данным строим кривую D -разбиения (рис. 6.12). Кривая имеет гиперболический вид с асимптотами $K = \frac{1}{T_M}$ при $\omega = 0$ и $T_y = 0$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Для нанесения штриховки найдем знак определителя (6.27). Необходимые для этого частные производные будут при $A = K$ и $B = T_y$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial K} &= 1, & \frac{\partial X}{\partial T_y} &= -\omega^2, \\ \frac{\partial Y}{\partial K} &= 0, & \frac{\partial Y}{\partial T_y} &= -\omega^3 T_M. \end{aligned}$$

Определитель получается равным

$$\begin{vmatrix} 1 & -\omega^2 \\ 0 & -\omega^3 T_M \end{vmatrix} = -\omega^3 T_M.$$

Для отрицательных частот, т. е. при изменении частоты в пределах от $-\infty$ до 0, полученный определитель будет положительным. Поэтому при движении по полученной кривой снизу вверх (от $-\infty$ до 0) необходимо штриховать область, лежащую слева от кривой.

Для положительных частот, т. е. при изменении частоты в пределах от 0 до $+\infty$, полученный определитель будет отрицательным. Поэтому при движении по полученной кривой сверху вниз (от 0 до $+\infty$) необходимо штриховать область, лежащую справа от кривой. Снизу полученной кривой получится двойная штриховка.

Область устойчивости практически уже сформировалась. Так как параметры K и T_y должны быть положительными, область устойчивости будет ограничиваться полученной кривой и положительными направлениями осей K и T_y .

Это можно показать и на основе использования двух оставшихся условий устойчивости. Граница устойчивости первого типа будет получена, если приравнять нулю свободный член, $a_n = 0$, что дает условие $K = 0$. Это условие выполняется на оси ординат. Граница устойчивости третьего типа полу-

чается при $a_0 = 0$, что дает условие $T_y = 0$. Это условие выполняется на оси абсцисс.

Таким образом, область устойчивости в плоскости параметров K и T_y получена окончательно. Для любых значений K и T_y можно сразу ответить, устойчива или неустойчива система, смотря по тому, попадает или не попадает точка, определяемая этими значениями параметров, в область устойчивости.

§ 6.5. Критерий устойчивости Найквиста

В главе 5 было введено понятие передаточной функции разомкнутой системы. Эта функция может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_n} \quad (6.28)$$

причем степень числителя не может быть выше степени знаменателя, $m \leq n$. При подстановке $p = j\omega$ получается *частотная передаточная функция разомкнутой системы*

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = A(\omega) e^{j\psi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega). \quad (6.29)$$

Частотная передаточная функция разомкнутой системы представляет собой комплексное число. На основании рассмотренных в главе 4 частотных характеристик смысл ее можно объяснить следующим образом (рис. 6.13). Представим себе систему регулирования в разомкнутом состоянии в виде некоторого звена с передаточной функцией $W(p)$. Если на вход этого звена

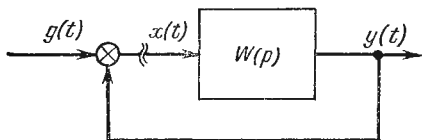


Рис. 6.13.

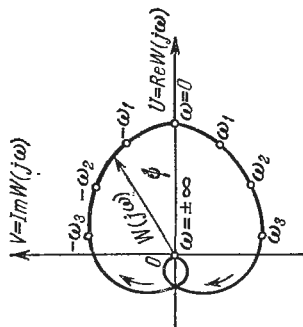


Рис. 6.14.

подавать сигнал ошибки в виде гармонических колебаний $x = X_{\max} \sin \omega t$ с амплитудой $X_{\max}$ и частотой ω , то в установившемся режиме на выходе регулируемая величина будет изменяться также по гармоническому закону $y = Y_{\max} \sin(\omega t + \psi)$ с амплитудой $Y_{\max}$, той же частотой ω и фазовым сдвигом ψ . Модуль частотной передаточной функции представляет собой отношение амплитуд выходной и входной величин:

$$A(\omega) = \frac{Y_{\max}}{X_{\max}},$$

а аргумент — сдвиг фаз ψ .

Если изменять частоту входного воздействия от $-\infty$ до $+\infty$ и откладывать на комплексной плоскости точки, соответствующие получающимся комплексным числам, то геометрическое место этих точек образует амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы (рис. 6.14).

Ветвь этой характеристики, соответствующая отрицательным частотам, является зеркальным отражением ветви, соответствующей положительным частотам, относительно вещественной оси.

На амплитудно-фазовой характеристике для удобства могут отмечаться точки, соответствующие определенным частотам, например $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и т. д. Вдоль кривой иногда рисуют стрелки, которые показывают направление возрастания частоты ω (рис. 6.14).

В реальных системах всегда удовлетворяется условие $m < n$. Поэтому при частоте, стремящейся к бесконечности, модуль частотной передаточной функции стремится к нулю и точка с частотой $\omega \rightarrow \pm \infty$ попадает в начало координат.

Сформулируем достаточные и необходимые требования к амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы, при выполнении которых система автоматического регулирования в замкнутом состоянии будет устойчивой.

Ограничим вначале задачу и будем рассматривать только такие передаточные функции (6.28), которые соответствуют статическим системам. Это

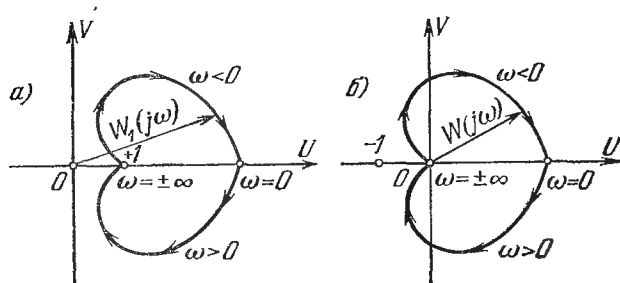


Рис. 6.15.

значит, что знаменатель (6.28) не будет иметь в качестве множителя оператор p . Кроме того, будем пока рассматривать только устойчивые в разомкнутом состоянии системы. Это значит, что полюсы выражения (6.28), т. е. корни уравнения

$$c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_{n-1} p + c_n = 0, \quad (6.30)$$

лежат в левой полуплоскости.

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$W_1(p) = 1 + W(p) = \frac{Q(p) + R(p)}{Q(p)} = \frac{D(p)}{Q(p)}, \quad (6.31)$$

где числитель

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n \quad (6.32)$$

представляет собой характеристический полином системы.

Сделаем подстановку $p = j\omega$ и найдем комплекс

$$W_1(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{Q(j\omega)}. \quad (6.33)$$

Будем теперь изменять частоту от $-\infty$ до $+\infty$ и изобразим получившуюся амплитудно-фазовую характеристику $W_1(j\omega)$ на комплексной плоскости (рис. 6.15, а). Рассмотрим результирующий угол поворота вектора $W_1(j\omega)$ при изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$. Этот угол представляет собой изменение аргумента (6.33), который по правилу деления комплексных чисел равен разности аргументов числителя ψ_1 и знаменателя ψ_2 :

$$\psi = \psi_1 - \psi_2.$$

Числитель (6.33) представляет собой характеристический комплекс. Если все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости,

то при изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$ аргумент $D(j\omega)$ изменится на величину $\psi_1 = n\pi$, где n — степень характеристического полинома. При построении кривой Михайлова результирующий угол поворота был равен $\psi_1 = n \frac{\pi}{2}$, но там частота изменялась от 0 до $+\infty$.

Знаменатель (6.33) представляет собой комплекс той же степени n , причем по предположению все корни (6.30) лежат в левой полуплоскости.

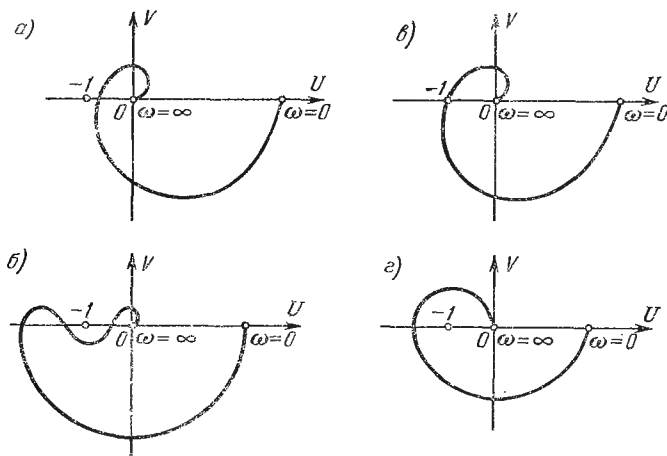


Рис. 6.16.

Поэтому результирующий угол поворота вектора $Q(j\omega)$ при изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$ будет равен $\psi_2 = n\pi$.

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае результирующий угол поворота вектора $W_1(j\omega)$ будет равен нулю: $\psi = \psi_1 - \psi_2 = 0$. Это означает, что для устойчивой в замкнутом состоянии системы годограф вектора $W_1(j\omega)$ не должен охватывать начала координат (рис. 6.15, а).

Частотная передаточная функция $W(j\omega)$ отличается от вспомогательной функции $W_1(j\omega)$ на единицу. Поэтому можно строить амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы по выражению (6.29), что проще. Но в этом случае амплитудно-фазовая характеристика не должна охватывать точку с координатами $(-1, j0)$. Это является достаточным и необходимым условием того, чтобы система была устойчивой в замкнутом состоянии (рис. 6.15, б).

При определении устойчивости достаточно построить амплитудно-фазовую характеристику только для положительных частот, так как ее ветвь, соответствующая отрицательным частотам, может быть легко получена зеркальным отображением относительно оси вещественных.

На рис. 6.16, а изображен случай так называемой *абсолютно устойчивой* системы. Этот термин означает, что система остается устойчивой при любом уменьшении коэффициента усиления разомкнутой цепи. Напомним, что передаточная функция разомкнутой статической системы может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{K(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{1 + C_{n-1}p + \dots + C_np^n}.$$

Нетрудно видеть, что уменьшение общего коэффициента усиления K приводит к уменьшению модуля (6.29), а это в случае, изображенном на рис. 6.16, а, не может привести к охвату годографом точки $(-1, j0)$.

На рис. 6.16, б изображен случай так называемой *условно устойчивой* системы. Здесь система будет устойчивой при значении общего коэффициента усиления, лежащем в некоторых пределах. Как увеличение, так и уменьшение общего коэффициента усиления K может привести к охвату годографом точки $(-1, j0)$, что будет соответствовать неустойчивости системы в замкнутом состоянии.

На рис. 6.16, в изображен случай, когда система находится на границе устойчивости. Граница устойчивости будет колебательного типа. Это вытекает из того, что при некоторой частоте, при которой годограф пересекает точку $(-1, j0)$, имеет место равенство $W(j\omega) = -1 + j0$, что может быть записано в виде

$$1 + W(j\omega) = 0.$$

Последнее выражение представляет собой характеристическое уравнение, которое обращается в нуль при подстановке $p = j\omega$. Таким образом, чисто мнимый корень является решением характеристического уравнения.

На рис. 6.16, г изображен случай неустойчивой системы.

Обратимся теперь к передаточной функции разомкнутой системы, соответствующей астатизму первого порядка. В этом случае передаточная функция может быть изображена в виде

$$W(p) = \frac{K_v(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{p(1 + C_{n-2}p + \dots + C_0p^{n-1})}.$$

Будем предполагать, что все корни знаменателя передаточной функции (кроме нулевого корня $p = 0$) лежат в левой полуплоскости, т. е. в разомкнутом состоянии система является нейтрально устойчивой.

Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы будет иметь разрыв непрерывности в точке $\omega = 0$. В этой точке модуль $A(0) \rightarrow \infty$, а фаза делает скачок на 180° . Для получения определенности в ходе амплитудно-фазовой характеристики необходимо отнести нулевой корень знаменателя передаточной функции $W(p)$ либо к левой, либо к правой полуплоскости корней (рис. 6.3). Первое является более удобным, так как при этом все корни знаменателя $W(p)$ будут расположены в левой полуплоскости.

Для выполнения сказанного поступают следующим образом. При изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$ происходит движение на плоскости корней вдоль оси мнимых снизу вверх (рис. 6.17). В начале координат расположен нулевой корень. Обойдем этот корень по полуокружности бесконечно малого радиуса так, чтобы корень остался слева. При движении по этой полуокружности против часовой стрелки независимая переменная p меняется по закону

$$p = \rho e^{j\varphi},$$

где $\rho \rightarrow 0$ представляет собой радиус полуокружности, а φ — аргумент, меняющийся от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. При этом передаточная функция $W(p)$ может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{K_v}{p} = \frac{K_v}{\rho} e^{-j\varphi} = R e^{j(-\varphi)},$$

где $R \rightarrow \infty$, а аргумент $(-\varphi)$ меняется в пределах от $+\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{\pi}{2}$.

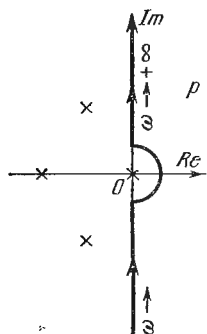


Рис. 6.17.

Таким образом, во время движения по полуокружности бесконечно малого радиуса передаточная функция может быть представлена в виде вектора бесконечно большой длины, поворачивающегося на комплексной плоскости *по часовой стрелке* на угол, равный π (от $\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{\pi}{2}$), что соответствует полуокружности бесконечно большого радиуса.

На рис. 6.18 изображена амплитудно-фазовая характеристика абсолютно устойчивой системы с астатизмом первого порядка. Характеристика начинается в начале координат при $\omega \rightarrow -\infty$ и затем уходит в бесконечность при $\omega \rightarrow 0$ (верхняя ветвь). Далее характеристика дополняется полуокружностью бесконечно большого радиуса так, чтобы вектор $W(j\omega)$ повернулся по часовой стрелке на угол π . Нижняя ветвь характеристики соответствует изменению частоты от 0 до $+\infty$.

Нетрудно видеть, что характеристика не охватывает точку $(-1, j0)$, и система в замкнутом состоянии будет устойчивой.

Амплитудно-фазовые характеристики для условно устойчивой системы, для случая колебательной границы устойчивости и случая неустойчивой

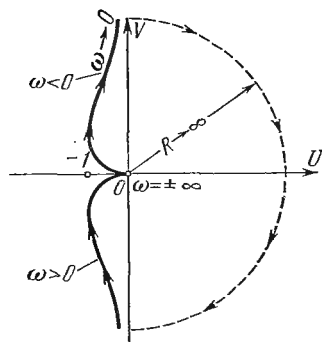


Рис. 6.18.

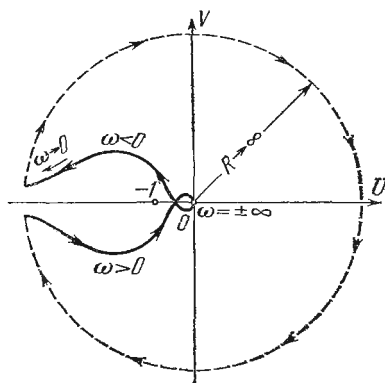


Рис. 6.19.

системы будут похожими на изображенные на рис. 6.16, б, в и г кривые, за тем исключением, что при $\omega \rightarrow 0$ характеристика будет уходить в бесконечность в соответствии с нижней ветвью характеристики, изображенной на рис. 6.18.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что для системы с астатизмом второго порядка, имеющей передаточную функцию вида

$$W(p) = \frac{K_e(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{p^2(1 + C_{n-3}p + \dots + C_0p^{n-2})},$$

при обходе двойного нулевого корня в начале координат (см. рис. 6.17) передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена вектором бесконечно большой длины, поворачивающимся *по часовой стрелке* на угол 2π .

На рис. 6.19 изображена амплитудно-фазовая характеристика абсолютно устойчивой системы при наличии астатизма второго порядка. Так же как и ранее, здесь можно получить условную устойчивость (рис. 6.19), колебательную границу устойчивости, если характеристика пройдет через точку $(-1, j0)$, и неустойчивость, если характеристика будет охватывать точку $(-1, j0)$.

Обобщая проведенные рассуждения, получаем, что для определения устойчивости системы с астатизмом любого порядка достаточно построить только одну ветвь амплитудно-фазовой характеристики, соответствующую положительным частотам, которая должна быть дополнена окружностью бесконечно большого радиуса. При этом для устойчивой в замкнутом состоянии системы эта ветвь вместе с частью окружности, заключенной между

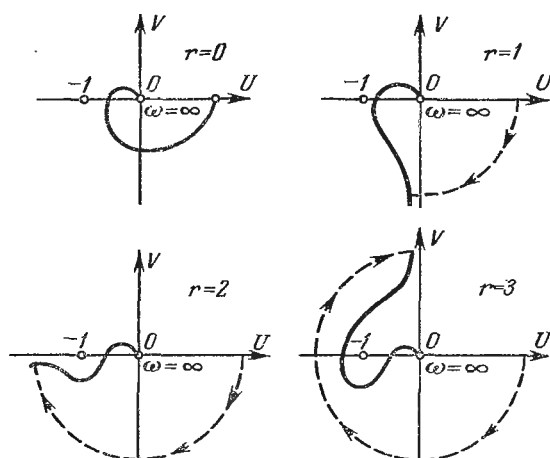


Рис. 6.20.

положительной полуосью вещественных и амплитудно-фазовой характеристикой, соответствующей положительным частотам, не должна охватывать точку $(-1, j0)$ в соответствии с рис. 6.20.

Из рис. 6.20 следует, что абсолютная устойчивость может быть получена при степени астатизма $r \leq 2$. При большей степени астатизма может быть получена только условная устойчивость.

Обратимся теперь к более общему случаю, когда знаменатель передаточной функции разомкнутой системы с любой степенью астатизма содержит корни, лежащие в правой полуплоскости. Это соответствует неустойчивой в разомкнутом состоянии системе.

Появление неустойчивости разомкнутой системы может вызываться двумя причинами. Во-первых, это может быть следствием наличия неустойчивых звеньев, подобных рассмотренным в § 4.8. Во-вторых, это может быть следствием потери устойчивости звеньев, охваченных положительными или отрицательными обратными связями (см., например, рис. 5.5).

Наличие неустойчивости системы в разомкнутом состоянии не означает, что система будет неустойчивой в замкнутом состоянии. Она может быть как устойчивой, так и неустойчивой. Однако формулировка критерия устойчивости Найквиста при этом несколько меняется. Пусть знаменатель передаточной функции разомкнутой системы (6.28) содержит l корней в правой полуплоскости и $n - l$ корней — в левой. Тогда при изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$ для устойчивой в замкнутом состоянии системы результирующий угол поворота годографа вектора $W(j\omega)$ относительно точки $(-1, j0)$ должен составить

$$\psi = \psi_1 - \psi_2 = n\pi - [(n - l)\pi - l\pi] = l \cdot 2\pi,$$

т. е. амплитудно-фазовая характеристика должна охватить точку $(-1, j0)$ столько раз, сколько корней в правой полуплоскости содержит знаменатель передаточной функции разомкнутой системы. При этом необходимо, чтобы

при изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$ конец вектора $W(j\omega)$ поворачивался вокруг точки $(-1, j0)$ на угол $l \cdot 2\pi$ *против часовой стрелки*. Нетрудно видеть, что формулировка критерия Найквиста для случая, когда $l = 0$, вытекает отсюда как частный случай.

Таким образом, при использовании критерия Найквиста, вообще говоря, необходимо убедиться в том, имеются ли в знаменателе передаточной функции разомкнутой системы корни, лежащие в правой полуплоскости, и сколько имеется таких корней.

Если в системе имеются местные обратные связи, например, такого типа, как это изображено на рис. 5.7, то необходимо убедиться в том, что по цепи местной обратной связи не нарушена устойчивость при разомкнутой главной обратной связи. Проверка устойчивости по цепи местной обратной связи может быть сделана посредством использования любых критериев устойчивости, в том числе и посредством критерия Найквиста, который может применяться для разомкнутой местной обратной связи обычным путем построения для этой цепи амплитудно-фазовой характеристики.

В случае, если для местной обратной связи будет получено указание на ее неустойчивость, необходимо определить число корней, лежащих в правой полуплоскости.

Следует заметить, что, хотя теоретически вся система в замкнутом состоянии может быть устойчивой при наличии неустойчивости по цепи местной обратной связи, практически такой случай является нежелательным и его надо избегать, стремясь использовать только устойчивые местные обратные связи. Это объясняется наличием некоторых нежелательных свойств, в частности появлением условной устойчивости, которая при имеющихся обычно в системе нелинейностях может в некоторых режимах привести к потере устойчивости и появлению автоколебаний. Поэтому, как правило, при расчете системы выбирают такие местные обратные связи, которые были бы устойчивыми при разомкнутой главной обратной связи.

Знаменатель передаточной функции разомкнутой системы (6.28) может иметь чисто мнимые корни. Пусть, например, имеется один нулевой корень $p_1 = 0$, пара мнимых корней $p_2, 3 = \pm j\beta$, а все остальные корни знаменателя $Q(p)$ лежат в левой полуплоскости (рис. 6.24).

Передаточную функцию разомкнутой системы в этом случае можно представить в виде

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{R(p)}{(p^2 + \beta^2) Q_0(p)} = \frac{W_0(p)}{p^2 + \beta^2}.$$

Для устранения неопределенности при изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$ можно использовать изложенный выше прием и отнести три корня, лежащих на мнимой оси, к левой полуплоскости, обойдя их справа по полуокружностям бесконечно малого радиуса.

В этом случае на частотах $\omega = 0$ и $\omega = \pm \beta$ модуль $W(j\omega)$ будет стремиться к бесконечности, а аргумент $W(p)$ при прохождении этих частот должен претерпевать приращение -180° , т. е. разрывы а. ф. х. должны дополняться полуокружностью бесконечного радиуса в направлении по часовой стрелке.

Это изображено на рис. 6.22. На рис. 6.22, а показана а. ф. х. разомкнутой системы, устойчивой в замкнутом состоянии. А. ф. х. построена только для положительных частот. При частоте $\omega \rightarrow \beta$ а. ф. х. уходит в бесконечность, асимптотически приближаясь к прямой, составляющей с осью вещественных угол, равный $\arg W_0(j\beta)$.

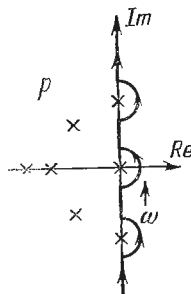


Рис. 6.24.

Далее а. ф. х. дополнена полуокружностью бесконечного радиуса, и при $\omega > \beta$ она возвращается из бесконечности вдоль той же асимптоты. Дальнейший ход а. ф. х. является обычным.

Из рис. 6.22, а видно, что а. ф. х. разомкнутой системы не охватывает точку $(-1, j0)$. В данном случае это должно соответствовать устойчивой замкнутой системе.

На рис. 6.22, б изображен другой случай, когда расположение а. ф. х. таково, что в замкнутом состоянии система оказывается неустойчивой, так как а. ф. х. охватывает точку $(-1, j0)$.

Достоинством критерия Найквиста является возможность использования для определения устойчивости *снятых экспериментально* частотных характеристик. Это оказывается особенно ценным в том случае, когда ввиду

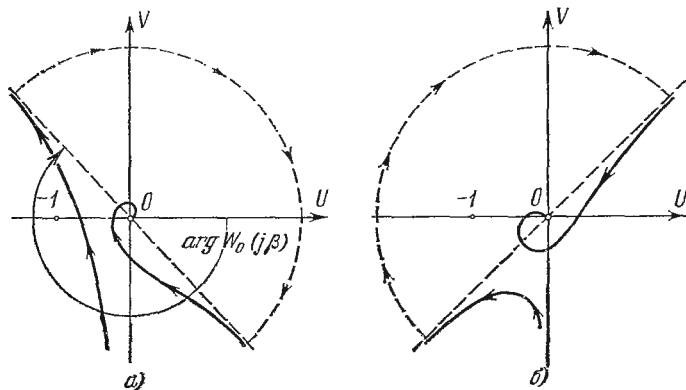


Рис. 6.22.

сложности исследуемой системы трудно получить исходные дифференциальные уравнения всей системы или ее отдельных блоков.

Большое практическое преимущество критерия Найквиста заключается также в том, что он может применяться при использовании логарифмических частотных характеристик, которые во многих случаях могут строиться почти без вычислительной работы. Этот вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе.

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим следящую систему, изображенную на рис. 6.4. Для этой системы была получена передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_y p)(1+T_m p)}.$$

Нетрудно видеть, что все корни знаменателя, кроме одного нулевого корня, лежат в левой полуплоскости. Поэтому в устойчивой системе амплитудно-фазовая характеристика не должна охватывать точку $(-1, j0)$.

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega T_y)(1+j\omega T_m)}.$$

Модуль ее

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega \sqrt{1+\omega^2 T_y^2} \sqrt{1+\omega^2 T_m^2}}$$

и фаза

$$\psi(\omega) = -90^\circ - \arctg \omega T_y - \arctg \omega T_m = -90^\circ - \arctg \frac{\omega(T_y + T_m)}{1 - \omega^2 T_y T_m}.$$

Задаваясь различными значениями частоты от 0 до $+\infty$, можно вычислить модуль и фазу. По модулю и фазе легко строится вектор $W(j\omega)$ либо вычисляются предварительно вещественная и мнимая части частотной передаточной функции

$$U(\omega) = A(\omega) \cos \psi(\omega), \quad V(\omega) = A(\omega) \sin \psi(\omega).$$

Ввиду достаточно простого выражения для частотной передаточной функции в данном примере можно легко найти $U(\omega)$ и $V(\omega)$, разлагая непосредственно комплекс $W(j\omega)$ на вещественную и мнимую части:

$$U(\omega) = -\frac{K(T_y + T_m)}{(1 + \omega^2 T_y^2)(1 + \omega^2 T_m^2)}, \quad V(\omega) = -\frac{K(1 - \omega^2 T_y T_m)}{\omega(1 + \omega^2 T_y^2)(1 + \omega^2 T_m^2)}.$$

Результаты расчетов сводятся в табл. 6.2.

Таблица 6.2

ω	$A(\omega)$	$\psi(\omega)$	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	∞	-90°	$-K(T_y + T_m)$	∞
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
∞	0	-270°	0	0

Примерный вид амплитудно-фазовой характеристики в случае устойчивой замкнутой системы изображен на рис. 6.23. Поскольку исходная передаточная функция имеет простой вид, задача получения устойчивости в рассматриваемой системе может быть решена в общем виде. Из рис. 6.23 следует, что для получения устойчивости точка пересечения амплитудно-фазовой характеристики с осью вещественных (точка a) должна лежать правее точки $(-1, j0)$. Это условие можно записать следующим образом:

$$A(\omega_a) < 1.$$

Найдем частоту в точке a . Это можно сделать, взяв одно из условий $V(\omega) = 0$ или $\psi(\omega) = -180^\circ$, откуда получаем

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{T_y T_m}}.$$

Подстановка этой частоты в записанное выше неравенство дает

$$\frac{K}{\frac{1}{\sqrt{T_y T_m}} \sqrt{1 + \frac{T_y}{T_m}} \sqrt{1 + \frac{T_m}{T_y}}} < 1$$

или, после преобразования,

$$K < \frac{1}{T_y} + \frac{1}{T_m}.$$

Таким образом, получено условие, совпадающее с найденным ранее условием, вытекающим из критериев Гурвица и Михайлова.

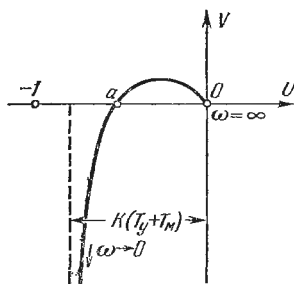


Рис. 6.23.

и именно ее иметь в виду при рассмотрении методов определения качества регулирования и синтеза систем регулирования.

З а м е ч а н и е 2. При определении устойчивости в используемой передаточной функции разомкнутой системы можно перемещать члены знаменателя в числитель и наоборот, за исключением старшего члена знаменателя. Так, например, если имеется передаточная функция

$$W(p) = \frac{b_0 p + b_1}{c_0 p^3 + c_1 p^2 + c_2 p + c_3},$$

то для расчета устойчивости она может быть заменена функцией

$$W'(p) = \frac{c_1 p^2 + (b_0 + c_2)p + b_1 + c_3}{c_0 p^3}.$$

В справедливости этого нетрудно убедиться на основании того, что характеристическое уравнение замкнутой системы $1 + W(p) = 1 + W'(p) = 0$ сохраняет при этом свой вид:

$$c_0 p^3 + c_1 p^2 + (b_0 + c_2)p + b_1 + c_3 = 0.$$

§ 6.6. Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

Для определения устойчивости по критерию Найквиста можно строить не амплитудно-фазовую характеристику, а логарифмическую амплитудную частотную характеристику (л. а. х.) и логарифмическую фазовую частотную характеристику (л. ф. х.) разомкнутой системы.

Построение л. а. х. производится по выражению

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|,$$

где $A(\omega)$ — модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы (6.29).

Построение л. ф. х. производится по значению $\psi(\omega)$ частотной передаточной функции (6.29). Для построения л. а. х. и л. ф. х. удобно использовать стандартную сетку, изображенную на рис. 4.10.

Наиболее простое построение получается, если передаточную функцию разомкнутой системы можно свести к виду

$$W(p) = \frac{K_r}{p^r} \frac{\prod_{j=1}^m (1 + T_j p)}{\prod_{i=1}^{n-r} (1 + T_i p)}.$$

При подстановке $p = j\omega$ получаем

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K_r}{\omega^r} \frac{\prod_{j=1}^m \sqrt{1 + \omega^2 T_j^2}}{\prod_{i=1}^{n-r} \sqrt{1 + \omega^2 T_i^2}}. \quad (6.34)$$

Фаза (аргумент) частотной передаточной функции

$$\psi(\omega) = -r \cdot 90^\circ + \sum_{j=1}^m \operatorname{arctg} \omega T_j - \sum_{i=1}^{n-r} \operatorname{arctg} \omega T_i. \quad (6.35)$$

На основании (6.34) и (6.35) можно легко, без дополнительных вычислений построить асимптотическую л. а. х., для чего на стандартной сетке (рис. 6.25) наносятся вертикальные прямые при сопрягающих частотах

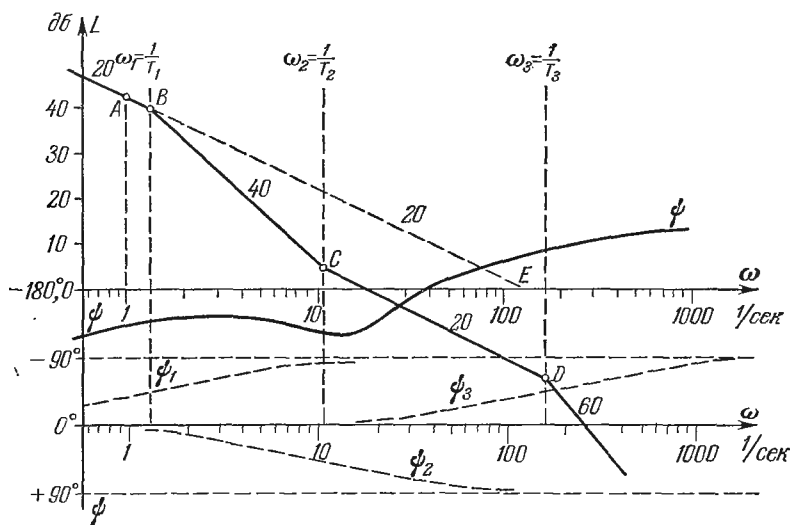


Рис. 6.25.

$\omega_j = \frac{1}{T_j}$ и $\omega_i = \frac{1}{T_i}$. Для определенности построения возьмем передаточную функцию разомкнутой системы с астатизмом первого порядка в виде

$$W(p) = \frac{K_v (1 + T_2 p)}{p (1 + T_1 p) (1 + T_3 p)^2},$$

которой соответствует выражение для модуля в логарифмических единицах

$$L^*(\omega) = 20 \lg \frac{K_v}{\omega} \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} (1 + \omega^2 T_3^2)}. \quad (6.36)$$

Примем, что выполняется условие $T_1 > T_2 > T_3$. Тогда для сопрягающих частот (рис. 6.25) будет выполнено условие $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$.

Построение асимптотической л. а. х. начинается с области низких частот. Если частота меньше первой сопрягающей частоты: $\omega < \omega_1$, то выражение (6.36) приобретает вид

$$L(\omega) \approx 20 \lg \frac{K_v}{\omega},$$

которому соответствует прямая с отрицательным наклоном 20 дБ/дек , проходящая через точку A с координатами $\omega = 1 \text{ сек}^{-1}$, $L(\omega) = 20 \lg K_v$ и через точку E с координатами $\omega = K_v$, $L(\omega) = 0$. Эту прямую (первую асимптоту) необходимо провести в низкочастотной области до первой сопрягающей частоты (точка B). Если эта сопрягающая частота соответствует постоянной времени, находящейся в знаменателе (6.34), то необходимо «изломать» л. а. х. на 20 дБ/дек вниз, т. е. провести следующую асимптоту с наклоном, большим на 20 дБ/дек . Если эта сопрягающая частота соответствует постоянной времени, находящейся в числителе (6.34), то соответственно необходимо «изломать» л. а. х. на 20 дБ/дек вверх.

В соответствии с выражением (6.36) для рассматриваемого примера в точке B необходимо «изломать» л. а. х. на 20 дБ/дек вниз, в точке C — на

* 20 дБ/дек вверх и в точке D — на 40 дБ/дек вниз. Таким образом, последняя высокочастотная асимптота в рассматриваемом примере будет иметь отрицательный наклон 60 дБ/дек.

Аналогичное построение л. а. х. может быть сделано при любом порядке астатизма. Разница будет заключаться в наклоне первой низкочастотной асимптоты, который должен быть равен $r \cdot 20$ дБ/дек. Эта асимптота может быть построена по одной точке с координатами $\omega = 1 \text{ сек}^{-1}$ и $L(\omega) = 20 \lg K_r$, или по точке пересечения асимптоты с осью частот (осью нуля децибел), которая имеет координаты $\omega = \sqrt[r]{K_r}$ и $L(\omega) = 0$.

Выражение для фазового сдвига (6.35) в рассматриваемом примере приобретает вид

$$\begin{aligned} \psi(\omega) &= -90^\circ - \operatorname{arctg} \omega T_1 + \operatorname{arctg} \omega T_2 - 2 \operatorname{arctg} \omega T_3 = \\ &= -90^\circ + \psi_1 + \psi_2 + 2\psi_3. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Каждый из углов ψ_1, ψ_2, ψ_3 представляет, по сути дела, одну и ту же зависимость фазового сдвига аperiodического звена первого порядка от частоты. Поэтому достаточно построить, например, только зависимость $\psi_1 = -\operatorname{arctg} \omega T_1$ (см. рис. 6.25). Все остальные слагаемые получаются простым сдвигом этой фазовой характеристики так, чтобы при соответствующей сопрягающей частоте иметь фазовый сдвиг 45° . При этом необходимо учитывать знак каждого слагаемого (6.37).

Логарифмическая характеристика разомкнутой системы может не сводиться к выражению (6.34). Если числитель или знаменатель передаточной функции разомкнутой системы содержит комплексные корни, то в выражениях (6.34) и (6.35) появятся члены, имеющие соответственно вид $\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}$ и $\operatorname{arctg} \frac{2\zeta T \omega}{1 - \omega^2 T^2}$. В этом случае для построения л. а. х. удобно выделить члены, соответствующие комплексным корням. Так, например, если в простой последовательной цепи звеньев содержится колебательное звено, то вместо выражения (6.34) можно записать

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K_r}{\omega^r} \frac{\prod_{j=1}^m \sqrt{1 + \omega^2 T_j^2}}{\prod_{i=1}^{n-r-2} \sqrt{1 + \omega^2 T_i^2}} + 20 \lg \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}}.$$

Первое слагаемое последнего выражения строится описанным выше путем. Для построения второго слагаемого можно использовать кривые, приведенные на рис. 4.18.

Аналогичным образом строится л. ф. х. Для построения фазовой характеристики колебательного звена можно использовать графики, приведенные на рис. 4.18.

В более сложных случаях, когда выражение для передаточной функции разомкнутой системы трудно представить в виде произведения простых сомножителей и оно имеет общий вид, построение л. а. х. и л. ф. х. можно производить обычным вычислением модуля и аргумента частотной передаточной функции при различных частотах, лежащих в пределах от 0 до $+\infty$.

Обратимся теперь к определению устойчивости по построенным л. а. х. и л. ф. х. Ограничимся вначале случаем, когда разомкнутая система устойчива или нейтральна. Кроме того, будем пока рассматривать системы с астатизмом не выше второго порядка.

Как следует из рис. 6.16, 6.18 и 6.19, в абсолютно устойчивых системах фазовый сдвиг может достигать значения $\psi = -180^\circ$ только при модулях,

меньших чем единица, а в условно устойчивых системах фазовый сдвиг может достигать -180° четное число раз (два, четыре и т. д.).

Это позволяет легко определить устойчивость по виду л. а. х. и л. ф. х. разомкнутой системы. На рис. 6.26, а изображен случай абсолютно устойчивой системы. Точка пересечения л. а. х. с осью нуля децибел (точка 1) лежит левее точки, где фазовый сдвиг достигает значения $\psi = -180^\circ$ (точка 2).

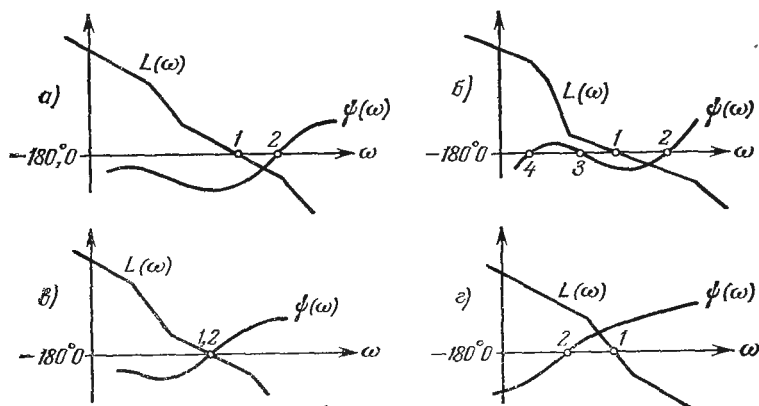


Рис. 6.26.

На рис. 6.26, б изображен случай условно устойчивой системы. Точка 1 по-прежнему лежит левее точки 2, но фазовый сдвиг достигает значения $\psi = -180^\circ$ дважды при модулях, больших чем единица (точки 3 и 4).

На рис. 6.26, в изображен случай колебательной границы устойчивости и на рис. 6.26, г — случай неустойчивой системы.

Л. а. х. и л. ф. х., построенные в качестве примера на рис. 6.25, соответствуют устойчивой системе.

Для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии, а также для систем, имеющих астатизм любого порядка, требования к л. ф. х. всегда можно сформулировать на основании вида амплитудно-фазовой характеристики, соответствующей устойчивой системе.

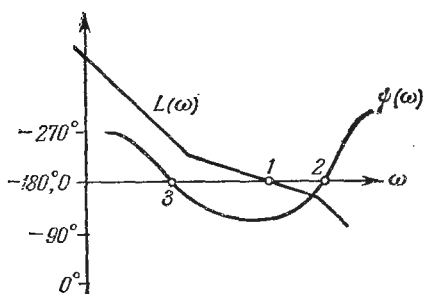


Рис. 6.27.

Так, например, для системы с астатизмом третьего порядка в случае устойчивой в разомкнутом состоянии системы (см. рис. 6.20) л. ф. х. должна проходить так, как это изображено на рис. 6.27. Фазовая характеристика при низких частотах начинается со значения фазового сдвига $\psi = -270^\circ$. Затем фазовый сдвиг уменьшается по абсолютному значению так, чтобы $\psi > -180^\circ$. Фазовая характеристика должна затем «обогнуть» точку пересечения

л. а. х. с осью нуля децибел (точку 1), после чего фазовые сдвиги могут быть любыми по величине.

Аналогичным образом можно сформулировать требования к л. ф. х. и в других случаях.

Иногда для определения устойчивости пользуются не л. а. х. и л. ф. х., а логарифмической амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы, построенной в координатах «модуль в децибелах — фаза» или «модуль

в децибелах — запас по фазе» (см. рис. 4.12). Для устойчивой системы эта характеристика должна обогнуть справа точку с координатами $L(\omega) = 0$ и $\psi = -180^\circ$ (или $\mu = 0$). На рис. 4.12 изображена характеристика, соответствующая устойчивой системе.

§ 6.7. Устойчивость двумерных систем с антисимметричными связями

В практике встречаются *двумерные* системы регулирования с антисимметричными связями. Структурная схема такой системы изображена на рис. 6.28. Она содержит два идентичных канала с одинаковыми передаточными функциями $W_0(p) = W_1(p) W_2(p)$ и антисимметричные связи. К такому

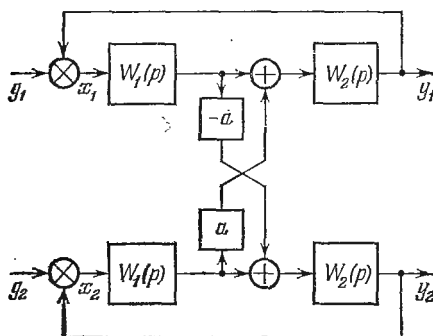


Рис. 6.28.

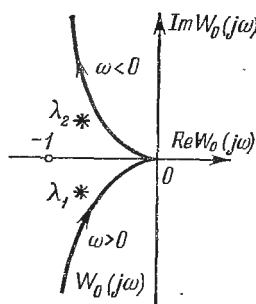


Рис. 6.29.

виду сводятся некоторые гироскопические устройства, двухканальные системы слежения и др.

Матрица-столбец выходных (регулируемых) величин связана с матрицей-столбцом ошибок выражением

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_0(p) & aW_0(p) \\ -aW_0(p) & W_0(p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = W(p) x. \quad (6.38)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$|I + W(p)| = \begin{vmatrix} 1 + W_0 & aW_0 \\ -aW_0 & 1 + W_0 \end{vmatrix} = (1 + W_0)^2 + a^2 W_0^2 = 0. \quad (6.39)$$

Здесь I — единичная матрица 2×2 .

Уравнение (6.39) можно представить в другом виде:

$$(W_0 - \lambda_1)(W_0 - \lambda_2) = 0, \quad (6.40)$$

где корни уравнения (6.39)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{1+a^2} \pm j \frac{a}{1+a^2}. \quad (6.41)$$

Исследование (6.40) сводится к рассмотрению двух уравнений: $W_0 - \lambda_1 = 0$ и $W_0 - \lambda_2 = 0$. Формально здесь может быть использован, например, критерий Найквиста, но вместо точки комплексной плоскости $(-1, j0)$, которая соответствует обычной записи характеристического уравнения $W_0 + 1 = 0$, необходимо рассматривать две точки, соответствующие комплексным числам λ_1 и λ_2 .

На рис. 6.29 изображена комплексная плоскость, на которой построены а. ф. х. частотной передаточной функции $W_0(j\omega)$ и комплексные числа, соответствующие λ_1 и λ_2 . Замкнутая система будет устойчивой, если а. ф. х.

устойчивого или нейтрально-устойчивого в разомкнутом состоянии одного изолированного канала не будет охватывать точек комплексной плоскости, соответствующих λ_1 и λ_2 .

Колебательная граница устойчивости будет иметь место, если выполняется одно из равенств: $W_0(j\omega) = \lambda_1$ или $W_0(j\omega) = \lambda_2$.

Из (6.41) нетрудно видеть, что при $a = 0$ обе точки стягиваются в одну точку $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, что соответствует обычной формулировке критерия Найквиста.

Другой метод расчета устойчивости заключается в том, что вводятся в рассмотрение комплексные величины

$$\left. \begin{aligned} g^* &= g_1 + jg_2, \\ y^* &= y_1 + jy_2, \\ x^* &= x_1 + jx_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

Матричная зависимость (6.38) дает два равенства:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= W_0(p) x_1 + a W_0(p) x_2, \\ y_2 &= -a W_0(p) x_1 + W_0(p) x_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.43)$$

Умножая второе равенство на j и складывая, получаем для комплексных величин

$$y^* = (1 - ja) W_0(p) x^* = W_3(p) x^*. \quad (6.44)$$

Здесь введена эквивалентная передаточная функция разомкнутой двумерной системы

$$W_3(p) = (1 - ja) W_0(p). \quad (6.45)$$

Для дальнейшего расчета может использоваться критерий Найквиста в своей обычной формулировке. Однако при построении а. ф. х. частотной

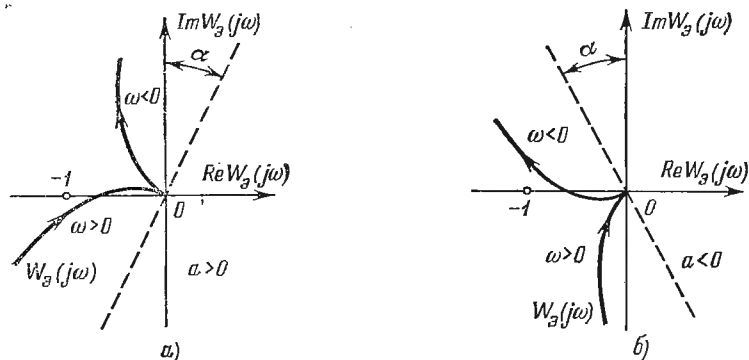


Рис. 6.30.

передаточной функции $W_3(j\omega)$ она оказывается повернутой по сравнению с исходной а. ф. х. величины $W_0(j\omega)$ по часовой стрелке на угол $\alpha = \arctg a$. Это соответствует введению дополнительного фазового сдвига, что приближает а.ф.х. к точке $(-1, j0)$ и снижает запас устойчивости (рис. 6.30, а). Кроме того, $\text{mod } W_3(j\omega)$ оказывается в $\sqrt{1 + a^2}$ раз больше $\text{mod } W_0(j\omega)$, что также способствует снижению запаса устойчивости.

При $a < 0$ поворот а. ф. х. будет против часовой стрелки и к точке $(-1, j0)$ будет приближаться верхняя ветвь а. ф. х., соответствующая отри-

цательным частотам (рис. 6.30, б). Это также соответствует снижению запаса устойчивости.

Заметим, что и в случае перехода к комплексным величинам y^* и x^* можно произвести расчет по а. ф. х. исходной одноканальной системы $W_0(j\omega)$. В этом случае колебательная граница устойчивости будет при выполнении условия

$$W_9(j\omega) = (1 - ja) W_0(j\omega) = -1. \quad (6.46)$$

Условие (6.46) сводится к равенству

$$W_0(j\omega) = \frac{-1}{1 - ja} = -\frac{1}{1 + a^2} - j\frac{a}{1 + a^2} = \lambda_1, \quad (6.47)$$

что согласуется с первым методом расчета устойчивости.

Рассмотренные методы позволяют упростить определение устойчивости двумерной системы по сравнению с использованием результирующего характеристического уравнения (6.39), так как требуют рассмотрения передаточной функции $W_0(p)$ одного изолированного канала.

ПОСТРОЕНИЕ КРИВОЙ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 7.1. Общие соображения

Дифференциальное уравнение обыкновенной линейной системы автоматического регулирования, записанное для ошибки регулирования, согласно (5.2) имеет вид

$$D(p)x(t) = Q(p)g(t) + N(p)f(t), \quad (7.1)$$

где $p = \frac{d}{dt}$ — алгебраизированный оператор дифференцирования, $g(t)$ — задающее воздействие и $f(t)$ — возмущающее воздействие.

Решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (7.1) будет

$$x(t) = x_{\text{п}}(t) + x_{\text{в}}(t), \quad (7.2)$$

где $x_{\text{п}}(t)$ — общее решение однородного уравнения $D(p)x(t) = 0$, имеющее вид

$$x_{\text{п}} = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}, \quad (7.3)$$

причем $C_1, \dots, C_n$ — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий процесса, а $p_1, \dots, p_n$ — корни характеристического уравнения $D(p) = 0$. Выражение (7.3) записано для случая отсутствия нулевых и кратных корней.

Частное, или вынужденное решение $x_{\text{в}}(t)$ определяется правой частью уравнения (7.1), и оно соответствует некоторому установившемуся режиму в системе, который будет существовать после затухания $x_{\text{п}}(t)$.

Полным решением (7.2) описывается процесс регулирования в линейной системе (общий случай возмущенного движения системы). Первая часть этого решения $x_{\text{п}}(t)$ в виде (7.3) представляет собой собственное движение системы, наложенное на частное решение $x_{\text{в}}(t)$.

Исходное дифференциальное уравнение системы может быть записано также для регулируемой величины $y(t) = g(t) - x(t)$. В системах стабилизации $g(t) = 0$ и поэтому $y(t) = -x(t)$.

Необходимо обратить внимание на следующее важное обстоятельство. Частное решение $x_{\text{в}}(t)$ складывается из отдельных слагаемых, отвечающих отдельным членам правой части дифференциального уравнения (7.1). Если действует несколько возмущающих воздействий, то в решении будет соответственно и несколько слагаемых. При этом каждое слагаемое частного решения $x_{\text{в}}(t)$ может определяться по отдельности для каждого возмущающего или задающего воздействия независимо от других, а затем их можно складывать. В этом состоит так называемый принцип суперпозиции.

Следовательно, если имеется дифференциальное уравнение

$$D(p)x(t) = Q(p)g(t) + N_1(p)f_1(t) + N_2(p)f_2(t),$$

то частное решение определяющее установившийся процесс в системе, будет иметь три слагаемых, каждое из которых определяется частным решением одного из уравнений:

$$D(p)x(t) = Q(p)g(t), \quad D(p)x(t) = N_1(p)f_1(t), \quad D(p)x(t) = N_2(p)f_2(t).$$

Несколько иначе обстоит дело с определением переходной составляющей. В решении для переходной составляющей (7.3) произвольные постоянные $C_1, \dots, C_n$ должны вычисляться по начальным условиям обязательно с использованием полного выражения решения (7.2), т. е. при исследовании переходных процессов в системах автоматического регулирования всегда надо оговаривать соответствующие внешние условия — задавать $g(t)$ и $f(t)$.

Если переходный процесс ищется как решение однородного уравнения $D(p)x(t) = 0$ при заданных начальных условиях системы, то результат такого решения отвечает случаю отсутствия задающих и возмущающих воздействий, причем система совершает свободное движение с какого-то смещенного начального положения. Если же переходный процесс происходит в результате изменения внешних условий (возмущающих сил, изменения нагрузки, перенастройки, изменения режима слежения и т. п.), то этот переходный процесс надо исследовать иначе, с определением произвольных постоянных из полного решения, включающего в себя установившуюся составляющую. Вид воздействия $g(t)$ или $f(t)$ и стоящих перед ними операторных многочленов оказывает существенное влияние на вид переходного процесса.

При нахождении кривой переходного процесса в системе автоматического регулирования возникают две трудности. Первая трудность — принципиального характера — заключается в том, что в реальных системах регулирования управляющие и возмущающие воздействия не являются известными функциями времени, а носят случайный характер. В связи с этим приходится рассматривать некоторые типовые входные воздействия. Типовые входные воздействия стремятся выбирать так, чтобы они были по возможности близкими к реальным воздействиям в системе автоматического регулирования.

Для следящих систем при $g(t) = 0$ и систем стабилизации переходный процесс может строиться для случая приложения возмущающего воздействия. В качестве типовых используются возмущающие воздействия в виде

единичной ступенчатой функции $f(t) = 1(t)$ и в виде единичной импульсной функции $f(t) = \delta(t)$. Эти типовые возмущения изображены на рис. 7.1.

Входная функция первого типа часто встречается в системах автоматического регулирования и представляет собой внезапный скачок возмущающего воздействия на некоторую постоянную величину, например увеличение тока нагрузки генератора, увеличение момента нагрузки двигателя и т. п. Реакция системы на такое воздействие, построенная для регулируемой

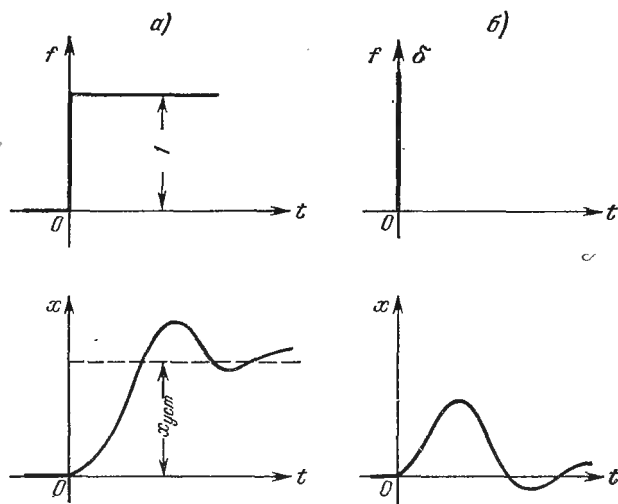


Рис. 7.1.

величины или для ошибки, отличающихся только знаками ($x(t) = -y(t)$), представляет собой переходную функцию системы для данного возмущения.

Входная функция второго типа также встречается в системах автоматического регулирования в виде кратковременного удара нагрузки, например при коротком замыкании электрического генератора, которое прекращается через небольшой промежуток времени системой защиты (плавкие предохранители, максимальные автоматы и т. п.), при кратковременном возрастании момента нагрузки двигателя и т. д. Реакция системы на воздействие этого типа представляет ее функцию веса.

В следящих системах для построения переходного процесса могут приниматься типовые задающие воздействия (рис. 7.2) в виде единичной ступенчатой функции $g(t) = 1(t)$ или в виде воздействия, изменяющегося по линейному закону $g(t) = at \cdot 1(t)$. Воздействие первого типа соответствует, например, в следящих системах воспроизведению угла быстрому повороту командной оси на некоторый угол. Реакция

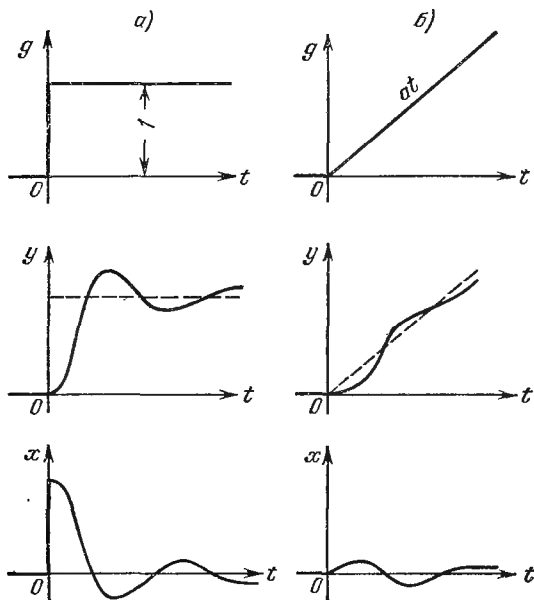


Рис. 7.2.

системы $y(t)$ на такое задающее воздействие представляет собой ее переходную функцию для задающего воздействия.

Воздействие второго типа является характерным для следящих систем воспроизведения угла, когда командная ось внезапно начинает двигаться с постоянной скоростью.

Возможно изучение поведения системы регулирования и в том случае, когда входное воздействие представляет собой не детерминированную (определенную), а случайную функцию времени. Этот вопрос будет рассмотрен в главе 11.

Вторая трудность — непринципиального характера — заключается в том, что обычно системы регулирования описываются дифференциальными уравнениями сравнительно высокого порядка. Это усложняет практические расчеты; потому для облегчения задачи построения кривой переходного процесса во многих случаях приходится пользоваться приближенными методами, а также применять вычислительные устройства непрерывного и дискретного действия.

Для построения кривой переходного процесса часто используют численные и графические методы решения дифференциальных уравнений. Таких методов существует много. Применительно к задачам теории автоматического регулирования наиболее удобным оказывается численно-графический метод, разработанный Д. А. Башкировым [98, 121]. Важным достоинством этого метода является то, что он без заметных усложнений может применяться к уравнениям с переменными во времени параметрами и к нелинейным уравнениям. Кроме того, метод Башкирова позволяет с одинаковой простотой строить процессы регулирования при любых заданных внешних воздействиях, в том числе и заданных графически или в виде таблиц.

Для получения переходных процессов с большим успехом и весьма широко применяются также вычислительные машины. Различаются вычислительные машины непрерывного и дискретного (цифровые) действия. Они строятся на электронных, полупроводниковых и электромеханических элементах.

Для сложных автоматических систем в настоящее время этому методу отдается предпочтение. Важно отметить, что при использовании вычислительных машин часто можно обходиться без составления дифференциальных уравнений тех звеньев автоматической системы, для которых имеются действующие макеты. Тогда для остальной части звеньев набираются их дифференциальные уравнения на вычислительной машине, к которой подключаются имеющиеся действующие макеты. Это свойство можно использовать для испытания и настройки регуляторов в лабораторных условиях.

Ниже будет рассмотрена часть наиболее распространенных методов построения кривой переходного процесса. К ним относятся метод непосредственного решения линейных дифференциальных уравнений или так называемый классический метод, использование преобразований Фурье, Лапласа и Карсона — Хевисайда, метод трапецеидальных вещественных частотных характеристик и использование вычислительных машин.

В дальнейшем изложении будем рассматривать построение переходного процесса для ошибки $x(t)$. Однако методика остается единой и для других случаев построения переходного процесса, например для отыскания $y(t)$ при $g(t) \neq 0$.

§ 7.2. Непосредственное решение исходного дифференциального уравнения

Пусть система автоматического регулирования описывается линейным дифференциальным уравнением с правой частью

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) x(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) f(t). \quad (7.4)$$

Для отыскания полного решения этого дифференциального уравнения необходимо найти частное или вынужденное решение уравнения с правой частью $x_{\text{в}}(t)$ и определить корни характеристического уравнения

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Как указывалось выше, полное решение будет иметь вид

$$x(t) = x_{\text{в}}(t) + C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}. \quad (7.5)$$

Дальнейшим шагом является отыскание произвольных постоянных интегрирования $C_1, \dots, C_n$. Для этой цели используются начальные условия: при $t = 0$ $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$, $\dots$, $x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}$. Начальные условия накладываются на основании физических соображений или находятся из дифференциального уравнения (7.4). Дифференцируя уравнение (7.5) по времени $n-1$ раз и используя начальные условия, получают n алгебраических уравнений, куда входят n неизвестных постоянных интегрирования. Совместное решение этих уравнений дает возможность определить искомые постоянные интегрирования $C_1, \dots, C_n$.

Операции вычисления корней и совместного решения алгебраических уравнений являются трудоемкими. Это особенно относится ко второй операции, так как вычисление корней может быть сделано довольно быстро приближенными методами. В связи с этим использование этого метода

построения кривой переходного процесса ограничивается случаем сравнительно невысокого порядка дифференциального уравнения, обычно не выше третьего.

Расчеты получаются более простыми в том случае, когда правая часть (7.4) равна нулю, т. е. имеется однородное дифференциальное уравнение. Тогда частное решение равно нулю и полное решение (7.5) приобретает более простой вид:

$$x(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}. \quad (7.6)$$

В этом случае переходный процесс определяется только видом корней и начальными условиями. В табл. 7.1 для этого случая приведены формулы

Таблица 7.1

n	Вещественные корни	Комплексные корни
1	$x = x_0 e^{-\alpha_1 t}$	—
2	$x = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}$ $A_1 = \frac{\alpha_2 x_0 + x'_0}{\alpha_2 - \alpha_1}$ $A_2 = \frac{\alpha_1 x_0 + x'_0}{\alpha_1 - \alpha_2}$	$x = (B \cos \lambda t + C \sin \lambda t) e^{-\gamma t}$ $B = x_0$ $C = \frac{\gamma x_0 + x'_0}{\lambda}$
3	$x = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t} + A_3 e^{-\alpha_3 t}$ $A_1 = \frac{\alpha_2 \alpha_3 x_0 + (\alpha_2 + \alpha_3) x'_0 + x''_0}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)}$ $A_2 = \frac{\alpha_1 \alpha_3 x_0 + (\alpha_1 + \alpha_3) x'_0 + x''_0}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_2)}$ $A_3 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 x_0 + (\alpha_1 + \alpha_2) x'_0 + x''_0}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)}$	$x = A e^{-\alpha_1 t} + (B \cos \lambda t + C \sin \lambda t) e^{-\gamma t}$ $A = \frac{(\gamma^2 + \lambda^2) x_0 + 2\gamma x'_0 + x''_0}{(\gamma - \alpha_1)^2 + \lambda^2}$ $B = \frac{\alpha_1 (\alpha_1 - 2\gamma) x_0 + 2\gamma x'_0 - x''_0}{(\gamma - \alpha_1)^2 + \lambda^2}$ $C = \frac{\alpha_1 (\lambda^2 - \gamma^2 + \gamma \alpha_1) x_0}{\lambda [(\gamma - \alpha_1)^2 + \lambda^2]} + \frac{(\alpha_1^2 - \gamma^2 + \lambda^2) x'_0 + (\alpha_1 - \gamma) x''_0}{\gamma [(\gamma - \alpha_1)^2 + \lambda^2]}$

для получающегося переходного процесса при различных степенях дифференциального уравнения n (от 1 до 3) и корнях различного вида. В таблице приняты следующие обозначения:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — абсолютные значения вещественных некротных корней; γ и λ — абсолютные значения вещественной и мнимой частей комплексного корня; x_0 — начальное значение исследуемой координаты; x'_0 — начальное значение скорости изменения исследуемой координаты; x''_0 — начальное значение ускорения.

§ 7.3. Сведение неоднородного уравнения к однородному

Для типового входного воздействия вида единичной ступенчатой функции решение неоднородного уравнения (7.4) может быть сведено к решению уравнения без правой части переходом к другой переменной. Примем, что $f(t) = 1(t)$, причем единица имеет размерность переменной, стоящей в пра-

вой части (7.4). Тогда установившееся значение переменной x при $t \rightarrow \infty$ можно найти из (7.4), положив все производные равными нулю:

$$x(\infty) = x_{уст} = \frac{b_m}{a_n} \cdot 1. \quad (7.7)$$

Это установившееся значение представляет собой частное или вынужденное решение неоднородного уравнения (7.4), т. е. $x_B(t) = x_{уст}$.

Введем новую переменную

$$z(t) = x(t) - x_B(t) = x(t) - x_{уст}. \quad (7.8)$$

Решение неоднородного уравнения (7.4) для $z(t)$ может быть записано в виде

$$z(t) = x(t) - x_{уст} = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}, \quad (7.9)$$

что подобно решению типа (7.6). Этому решению соответствует исходное дифференциальное уравнение без правой части

$$a_0 \frac{d^n z}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} + \dots + a_n z = 0. \quad (7.10)$$

Из уравнения (7.8) нетрудно определить связь между начальными условиями для исходной переменной x и новой переменной z при $t = 0$:

$$z_0 = x_0 - x_{уст}, \quad z'_0 = x'_0, \quad \dots, \quad z_0^{(n-1)} = x_0^{(n-1)}.$$

После нахождения решения для переменной z по формуле (7.8) можно легко вернуться к исходной переменной x смещением решения на величину $x_{уст}$.

Однако эти рассуждения пока справедливы для случая, когда степень операторного многочлена в правой части (7.4) равна нулю ($m = 0$) и дифференциальное уравнение (7.4) имеет вид

$$D(p)x(t) = b_m f(t).$$

Это происходит потому, что, вообще говоря, необходимо различать начальные условия, которые существовали в системе до приложения возмущения, т. е. при времени $t = -0$, и непосредственно сразу после его приложения, т. е. при времени $t = +0$. Остановимся на этом вопросе более подробно в случае приложения возмущения типа ступенчатой функции.

Для простоты расчетов для времени $t = -0$ почти всегда принимают нулевые начальные условия, т. е. $x_{-0} = 0$, $x'_{-0} = 0$, $x''_{-0} = 0$ и т. д. В дальнейшем под нулевыми начальными условиями будем понимать именно эти равенства.

Начальные условия, которые будут иметь место непосредственно после приложения ступенчатой функции, т. е. при $t = +0$ (обозначим их x_{+0} , x'_{+0} , x''_{+0} и т. д.), можно определить из исходного дифференциального уравнения (7.4). Не останавливаясь на доказательстве, приведем конечные результаты. Для первых $n - m$ начальных условий имеют место равенства

$$\left. \begin{aligned} x_{+0} &= x_{-0}, \\ x'_{+0} &= x'_{-0}, \\ &\dots \dots \dots \\ x_{+0}^{(n-m-1)} &= x_{-0}^{(n-m-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Таким образом, для самой координаты и первых $(n - m - 1)$ производных нулевые начальные условия сохраняются и после приложения ступенчатой функции.

Для остальных начальных условий выполняются соотношения

$$\left. \begin{aligned} x_{+0}^{(n-m)} &= x_{-0}^{(n-m)} + \frac{b_0}{a_0} \cdot 1, \\ x_{+0}^{(n-m+1)} &= x_{-0}^{(n-m+1)} + \frac{b_1}{a_0} \cdot 1 - \frac{a_1}{a_0} [x_{+0}^{(n-m)} - x_{-0}^{(n-m)}], \\ x_{+0}^{(n-m+2)} &= x_{-0}^{(n-m+2)} + \frac{b_2}{a_0} \cdot 1 - \frac{a_2}{a_0} [x_{+0}^{(n-m)} - x_{-0}^{(n-m)}] - \\ &\quad - \frac{a_1}{a_0} [x_{+0}^{(n-m+1)} - x_{-0}^{(n-m+1)}], \\ x_{+0}^{(n-1)} &= x_{-0}^{(n-1)} + \frac{b_{m-1}}{a_0} \cdot 1 - \frac{a_{m-1}}{a_0} [x_{+0}^{(n-m)} - x_{-0}^{(n-m)}] - \dots \\ &\quad \dots - \frac{a_1}{a_0} [x_{+0}^{(n-2)} - x_{-0}^{(n-2)}]. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Эти формулы показывают, что только при $m = 0$, т. е. для дифференциального уравнения $D(p)x(t) = b_m f(t)$ при скачке $f(t)$, начальные условия при $t = +0$ соответствуют начальным условиям при $t = -0$. В формулах (7.12) множитель 1 имеет размерность величины $f(t)$. Если воздействие прикладывается в виде скачка, не равного единице, то вместо 1 следует поставить величину скачка.

Пример. Найдем реакцию системы на единичную ступенчатую функцию при нулевых начальных условиях, т. е. переходную функцию, если дифференциальное уравнение имеет вид

$$(0,05p^2 + 0,4p + 1)x(t) = (0,5p + 1)f(t).$$

Для простоты примем, что переменная x является безразмерной величиной. Решая характеристическое уравнение $0,05p^2 + 0,4p + 1 = 0$, найдем корни:

$$p_{1,2} = -\gamma \pm j\lambda = -4 \pm j2.$$

Согласно заданным условиям $x_{-0} = 0$ и $x'_{-0} = 0$. Так как в данном случае $n = 2$ и $m = 1$, то начальные условия для $t = +0$, в соответствии с (7.11) и (7.12), будут

$$x_{+0} = x_{-0} = 0, \quad x'_{+0} = x'_{-0} + \frac{b_0}{a_0} \cdot 1 = 0 + \frac{0,5}{0,05} = 10 \text{ сек}^{-1}.$$

Определяем установившееся значение искомой координаты:

$$x_{уст} = \frac{bm}{a_n} \cdot 1 = 1.$$

Введем новую переменную $z(t) = x(t) - 1$. Начальные условия для новой переменной:

$$z_{+0} = x_{+0} - x_{уст} = 0 - 1 = -1, \quad z'_{+0} = x'_{+0} = 10 \text{ сек}^{-1}.$$

На основании табл. 7.1 для $n = 2$ и случая комплексных корней имеем

$$z = (B \cos \lambda t + C \sin \lambda t)e^{-\gamma t},$$

где

$$B = z_{+0} = -1, \quad C = \frac{\gamma z_{+0} + z'_{+0}}{\lambda} = \frac{-4 + 10}{2} = 3.$$

Таким образом

$$z = (-\cos 2t + 3 \sin 2t)e^{-4t}.$$

Возвращаясь к исходной координате, получаем переходную функцию

$$h(t) = x(t) = 1 + z(t) = 1 - (\cos 2t - 3 \sin 2t)e^{-4t}.$$

Аналогичным образом можно осуществить переход от неоднородного дифференциального уравнения (7.4) к уравнению без правой части при воздействии типа импульсной функции. В этом случае установившееся значение $x_{уст} = 0$, так как в случае $f(t) = \delta(t)$ при $t \rightarrow \infty$ будет $f(\infty) = 0$. Поэтому нет нужды вводить новую смещенную величину $z(t)$ и задача заключается только в отыскании начальных условий при $t = +0$.

Так как единичная импульсная функция является производной от единичного скачка $\delta(t) = 1'(t)$, то формулы пересчета начальных условий можно получить из (7.11) и (7.12), если заменить в них m на $m+1$ и положить $b_{m+1} = 0$. Тогда вместо (7.11) для первых $n-m-2$ начальных условий получим

$$\left. \begin{aligned} x_{+0} &= x_{-0}, \\ x'_{+0} &= x'_{-0}, \\ &\dots \dots \dots \\ x_{+0}^{(n-m-2)} &= x_{-0}^{(n-m-2)} \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

и вместо (7.12) для всех остальных начальных условий

$$\left. \begin{aligned} x_{+0}^{(n-m-1)} &= x_{-0}^{(n-m-1)} + \frac{b_0}{a_0} \cdot 1, \\ x_{+0}^{(n-m)} &= x_{-0}^{(n-m)} + \frac{b_1}{a_1} \cdot 1 - \frac{a_1}{a_0} [x_{+0}^{(n-m-1)} - x_{-0}^{(n-m-1)}], \\ x_{+0}^{(n-m+1)} &= x_{-0}^{(n-m+1)} + \frac{b_2}{a_0} \cdot 1 - \frac{a_2}{a_0} [x_{+0}^{(n-m-1)} - x_{-0}^{(n-m-1)}] - \\ &\quad - \frac{a_1}{a_0} [x_{+0}^{(n-m)} - x_{-0}^{(n-m)}], \\ &\dots \dots \dots \\ x_{+0}^{(n-1)} &= x_{-0}^{(n-1)} + \frac{b_m}{a_0} \cdot 1 - \frac{a_m}{a_0} [x_{+0}^{(n-m-1)} - x_{-0}^{(n-m-1)}] - \dots \\ &\quad \dots - \frac{a_1}{a_0} [x_{+0}^{(n-2)} - x_{-0}^{(n-2)}]. \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

В формулах (7.14) единица имеет размерность импульса величины $f(t)$, т.е. размерность $f(t)$, умноженную на время. Если воздействие поступает в виде неединичного импульса, то в эти формулы вместо единицы необходимо подставить заданную величину импульса.

Как видно из (7.14), при воздействии в виде импульса, в отличие от скачка, даже для дифференциального уравнения вида $D(p)x(t) = b_0 f(t)$ не будет равенства начальных условий для $t = +0$ и $t = -0$, так как будет скачок в значении $(n-1)$ -й производной. Скачок же первой производной x' , т.е. перелом кривой, будет уже при $m = n-2$, а скачок самой величины x — при $m = n-1$.

П р и м е р. Найдём реакцию системы на единичный импульс при нулевых начальных условиях, т.е. функцию веса для дифференциального уравнения, приведенного в предыдущем примере (стр. 174).

Так как в рассматриваемом примере $m = n-1$, то в соответствии с (7.14) получим

$$x_{+0} = x_{-0} + \frac{b_0}{a_0} \cdot 1 = 0 + \frac{0,5}{0,05} = 10 \text{ сек}^{-1},$$

$$x'_{+0} = x'_{-0} + \frac{b_1}{a_0} \cdot 1 - \frac{a_1}{a_0} [x_{+0} - x_{-0}] = 0 + \frac{1}{0,05} \cdot 1 - \frac{0,4}{0,05} \cdot 10 = -60 \text{ сек}^{-2}.$$

В соответствии с табл. 7.1 для $n = 2$ и комплексных корней

$$x = (B \cos 2t + C \sin 2t) e^{-4t},$$

где

$$B = x_{+0} = 10 \text{ сек}^{-1}, \quad C = \frac{\gamma x_{+0} + x'_{+0}}{\lambda} = \frac{4 \cdot 10 - 60}{2} = -10 \text{ сек}^{-2}.$$

Окончательно получаем функцию веса

$$w(t) = x(t) = 10 (\cos 2t - \sin 2t) e^{-4t}.$$

Этот результат можно было получить также непосредственным путем для $h(t)$, полученного в предыдущем примере, так как $w(t) = h'(t)$.

§ 7.4. Использование преобразований Фурье, Лапласа и Карсона — Хевисайда

Как известно, периодическая функция времени, подчиняющаяся условиям Дирихле, может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t),$$

где k — порядок гармоники, а $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — основная круговая частота.

Этот ряд может быть представлен также в комплексной форме:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega t},$$

где комплексный коэффициент C_k определяется выражением

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega t} dt.$$

Таким образом, периодическая функция времени может быть представлена в виде совокупности дискретных гармоник с интервалом по частоте между соседними гармониками, равным основной частоте ω .

Непериодическая функция времени может рассматриваться как периодическая с периодом, стремящимся к бесконечности. В этом случае вместо приведенных формул получаются два интегральных уравнения Фурье, связывающих оригинал, т. е. функцию времени $f(t)$, и ее частотное изображение $F(j\omega)$, которое называется также преобразованием Фурье:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (7.15)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (7.16)$$

В отличие от разложения в ряд Фурье здесь получается разложение в непрерывный спектр частот с интервалом по частоте между соседними гармониками, равным бесконечно малой величине $d\omega$.

Недостатком интеграла Фурье является то, что он принадлежит к числу несобственных интегралов и может применяться для так называемых абсолютно интегрируемых функций времени, т. е. для функций времени, удовлетворяющих неравенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

От этого недостатка свободно преобразование Лапласа, связывающее оригинал и изображение следующими интегральными уравнениями:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (7.17)$$

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad (7.18)$$

причем функция времени должна быть равна нулю ($f(t)=0$) при $t < 0$. В отличие от преобразования Фурье здесь изображение функции времени является функцией не частоты, а некоторой комплексной величины $s = c + j\omega$. Вещественная часть ее представляет собой так называемую абсциссу абсолютной сходимости, которая выбирается так, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-ct} dt < \infty.$$

Для большинства функций, с которыми приходится иметь дело в регулировании, абсцисса абсолютной сходимости равна нулю, т. е. $c = 0$. Поэтому для этих функций преобразование Лапласа переходит в преобразование Фурье, если произвести подстановку $s = j\omega$.

Уравнения (7.17) и (7.18) часто записывают в сокращенном виде:

$$F(s) = L[f(t)], \quad f(t) = L^{-1}[F(s)]. \quad (7.19)$$

Иногда вместо буквы s применяется буква p , т. е. изображение Лапласа записывается в виде $F(p)$, но в этом случае p представляет собой не оператор дифференцирования, а комплексную величину: $p = c + j\omega$ ¹⁾.

В связи с этим формулы (7.19) и (7.20) могут быть записаны в виде

$$F(p) = L[f(t)], \quad f(t) = L^{-1}[F(p)]. \quad (7.20)$$

В некоторых случаях, особенно в задачах электротехники, используется преобразование Карсона — Хевисайда, которое отличается от преобразования Лапласа дополнительным умножением на величину p :

$$\Phi(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (7.21)$$

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\Phi(p)}{p} dp. \quad (7.22)$$

Таким образом, между преобразованиями Лапласа и Карсона — Хевисайда существует соотношение

$$\Phi(p) = pF(p). \quad (7.23)$$

Преобразование Карсона — Хевисайда нашло распространение наряду с преобразованием Лапласа. Это объясняется тем, что исторически первым для решения дифференциальных уравнений был использован так называемый

¹⁾ В дальнейшем изложении при использовании изображения функции времени комплексная величина будет обозначаться буквой p . Однако при этом необходимо не путать эту величину с оператором дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$, который применяется при использовании функции времени (оригиналов).

операторный метод Хевисайда, который, по сути дела, использовал преобразования (7.24) и (7.22).

Кроме того, удобство преобразования Карсона — Хевисайда заключается в том, что изображение постоянной величины A , точнее, ступенчатой функции $A \cdot 1(t)$, равно самой постоянной величине, что легко доказывается использованием выражения (7.21). Поэтому во многих случаях преобразование Карсона — Хевисайда сливается с операторной записью дифференциальных уравнений.

Основное достоинство преобразований Фурье, Лапласа и Карсона — Хевисайда заключается в том, что операции дифференцирования и интегрирования оригинала заменяются алгебраическими действиями по отношению к изображениям.

В табл. 7.2 приведены основные формулы и свойства изображений Лапласа и Карсона — Хевисайда. Изображение Фурье может быть получено из изображения Лапласа подстановкой $p = j\omega$.

Формулы для дифференцирования и интегрирования оригинала даны для случая нулевых начальных условий.

Для ненулевых начальных условий из (7.17) можно получить изображение по Лапласу производной оригинала (s заменено на p):

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0), \quad (7.24)$$

где $F(p)$ — изображение самой функции.

Аналогично для второй производной

$$L[f''(t)] = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) \quad (7.25)$$

и для производной любого порядка

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (7.26)$$

При нулевых начальных условиях

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) \quad (7.27)$$

или

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p), \quad (7.28)$$

т. е. операция дифференцирования оригинала заменяется для изображения умножением на комплексную величину p .

Аналогично для преобразования Карсона — Хевисайда

$$f'(t) \doteq p\Phi(p) - pf(0), \quad (7.29)$$

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n \Phi(p) - p^n f(0) - \dots - pf^{(n-1)}(0). \quad (7.30)$$

При нулевых начальных условиях

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n \Phi(p).$$

Аналогичным образом можно найти изображение интеграла от функции времени:

$$\int f(t) dt \doteq \frac{1}{p} [F(p) + f_0^{(-1)}], \quad (7.31)$$

где $f_0^{(-1)}$ представляет собой значение интеграла, находящегося в левой части (7.31), при $t = 0$:

$$f_0^{(-1)} = \left[\int f(t) dt \right]_{t=0}.$$

Таблица 7.2

Преобразования Лапласа и Карсона — Хевисайда

Наименование	Оригинал	Изображение Лапласа	Изображение Карсона — Хевисайда
Свойство линейности	$Af(t)$ $f_1(t) + f_2(t)$	$AF(p)$ $F_1(p) + F_2(p)$	$A\varphi(p)$ $\varphi_1(p) + \varphi_2(p)$
Теорема подобия	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$	$\varphi\left(\frac{p}{a}\right)$
Теорема запаздывания	$f(t - \tau_0)$	$e^{-\tau_0 p} F(p)$	$e^{-\tau_0 p} \varphi(p)$
Теорема смещения в комплексной плоскости	$e^{-\lambda t} f(t)$	$F(p + \lambda)$	$\frac{p}{p + \lambda} \varphi(p + \lambda)$
Правило дифференцирования при нулевых начальных условиях	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p)$	$p^n \varphi(p)$
Правило интегрирования при нулевых начальных условиях	$\int \int \int \dots f(t) dt^n$	$\frac{F(p)}{p^n}$	$\frac{\varphi(p)}{p^n}$
Теорема о конечном значении	$f(\infty)$	$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$	$\lim_{p \rightarrow 0} \varphi(p)$
Теорема о начальном значении	$f(0)$	$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$	$\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi(p)$
Единичная импульсная функция	$\delta(t)$	1	p
Единичная ступенчатая функция	$1(t)$	$\frac{1}{p}$	1
Неединичная ступенчатая функция	$A \cdot 1(t)$	$\frac{A}{p}$	A
Степенная функция	$t^n \cdot 1(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\frac{n!}{p^n}$
Экспонента	$e^{-at} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{p}{p+a}$
Смещенная экспонента	$\frac{1}{a} (1 - e^{-at}) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{p+a}$
Синусоида	$\sin \lambda t \cdot 1(t)$	$\frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}$	$\frac{\lambda p}{p^2 + \lambda^2}$
Косинусоида	$\cos \lambda t \cdot 1(t)$	$\frac{p}{p^2 + \lambda^2}$	$\frac{p^2}{p^2 + \lambda^2}$
Затухающая синусоида	$e^{-\gamma t} \sin \lambda t \cdot 1(t)$	$\frac{\lambda}{(p+\gamma)^2 + \lambda^2}$	$\frac{\lambda p}{(p+\gamma)^2 + \lambda^2}$
Затухающая косинусоида	$e^{-\gamma t} \cos \lambda t \cdot 1(t)$	$\frac{p+\gamma}{(p+\gamma)^2 + \lambda^2}$	$\frac{p(p+\gamma)}{(p+\gamma)^2 + \lambda^2}$

Для нулевых начальных условий выражение (7.31) упрощается:

$$\int f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p},$$

т. е. интегрированию по времени оригинала соответствует деление на изображение на комплексную величину p .

Рассмотрим теперь использование изображений для решения дифференциального уравнения

$$D(p)x(t) = N(p)f(t) \quad (7.32)$$

на примере преобразования Лапласа.

Перейдем в левой и правой частях (7.32) к изображениям Лапласа. При этом оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$ в полиномах $D(p)$ и $N(p)$ заменяется на комплексную величину $p = c + j\omega$, а вместо оригиналов $x(t)$ и $f(t)$ появляются их изображения $X(p)$ и $F(p)$. В результате получаем

$$D(p) X(p) - D_0(p) = N(p) F(p),$$

где $D_0(p)$ обозначает сумму всех членов, содержащих начальные условия. Отсюда находится изображение искомой величины:

$$X(p) = \frac{N(p) F(p) + D_0(p)}{D(p)}. \quad (7.33)$$

Последнее выражение требует некоторых пояснений в связи с различными возможными трактовками понятия начальных условий. Интегральное преобразование Лапласа (7.17), следует, вообще говоря, записать в более строгом виде (при замене s на p):

$$X(p) = \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f(t) e^{-pt} dt. \quad (7.34)$$

Это дает возможность введения двух несколько отличающихся понятий преобразования Лапласа (и соответственно преобразования Карсона — Хевисайда).

1. Преобразование Лапласа по начальным условиям справа. Если в выражении (7.34) нижний предел интегрирования стремится к нулю, оставаясь положительным ($a > 0$), то в изображении производной (7.26) следует брать начальные условия при $t = +0$, т. е. для момента времени, который будет сразу после приложения к системе внешних воздействий. В этом случае

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - (p)^{n-1} f(+0) - \dots - f^{(n-1)}(+0).$$

Для использования последней формулы необходимо знание начальных условий справа, что оказывается не всегда удобным и требует расчета по формулам § 7.3. Заметим, что даже в тех случаях, когда до приложения воздействия система находилась в покое, начальные условия справа могут быть ненулевыми и полином $D_0(p)$, как правило, отличен от нуля.

Кроме того, если рассматриваемая функция времени $f(t)$ имеет при $t = 0$ особенности типа δ -функции, то это обстоятельство не будет учтено в найденном изображении. Так, например, изображение самой δ -функции и ее производных оказывается при этом равным нулю:

$$\int_{+0}^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = \int_{+0}^{\infty} \delta^{(n)}(t) e^{-pt} dt = 0.$$

2. Преобразование Лапласа по начальным условиям слева. Если в формуле (7.34) нижний предел интегрирования стремится к нулю, оставаясь отрицательным ($a < 0$), то в выражении для изображения производной (7.26) следует брать начальные условия при $t = -0$, т. е. для момента времени, который будет непосредственно предшествовать моменту приложения воздействия. Такие начальные условия называются также *предначальными*. В этом случае

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(-0) - \dots - f^{(n-1)}(-0).$$

Расчет получается более простым, так как предначальные условия должны быть известны всегда и никаких дополнительных операций здесь

не требуется. В частном случае, когда до приложения воздействия система находилась в покое, предначальные условия нулевые и выражение (7.33) приобретает вид

$$X(p) = \frac{N(p)}{D(p)} F(p) = W(p) F(p). \quad (7.35)$$

Только это выражение и позволяет строго сформулировать понятие передаточной функции $W(p)$ как отношение изображений входной и выходной величин при нулевых предначальных условиях.

Кроме того, преобразование Лапласа в случае, когда нижний предел интегрирования стремится к нулю, оставаясь отрицательным ($a < 0$), позволяет учитывать наличие в рассматриваемой функции при $t = 0$ особенностей типа δ -функции. Так, например, изображение единичной δ -функции оказывается равным единице:

$$\int_{-0}^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1,$$

а изображение ее производной n -го порядка

$$\int_{-0}^{\infty} \delta^{(n)}(t) e^{-pt} dt = p^n.$$

Влияние особенностей $f(t)$ и ее первых m производных, где m — порядок полинома $N(p)$, на изображение $N(p)f(t)$ в этом случае и проявляется в виде автоматического учета начальных условий, которые будут иметь место справа (при $t = +0$) в самом изображении $N(p)F(p)$ без введения дополнительного члена $D_0(p)$ при нулевых предначальных условиях или без его изменения при ненулевых предначальных условиях. В связи с этим δ -функция иногда называется также *функцией начальных условий*.

В дальнейшем изложении под преобразованием Лапласа будет пониматься именно этот случай ($a < 0$).

Зная изображение искомой величины $X(p)$ в виде (7.33) или (7.35), можно найти оригинал $x(t)$. Это и будет решением исходного дифференциального уравнения (7.32).

Для отыскания оригинала $x(t)$ по его изображению $X(p)$ можно пользоваться таблицами изображений и существующими теоремами, в частности *теоремой разложения*, которая устанавливает следующее. Если изображение Лапласа имеет вид отношения двух многочленов

$$X(p) = \frac{X_1(p)}{X_2(p)}, \quad (7.36)$$

то при отсутствии нулевых корней знаменателя

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{X_1(p_k)}{X_2'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (7.37)$$

где p_k — некрратные корни знаменателя (7.36).

Если знаменатель изображения Лапласа (7.36) имеет нулевой корень ($p_0 = 0$), то изображение надо представить в виде

$$X(p) = \frac{X_1(p)}{p X_3(p)}. \quad (7.38)$$

Тогда оригинал может быть найден по формуле

$$x(t) = \frac{X_1(0)}{X_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{X_1(p_k)}{p_k X_3'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (7.39)$$

Аналогичным образом теорема разложения может быть записана и для преобразований Карсона — Хевисайда. Так, например, если изображение искомой величины может быть представлено в виде отношения двух полиномов

$$\varphi(p) = X(p) = \frac{X_1(p)}{X_3(p)}, \quad (7.40)$$

то при отсутствии нулевых и кратных корней знаменателя оригинал будет определяться выражением

$$x(t) = \frac{X_1(0)}{X_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{X_1(p_k)}{p_k X_3'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (7.41)$$

Это выражение полностью совпадает с формулой (7.39), так как изображения Лапласа (7.38) и Карсона — Хевисайда (7.40) отличаются на множитель p .

Использование изображений часто называют также *операторным методом*, хотя в действительности операторному методу, разработанному Хевисайдом, оказывается полностью аналогичным использование только преобразований Карсона — Хевисайда (7.21) и (7.22).

Метод использования изображений обладает тем преимуществом, что в нем полностью сохраняются лишь одна операция — вычисление корней характеристического уравнения (знаменателя изображения). Что касается определения произвольных постоянных интегрирования, то эта операция отпадает, потому что начальные условия автоматически учитываются в процессе решения с самого начала (при нахождении изображения искомой величины). Поэтому этот метод оказывается удобным и его часто применяют в задачах теории регулирования.

Практически важной для отыскания оригинала решения является еще *теорема свертывания*. Она гласит следующее. Если изображение представляет собой произведение

$$X(p) = X_1(p) X_2(p), \quad (7.42)$$

то оригинал выражается формулой

$$x(t) = \int_0^t x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau, \quad (7.43)$$

где τ представляет собой вспомогательное время интегрирования.

В частности, пусть для некоторой системы с передаточной функцией $W(p)$ известна реакция на единичную импульсную функцию $\delta(t) \doteq 1$, представляющую собой функцию веса и связанную с $W(p)$ преобразованием Лапласа

$$W(p) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-pt} dt.$$

Если на вход этой системы поступает некоторая функция времени $f(t)$, изображение которой $F(p)$, то изображение выходной величины будет

$$X(p) = W(p) F(p).$$

Тогда функция времени на выходе может быть найдена по интегралу свертывания (7.43), который совпадает с интегралом Дюамеля (4.9):

$$x(t) = \int_0^t w(\tau) f(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) w(t-\tau) d\tau. \quad (7.44)$$

Если входная функция определена только для положительного времени (прикладывается на вход в момент времени $t=0$), то функция $f(t-\tau)$ отлична от нуля только при $\tau \leq t$. В этом случае верхний предел интеграла в формуле (7.44) может быть заменен на бесконечность и она приобретает вид

$$x(t) = \int_0^{\infty} w(\tau) f(t-\tau) d\tau. \quad (7.44')$$

§ 7.5. Использование вещественных частотных характеристик

Опишем метод приближенного построения кривой переходного процесса в автоматической системе (при воздействиях в виде скачка и импульса) по заданной вещественной частотной характеристике замкнутой системы, разработанный В. В. Солодовниковым в 1948 году [121]. Этот способ полезен тогда, когда расчет системы ведется с самого начала частотными методами. Он совершенно необходим, если известны уравнения не всех звеньев системы а часть из них задается экспериментально снятыми частотными характеристиками.

На основании интеграла Фурье (7.16) оригинал искомой величины может быть представлен в виде

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega, \quad (7.45)$$

где $X(j\omega)$ — изображение Фурье искомой функции времени $x(t)$, а

$$\varphi(j\omega) = P_{\varphi}(\omega) + jS_{\varphi}(\omega) \quad (7.46)$$

— частотное изображение искомой величины, полученное из изображения Карсона — Хевисайда $\varphi(p)$ подстановкой $p = j\omega$.

Однако использовать интегральную зависимость (7.45) можно только в том случае, когда все полюсы функции $X(j\omega)$ лежат в левой полуплоскости. Тогда интегрирование может вестись по мнимой оси. Это значит, что для преобразования Лапласа (7.18) абсцисса абсолютной сходимости $\sigma = 0$ и $p = j\omega$.

В действительности изображение Фурье $X(j\omega)$ даже для устойчивой системы, когда все полюсы передаточной функции системы лежат в левой полуплоскости, может иметь полюсы на мнимой оси за счет входного воздействия. Так, например, пусть передаточная функция системы имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{1+ap+bp^2},$$

причем $a > 0$ и $b > 0$. Полюсы этой передаточной функции лежат в левой полуплоскости.

Если на вход поступает сигнал типа единичной ступенчатой функции $x_1(t) = 1(t)$, изображение которого по Лапласу равно $X_1(p) = \frac{1}{p}$, то изображение выходной величины будет

$$X_2(p) = W(p) X_1(p) = \frac{k}{p(1+ap+bp^2)}.$$

Это изображение имеет однократный полюс в начале координат ($p_1 = 0$).

Если на вход системы поступает сигнал типа $x_1(t) = vt \cdot 1(t)$, изображение которого $X_1(p) = \frac{v}{p^2}$, то изображение выходной величины будет иметь в начале координат двукратный полюс ($p_1 = p_2 = 0$).

В связи с этим для использования интегральной зависимости (7.45) необходимо отделить от изображения Фурье искомой функции времени члены, содержащие полюсы на мнимой оси.

Рассмотрим частный случай, когда изображение Карсона — Хевисайда $\Phi(p) = pX(p)$ не имеет полюсов на мнимой оси. К этому случаю сводится, например, задача нахождения переходной функции в устойчивой системе, если даны ее передаточная функция $\Phi(p)$, не имеющая полюсов на мнимой оси, и входное воздействие типа единичной ступенчатой функции $G(p) = \frac{1}{p}$. Тогда изображение по Лапласу выходной величины будет

$$Y(p) = \frac{\Phi(p)}{p}$$

и соответственно $\Phi(p) = pY(p) = \Phi(p)$.

Тогда оказывается, что частотное изображение $\Phi(j\omega)$ совпадает с частотной передаточной функцией замкнутой системы $\Phi(j\omega)$, а вещественная $P_\Phi(\omega)$ и мнимая $S_\Phi(\omega)$ части в формуле (7.46) совпадают с вещественной $P(\omega)$ и мнимой $S(\omega)$ частотными характеристиками замкнутой системы. К аналогичному результату можно прийти, если рассматривать реакцию системы на скачок внешнего возмущения. Тогда вещественная и мнимая части в формуле (7.46) будут совпадать с вещественной и мнимой частями частотной передаточной функции по возмущению $\Phi_F(j\omega) = P_F(\omega) + jS_F(\omega)$.

К тому же частному случаю могут сводиться и другие задачи исследования переходных процессов в системах регулирования, например нахождение ошибки системы при приложении скачкообразного внешнего возмущения, нахождение функции веса системы и др.

В этом случае существует ограниченное установившееся значение искомой функции времени $x(t)$, которое можно получить, подставляя в $\Phi(p)$ значение $p = 0$.

Учитывая, что $S_\Phi(0) = 0$, получаем $x_{уст} = \Phi(0) = P_\Phi(0)$. Тогда подынтегральная функция (7.45) может иметь однократный полюс в начале координат. Его можно устранить, рассматривая не саму величину $x(t)$, а разность $x(t) - x_{уст} = x(t) - P_\Phi(0)$, которой соответствует разность изображений $\Phi(p) - \Phi(0) = \Phi(p) - P_\Phi(0)$. В результате приходим к следующей интегральной зависимости:

$$x(t) - P_\Phi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(j\omega) - P_\Phi(0)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega. \quad (7.47)$$

Используем формулу Эйлера

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t.$$

Подставляя последнее выражение в (7.47), используя формулу (7.46) и отбрасывая мнимую часть, которая должна быть равной нулю, так как функция

$x(t)$ является, конечно, вещественной, получаем

$$x(t) - P_{\varphi}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{\varphi}(\omega) \sin \omega t - P_{\varphi}(0) \sin \omega t + S_{\varphi}(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (7.48)$$

Подынтегральное выражение представляет собой четную функцию частоты. Поэтому интегрирование по всем частотам можно заменить интегрированием только по положительным частотам, а затем удвоить результат.

Так как

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_{\varphi}(0) \sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{P_{\varphi}(0)}{2},$$

то в результате имеем

$$x(t) = \frac{P_{\varphi}(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_{\varphi}(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{S_{\varphi}(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (7.49)$$

Если принять нулевые начальные условия, то до приложения внешнего воздействия (при $t < 0$) $x(t) \equiv 0$. Заменив в (7.49) время t на $-t$, получим

$$0 = \frac{P_{\varphi}(0)}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_{\varphi}(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{S_{\varphi}(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (7.50)$$

Совместное решение (7.49) и (7.50) дает два выражения для нахождения искомой функции времени:

$$x(t) = P_{\varphi}(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{S_{\varphi}(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega, \quad (7.51)$$

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_{\varphi}(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega, \quad (7.52)$$

причем $P_{\varphi}(0) = x_{уст.}$

Таким образом, можно отыскать оригинал $x(t)$ по известной вещественной $P_{\varphi}(\omega)$ или известной мнимой $S_{\varphi}(\omega)$ частям частотного изображения $\varphi(j\omega) = j\omega X(j\omega)$. Обычно для этих целей используется вещественная часть изображения $P_{\varphi}(\omega)$.

Если входное воздействие представляет собой единичный скачок, то, как указывалось выше, частотное изображение $\varphi(j\omega)$ совпадает с частотной передаточной функцией замкнутой системы $\Phi(j\omega)$. Тогда в формулы (7.51) и (7.52) будут входить вещественная и мнимая части частотной передаточной функции замкнутой системы $\Phi(j\omega) = P(\omega) + jS(\omega)$. Следовательно, в этом случае для построения переходного процесса, который будет представлять собой переходную функцию системы $h(t)$, необходимо в формуле (7.52) положить $P_{\varphi}(\omega) = P(\omega)$, где $P(\omega)$ — вещественная характеристика системы. В результате получим

$$x(t) = h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (7.53)$$

Аналогичным образом, при нахождении реакции системы на единичный скачок возмущающего воздействия необходимо использовать вещественную часть частотной передаточной функции по возмущению.

В дальнейшем изложении будем иметь в виду случай, определяемый формулой (7.53), хотя методика построения переходного процесса остается единой и для общего случая (7.52).]

Интегрирование выражения (7.53) представляет большие трудности. Поэтому обычно используется приближенное решение задачи. Для этой цели вводится понятие *типовой единичной трапецеидальной вещественной характеристики* (рис. 7.3).

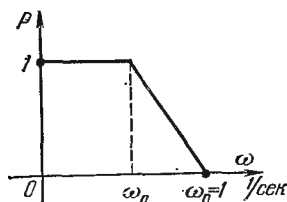


Рис. 7.3.

Единичная трапеция имеет высоту, равную единице и частоту среза ω_n , также равную единице, точнее, 1 сек^{-1} .

Единичная трапеция характеризуется частотой излома, которая может быть задана в виде коэффициента наклона трапеции

$$\kappa = \frac{\omega_a}{\omega_n}.$$

Для единичных трапеций с различными коэффициентами наклона по выражению (7.53) может быть вычислен оригинал, т. е. функция времени. Эта функция получила название *h-функции*. В настоящее время составлены подробные таблицы *h-функций* для различных коэффициентов наклона, лежащих в пределах $0 < \kappa < 1$ (см. приложение 1).

По такой таблице для каждого коэффициента наклона единичной трапеции может быть построена функция времени $h(\bar{t})$, где $\bar{t}$ — безразмерное время, соответствующее единичной трапецеидальной характеристике.

Метод построения кривой переходного процесса заключается в том, что построенную вещественную характеристику исследуемой системы (рис. 7.4) разбивают на ряд трапеций, заменяя приблизительно кривые линии прямолинейными отрезками так, чтобы при сложении ординат всех трапеций получилась исходная характеристика. Затем для каждой трапеции определяется коэффициент наклона. При известном коэффициенте наклона по таблицам могут быть построены *h-функции* для каждой трапеции.

Кривая переходного процесса может быть получена суммированием построенных *h-функций* с учетом правил масштабов. Правила масштабов заключаются в следующем.

1. Перед сложением ординаты каждой *h-функции* необходимо умножить на высоту соответствующей трапеции (см. рис. 7.4), так как *h-функция* построена для трапеции, имеющей единичную высоту. При этом необходимо учитывать знак высоты, считая высоту положительной для трапеций, расположенных выше абсцисс.

3. Перед сложением необходимо изменить масштаб времени каждой *h-функции*, так как *h-функции* построены для единичной трапеции, имеющей частоту среза $\omega_n = 1 \text{ сек}^{-1}$. Изменение масштаба времени делается в соответствии с теоремой подобия (табл. 7.2).

Действительное время равно времени $\bar{t}$, приведенному в таблице *h-функций*, деленному на частоту среза соответствующей трапецеидальной характеристики:

$$t = \frac{\bar{t}}{\omega_n}.$$

При нахождении реакции системы на единичную импульсную входную функцию, т. е. функции веса $w(t)$, можно пользоваться общей формулой

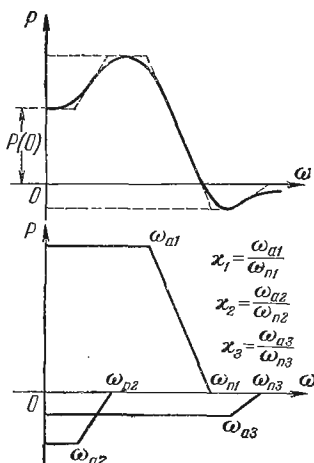


Рис. 7.4.

(7.52). При этом $P_{\Phi}(\omega)$ должно быть вещественной частью частотного изображения искомой функции $\Phi(j\omega) = j\omega X(j\omega) = j\omega \Phi(j\omega) \cdot 1 = P_{\Phi}(\omega) + jS_{\Phi}(\omega)$, где 1 представляет собой изображение единичной импульсной функции $\delta(t)$, а $P_{\Phi}(\omega) \neq P(\omega)$. Однако можно преобразовать формулу (7.53) так, что и при нахождении функции веса можно будет исходить из вещественной частотной характеристики замкнутой системы $P(\omega)$. Для этой цели продифференцируем выражение (7.53) по времени:

$$w(t) = \frac{dw(t)}{dt} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (7.54)$$

Если разбить исходную вещественную характеристику на трапецидальные характеристики (рис. 7.4), то аналогично построению переходной функции выражение (7.54) можно представить в виде

$$w(t) \approx \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} P_i(\omega) \cos \omega t d\omega,$$

где n — число трапеций, на которые разбита вещественная характеристика $P(\omega)$.

Можно показать, что это выражение приводится к виду

$$w(t) \approx \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \left(A_i \frac{\sin \omega_i t}{\omega_i t} \frac{\sin \Omega_i t}{\Omega_i t} \right), \quad (7.55)$$

где введены обозначения

$$\omega_i = \frac{1-\kappa_i}{2} \omega_{in}, \quad \Omega_i = \frac{1+\kappa_i}{2} \omega_{in}, \quad A_i = \Omega_i P_i(0),$$

Следовательно, в данном случае искомая функция времени $w(t)$ приближенно определяется простым подсчетом ее ординат по формуле (7.55) для разных t и последующим построением по точкам. Для облегчения подсчетов можно воспользоваться готовыми таблицами значений $\sin \alpha/\alpha$, которые имеются в справочниках.

В заключение заметим, что при построении кривой переходного процесса по трапецидальным частотным характеристикам наибольшие ошибки получаются в начальной части кривой, так как отбрасываемый «хвост» вещественной частотной характеристики замкнутой системы влияет главным образом именно на начальную часть кривой переходного процесса.

Кроме изложенного здесь частотного метода В. В. Солодовникова существует еще предложенный А. А. Вороновым [28] аналогичный способ построения кривых переходного процесса по треугольным частотным характеристикам.

§ 7.6. Использование вычислительных машин

За последнее время для исследования систем автоматического регулирования и управления и, в частности, для построения переходных процессов стали широко применяться вычислительные машины непрерывного и дискретного действия. Наибольшее применение находят вычислительные машины непрерывного действия, относящиеся к классу моделирующих установок электронного или электромеханического типа.

Удобство моделирующих вычислительных машин заключается в том, что физическому процессу, протекающему в исследуемой системе регулирования, соответствует протекание в вычислительной машине (модели) некоторого другого «аналогового» процесса, описываемого теми же дифференциальными уравнениями, что и исходный процесс. Это позволяет изучать процессы в системах регулирования наиболее наглядно, так как каждой

обобщенной координате в исследуемой системе соответствует некоторая переменная в вычислительной машине, например электрическое напряжение, ток (в электронной модели) или угол поворота (в электромеханической модели).

Моделирующие вычислительные машины позволяют моделировать как всю систему в целом, так и отдельные ее части. Так, например, часто вычислительная машина используется для моделирования объекта регулирования, например самолета, корабля, паровой турбины, двигателя внутреннего сгорания и т. п., а сам регулятор может быть реальным. При «сопряжении» реального регулятора с объектом, в качестве которого выступает модель, получается замкнутая система регулирования, которая может быть исследована еще до того, как будет построен сам объект.

Вычислительные машины целесообразно использовать для исследования обыкновенных линейных систем в тех случаях, когда последние описываются дифференциальными уравнениями сравнительно высокого порядка и их аналитическое исследование становится малоэффективным. Однако наибольшее значение имеют вычислительные машины при исследовании линейных систем с переменными параметрами и нелинейных систем, поскольку для этих случаев пока еще мало разработано приемлемых для практики методов, а иногда аналитические методы вообще отсутствуют.

Точность моделирующих вычислительных машин обычно не превосходит нескольких процентов. В большинстве случаев этого оказывается достаточно для целей практики. Получение точности в десятые доли процента и выше связано со значительным увеличением стоимости машин. В этом отношении целесообразнее использовать вычислительные машины дискретного типа, которые сравнительно просто могут обеспечить высокую точность вычислений.

В связи с этим для обычных задач разработки систем автоматического регулирования, как правило, используются более простые и удобные моделирующие вычислительные машины. Дискретные вычислительные машины привлекаются для целей исследования лишь в случаях, требующих повышенной точности вычислений.

Следует заметить, что моделирование не призвано полностью заменить аналитические или графические методы исследования систем регулирования. Комплекс технических задач, связанных с проектированием, конструированием, регулировкой и настройкой систем, весьма сложен, и он всегда должен опираться на сознательные расчетно-теоретические методы. Моделирование же процессов на вычислительных машинах во многом сводится к просматриванию некоторого количества возможных вариантов, разобраться в которых, а также наметить их предварительно можно при помощи существующих теоретических методов анализа и синтеза. Наилучшим решением в настоящее время является взаимная увязка расчетно-теоретических методов и методов моделирования, так как они взаимно дополняют друг друга и позволяют наиболее полно и быстро решить задачу разработки сложной системы регулирования.

Электронные модели. Электронные моделирующие вычислительные машины имеют наибольшее применение вследствие их сравнительной простоты в изготовлении и эксплуатации. Процессы в исследуемой системе изучаются при помощи наблюдения процессов в некоторой электронной схеме, которая описывается теми же дифференциальными уравнениями, что и исходная система.

Пусть исследуемая реальная система описывается совокупностью уравнений, разрешенных относительно первых производных

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7.56)$$

где $x_1, \dots, x_n$ — переменные, описывающие поведение исследуемой системы.

В электронной модели должна быть реализована совокупность дифференциальных уравнений аналогичного вида:

$$\frac{m_i}{m_i} \frac{dX_i}{d\tau} = F_i \left(\frac{X_1}{m_1}, \frac{X_2}{m_2}, \dots, \frac{X_n}{m_n}, \frac{\tau}{m_t} \right), \quad (7.57)$$

где $X_1, \dots, X_n$ — машинные переменные (обычно напряжения), соответствующие исследуемым переменным $x_1, \dots, x_n$; $m_i = \frac{X_i}{x_i}$ — масштабные коэффициенты, связывающие исследуемые переменные с соответствующими им машинными переменными, $m_t = \frac{\tau}{t}$ — масштаб времени, связывающий истинное время протекания процессов t с временем протекания процессов в модели τ .

Заметим, что изменение скорости протекания процессов возможно только при полном моделировании всей системы. При моделировании только части системы и сопряжении ее с реальной аппаратурой необходимо выполнение равенства $\tau = t$, т.е. $m_t = 1$.

При выборе масштаба времени должно учитываться то обстоятельство, что электронные модели могут точно работать при ограниченном времени протекания моделируемого процесса. Это время не должно обычно превышать нескольких сотен секунд, что связано с особенностями работы электронных интеграторов.

Масштабные коэффициенты m_i должны выбираться таким образом, чтобы в переходных процессах максимальное значение машинной переменной $|X_i|_{\max} = m_i |x_i|_{\max}$ не превосходило предельного допустимого значения, которое обычно равно 100 в.

Существует две разновидности электронных моделирующих машин: модели структурного типа и модели матричного типа. Первые позволяют моделировать структурную схему системы регулирования, что во многих случаях оказывается более удобным и наглядным. К ним относятся, например, электронные вычислительные машины ИПТ-5, МПТ-9, МПТ-11, МН-1, МН-2, МН-7, МНМ, ЭМУ-10 и др.

Модели матричного типа (ИПТ-4, ЭЛИ-14 и др.) требуют записи дифференциальных уравнений исследуемой системы в особой, матричной форме. Матричные модели менее удобны для исследования систем регулирования и потому используются реже.

Остановимся вначале на имеющих наибольшее применение моделях структурного типа. Они построены на базе так называемых операционных усилителей, выполняющих операции интегрирования, суммирования и умножения на постоянный множитель.

Операционный усилитель представляет собой усилитель постоянного тока с большим коэффициентом усиления по напряжению (десятки и сотни тысяч). Динамические свойства усилителя таковы, что он может быть замкнут 100%-ной отрицательной обратной связью через сопротивление или конденсатор без потери устойчивости (без генерации) в замкнутом состоянии.

Передаточная функция усилителя, замкнутого обратной связью (рис. 7.5) при большом коэффициенте усиления может быть достаточно точно представлена в виде

$$\frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = -\frac{z_0(p)}{z_1(p)}, \quad (7.58)$$

где $z_1(p)$ — входное сопротивление усилителя в операторной форме, $z_0(p)$ — сопротивление в цепи обратной связи.

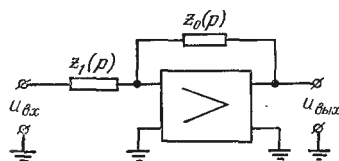


Рис. 7.5.

Знак минус в формуле (7.58) показывает, что операционный усилитель инвертирует входной сигнал (меняет его знак). Это связано с установкой в усилителе четного числа каскадов.

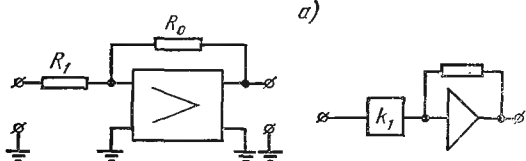
Рассмотрим три основных режима работы усилителя.

1. При $z_0(p) = R_0$ и $z_1(p) = R_1$ усилитель выполняет функцию умножения входной величины на постоянный множитель (рис. 7.6, а):

$$U_{\text{вых}}(p) = -\frac{R_0}{R_1} U_{\text{вх}}(p) = -k_1 U_{\text{вх}}(p). \quad (7.59)$$

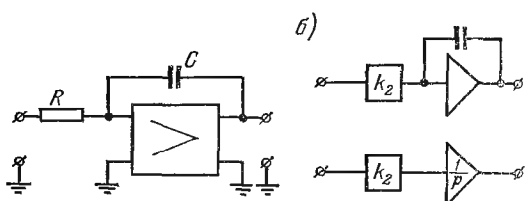
Упрощенное изображение такого усилителя показано на рис. 7.6, а справа.

2. При $z_0(p) = \frac{1}{pC}$, что соответствует установке в цепи обратной связи конденсатора, и $z_1(p) = R$ усилитель работает в режиме интегрирования входной величины (рис. 7.6, б):

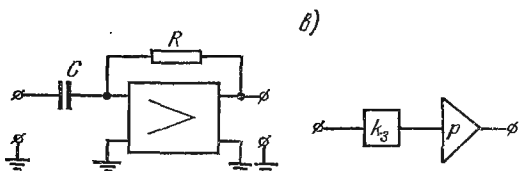


$$\begin{aligned} U_{\text{вых}}(p) &= -\frac{1}{RCp} U_{\text{вх}}(p) = \\ &= -\frac{k_2}{p} U_{\text{вх}}(p). \end{aligned} \quad (7.60)$$

Два варианта упрощенного изображения такого усилителя изображены на рис. 7.6, б справа.



3. При $z_0 = R$ и $z_1(p) = \frac{1}{pC}$, что соответствует установке конденсатора во входной цепи, усилитель работает в режиме дифференцирования (рис. 7.6, в):



$$\begin{aligned} U_{\text{вых}}(p) &= -RCp U_{\text{вх}}(p) = \\ &= -k_3 p U_{\text{вх}}(p). \end{aligned} \quad (7.61)$$

Упрощенное изображение такого усилителя показано на рис. 7.6, в справа.

Режим дифференцирования обычно не используют при моделировании, так как в этом режиме сильно возрастает влияние высокочастотных помех и паводков.

На рис. 7.7 изображен операционный усилитель в режиме суммирования. Как нетрудно показать, при $z_0(p) = R_0$

$$U_{\text{вых}}(p) = -R_0 \sum_{i=1}^n \frac{U_{\text{вх}i}(p)}{R_i}. \quad (7.62)$$

При $z_0(p) = \frac{1}{pC}$ получаем суммирующий интегрирующий усилитель.

В табл. 7.3 приведены типичные случаи использования операционного усилителя для получения различных динамических звеньев.

В таблице использован машинный оператор дифференцирования

$$P = \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{m_t} \frac{d}{dt} = \frac{p}{m_t}. \quad (7.63)$$

При моделировании в натуральном масштабе времени $\tau = t$ и $P = p$.

Электронная модель структурного типа имеет в своем составе несколько операционных усилителей, которые могут работать в режиме интегрирования, т. е. с конденсатором в цепи обратной связи. Число этих усилителей определяет наивысший порядок дифференциального уравнения, которое может быть исследовано на данной модели. Кроме того, имеется ряд вспомогательных усилителей, при помощи которых можно осуществлять операции умножения на постоянный множитель (масштабирование), перемены знака (инвертирование) и суммирование.

Исследуемые процессы в виде изменения машинных переменных (напряжений) могут наблюдаться и фиксироваться при помощи электронных и магнитоэлектрических осциллографов.

Для приложения к электронной модели исследуемой системы задающих и возмущающих воздействий используются генераторы, которые могут воспроизводить требуемые функции времени, например линейную функцию, синусоиду, экспоненту, прямоугольную или треугольную волну и т. п., в виде соответствующего изменения электрического напряжения. Существуют также генераторы случайных величин, например генераторы шумового напряжения.

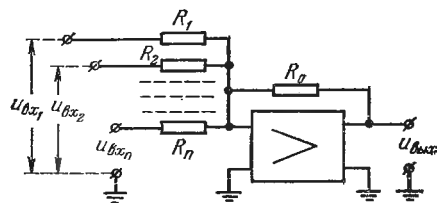


Рис. 7.7.

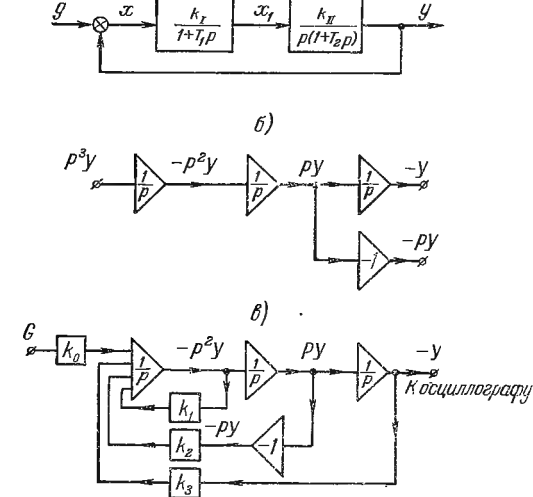


Рис. 7.8.

Кроме того, электронная модель имеет ряд вспомогательных устройств, позволяющих после набора исследуемой задачи производить пуск и остановку решения дифференциальных уравнений, фиксацию решения в заданной точке, периодизацию решения и т. п.

Набор задачи на электронной модели структурного типа может быть осуществлен двумя способами:

- 1) по дифференциальному уравнению, которым описывается исследуемая система,
- 2) по структурной схеме исследуемой системы.

Рассмотрим порядок набора задачи на простейшем примере. Начнем с первого способа. Пусть

дана система регулирования, структурная схема которой представлена на рис. 7.8, а. Для этой схемы передаточная разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{k_I}{1+T_1p} \frac{k_{II}}{p(1+T_2p)}. \quad (7.64)$$

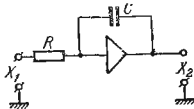
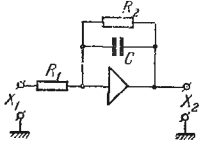
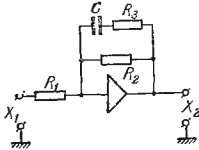
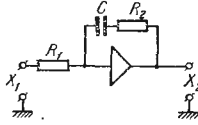
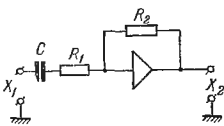
Дифференциальное уравнение замкнутой системы, записанное в символической форме, в соответствии с (5.15) будет

$$[1 + W(p)] y(t) = W(p) g(t),$$

где $y(t)$ — регулируемая величина, а $g(t)$ — задающее воздействие.

Таблица 7.3

Типовые динамические звенья электронных моделей

Схема	Передающая функция
	$W(P) = -\frac{1}{TP}, \quad T = RC$
	$W(P) = -\frac{k}{1+TP}$ $k = \frac{R_2}{R_1}, \quad T = R_2C$
	$W(P) = -k \frac{1+T_1P}{1+T_2P}$ $k = \frac{R_2}{R_1}, \quad T_1 = R_3C, \quad T_2 = (R_2 + R_3)C$
	$W(P) = -\frac{1+T_2P}{T_1P}$ $T_1 = R_1C, \quad T_2 = R_2C$
	$W(P) = -k \frac{T_1P}{1+T_1P}$ $k = \frac{R_2}{R_1}, \quad T_1 = R_1C$

В рассматриваемом случае, учитывая (7.64), получим

$$(a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3) y(t) = a_3g(t), \quad (7.65)$$

где

$$a_0 = T_1T_2, \quad a_1 = T_1 + T_2, \quad a_2 = 1 \text{ и } a_3 = k_1k_{\Pi}$$

Перейдем к машинным переменным $Y = m_1u$ и $G = m_2g$. Учитывая соотношения $\tau = m_1t$ и $p = m_1P$, получим из (7.65) дифференциальное уравнение для машинных переменных:

$$(A_0P^3 + A_1P^2 + A_2P + A_3) Y(\tau) = B_0G(\tau), \quad (7.66)$$

где $A_0 = m_1^3a_0$, $A_1 = m_1^2a_1$, $A_2 = m_1a_2$, $A_3 = a_3$ и $B_0 = a_3 \frac{m_1}{m_2}$.

Уравнение (7.66) разрешим относительно старшей производной:

$$P^3 Y = \frac{B_0}{A_0} G - \frac{A_1}{A_0} P^2 Y - \frac{A_2}{A_0} P Y - \frac{A_3}{A_0} Y. \quad (7.67)$$

Рассмотрим цепочку из трех последовательно включенных интеграторов (рис. 7.8, б). Если на вход первого интегратора поступает величина $P^3 Y$, то на его выходе получится, с учетом перемены знака, величина $-P^2 Y$, на выходе второго интегратора — величина $P Y$ и на выходе третьего интегратора — величина $-Y$. В результате можно реализовать дифференциальное уравнение (7.67), если на входе первого интегратора сложить с учетом знаков и масштабов все члены, входящие в правую часть формулы (7.67). Это показано на рис. 7.8, в. Значения коэффициентов делителей определяются выражениями $k_0 = \frac{B_0}{A_0}$, $k_1 = \frac{A_1}{A_0}$, $k_2 = \frac{A_2}{A_0}$ и $k_3 = \frac{A_3}{A_0}$.

Задавая теперь управляющее воздействие $G(\tau)$ от генератора функций времени и вводя начальные условия,

можно исследовать поведение машинной переменной $Y(\tau)$, которая отображает поведение регулируемой величины $y(t)$ в реальной системе.

Второй способ набора задачи на электронной модели заключается в том, что воспроизводится структурная схема, изображенная на рис. 7.8, а. Звено второго порядка удобнее представить в виде последовательно включенных звеньев первого порядка, каждое из которых может быть реализовано на базе одного интегратора. Это представлено на рис. 7.9, а. Схема набора, построенная в соответствии с табл. 7.3, изображена на рис. 7.9, б.

Для уяснения методики подсчета коэффициентов рассмотрим, например, второе звено (рис. 7.9). Исходная передаточная функция имеет вид

$$\frac{x_2(p)}{x_1(p)} = \frac{k_{II}}{1 + T_2 p}. \quad (7.68)$$

Для машинных переменных $X_1 = m_1 x_1$ и $X_2 = m_2 x_2$ уравнение (7.66) запишется в виде

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{m_2}{m_1} \frac{k_{II}}{1 + T_2 m_1 p}. \quad (7.69)$$

Отсюда находим

$$P X_2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{k_{II}}{m_1 T_2} X_1 - \frac{1}{m_1 T_2} X_2. \quad (7.70)$$

Это уравнение и набрано на втором интеграторе (рис. 7.9, б).

Передаточные коэффициенты усилителя по соответствующим входам определяются из (7.70):

$$k_4 = \frac{m_2}{m_1} \frac{k_{II}}{m_1 T_2}, \quad (7.71)$$

$$k_5 = \frac{1}{m_1 T_2}. \quad (7.72)$$

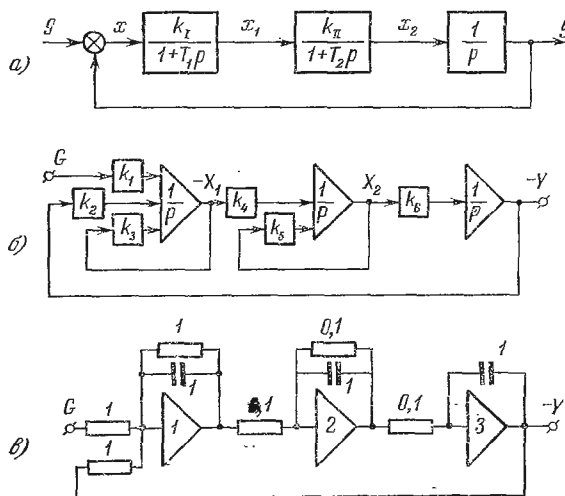
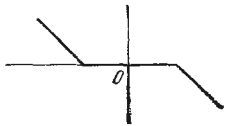
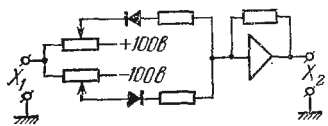
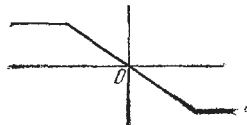
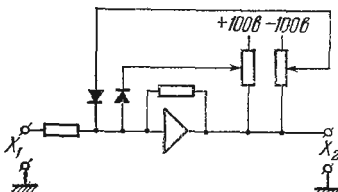
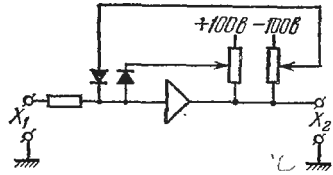
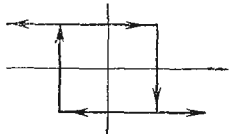
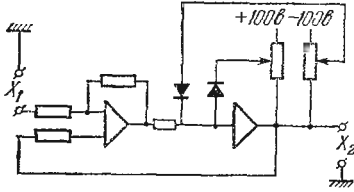
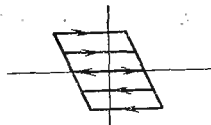
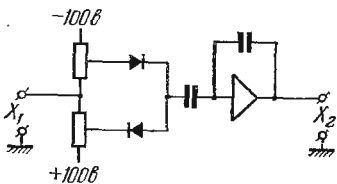


Рис. 7.9.

Таблица 7.4

Моделирование типичных нелинейных характеристик

Характеристика	Схема
Зона нечувствительности 	
Ограничение 	
Сухое трение (реле) 	
Релейная 	
Люфт 	

Аналогичным образом составляется схема набора остальных звеньев, входящих в структурную схему (рис. 7.9, а).

Получившаяся схема набора (рис. 7.9, б) представляет собой совокупность операционных усилителей в режиме интегрирования, замкнутых местными отрицательными обратными связями.

Другой метод структурного моделирования заключается в том, что элементы структурной схемы представляются в виде типовых звеньев, набираемых на операционных усилителях в соответствии с табл. 7.3. На рис. 7.9, в изображена подобная схема набора для случая, когда $k_I = 1$, $k_{II} = 10 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 1 \text{ сек}$ и $T_2 = 0,1 \text{ сек}$. При наборе принят натуральный масштаб времени ($m_t = 1$ и $t = \tau$).

По сравнению с моделированием дифференциального уравнения (рис. 7.8) моделирование структурной схемы имеет преимущество в смысле большего

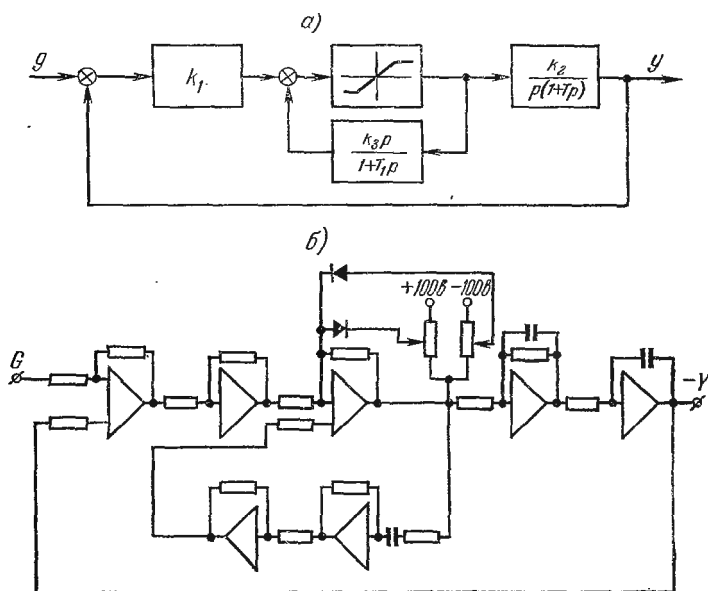


Рис. 7.10.

соответствия модели исследуемой системе. Кроме того, моделирование структурной схемы позволяет просто учитывать при исследовании системы регулирования типичные нелинейности, например ограничение переменной величины, зону нечувствительности, релейную характеристику, люфт и т. п. Эти характеристики могут быть реализованы в электронной модели посредством использования диодных элементов. В табл. 7.4 приведены некоторые типичные нелинейности и электронные схемы с диодными элементами, позволяющие реализовать в модели эти характеристики. Кроме этих простейших нелинейных блоков в электронных моделях применяются более сложные схемы, позволяющие реализовать различные криволинейные характеристики, операции возведения в степень и извлечения корня, операции перемножения двух переменных и т. п.

На рис. 7.10 для иллюстрации приведена структурная схема нелинейной следящей системы (рис. 7.10, а) и схема набора на электронной модели типа МН-7 (рис. 7.10, б). Схема набора на рис. 7.10, б изображена несколько подробнее по сравнению со схемами на рис. 7.8 и 7.9.

Обратимся теперь к электронным моделям матричного типа. На рис. 7.11 изображена упрощенная структурная схема такой модели, позволяющей исследовать дифференциальные уравнения не выше третьего порядка (третий порядок принят только для облегчения изложения).

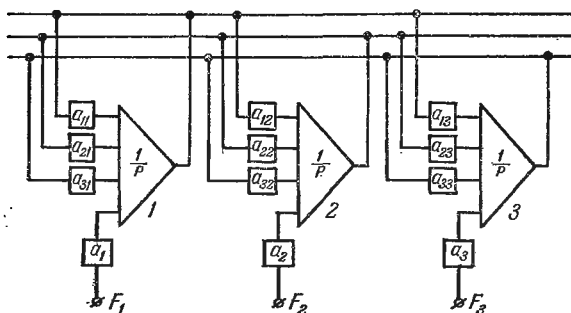


Рис. 7.11.

воздействия на систему $F_1(\tau)$, $F_2(\tau)$ и $F_3(\tau)$. В соответствии со свойствами операционных усилителей, работающих в режиме интегрирования, изображенная на рис. 7.10 структура описывается системой уравнений, записанных для машинных переменных,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_1}{d\tau} + a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + a_{31}X_3 + a_1F_1(\tau) &= 0, \\ \frac{dX_2}{d\tau} + a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + a_{32}X_3 + a_2F_2(\tau) &= 0, \\ \frac{dX_3}{d\tau} + a_{13}X_1 + a_{23}X_2 + a_{33}X_3 + a_3F_3(\tau) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.73)$$

К такому виду и должны приводиться уравнения, описывающие реальный объект. После получения системы уравнений (7.73) остается установить на делителях соответствующие значения коэффициентов, и задача оказывается набранной на модели.

Если исследуемая система определяется одним уравнением третьего порядка, записанным для машинных переменных,

$$\frac{d^3X_1}{d\tau^3} + A_1 \frac{d^2X_1}{d\tau^2} + A_2 \frac{dX_1}{d\tau} + A_3X_1 = F(\tau), \quad (7.74)$$

то переход к системе (7.73) делается введением вспомогательных функций

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= \frac{dX_1}{d\tau}, \\ X_3 &= \frac{dX_2}{d\tau} = \frac{d^2X_1}{d\tau^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.75)$$

Тогда вместо (7.74) получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_1}{d\tau} - X_2 &= 0, \\ \frac{dX_2}{d\tau} - X_3 &= 0, \\ \frac{dX_3}{d\tau} + A_1X_3 + A_2X_2 + A_3X_1 - F(\tau) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.76)$$

Эта система уравнений является частным случаем системы (7.73) и может быть набрана на рассматриваемой электронной модели (рис. 7.11).

Электронная модель матричного типа ЭЛИ-14 работает примерно по описанному выше принципу, но содержит не три, а шесть интеграторов, что позволяет набрать на ней систему из шести дифференциальных уравнений первого порядка типа (7.73) или одно дифференциальное уравнение шестого порядка.

Все, что было рассмотрено выше, относится к моделированию линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. При необходимости исследовать процессы в системах с переменными коэффициентами или в системах с временным запаздыванием к линейной электронной модели добавляются соответственно блоки переменных коэффициентов и блоки временного запаздывания. Добавление нелинейных блоков позволяет исследовать процессы в нелинейных системах. Все эти добавочные блоки существенно повышают эффективность электронных моделей, так как позволяют сравнительно просто и достаточно точно исследовать процессы в сложных нелинейных и особых линейных системах, что является в большинстве случаев недоступным для аналитических методов расчета.

Электромеханические модели. Существующие электронные вычислительные машины имеют следующие недостатки, которые в некоторых случаях затрудняют их использование.

1. Сложность сопряжения с реальной аппаратурой вследствие того, что выходной величиной электрической модели всегда является напряжение постоянного тока, а входные величины в реальной аппаратуре могут быть самыми различными (напряжения переменного тока, угол поворота, перемещение, угловая или линейная скорость и т. д.). Это требует использования в электронных моделях специальных преобразователей выходного напряжения, которые ухудшают точность и динамические характеристики электронных моделей.

2. Трудность воспроизведения в электронных моделях сложных нелинейных зависимостей, таких, например, как тригонометрические функции, функции двух переменных, произведение нескольких величин и т. п.

3. Ограниченность допустимого времени работы электронных интеграторов. Это время не превосходит нескольких сотен секунд, что ограничивает возможности работы модели в сопряжении с реальной аппаратурой, где не может использоваться изменение масштаба времени.

Чтобы избавиться от этих недостатков, для некоторых задач используются электромеханические модели. В настоящее время существует два способа построения таких моделей.

Первый способ заключается в том, что в модели используется интегратор (рис. 7.12), состоящий из операционного интегрирующего усилителя и вспомогательной следящей системы, преобразующей напряжение постоянного тока $U_{\text{вых}}$ на выходе электронного интегратора в угол поворота α следящей системы. На базе такого интегратора и может быть построена электромеханическая модель исследуемой системы. В этой модели могут быть использованы электронные операционные усилители в режиме масштабирования, инвертирования и суммирования, а также электронные модели типичных нелинейностей, построенные на диодных элементах.

Однако то обстоятельство, что выходные величины интеграторов представляют собой углы поворотов некоторых механических валов, позволяет

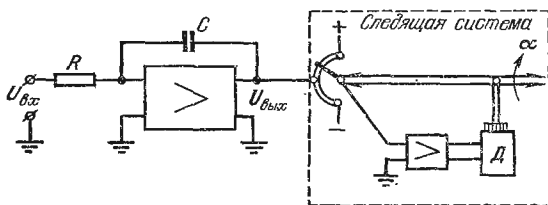


Рис. 7.12.

значительно легче решать вопросы сопряжения с реальной аппаратурой, поскольку на этих валиках легко могут быть установлены требуемые датчики (датчики угла или перемещения, датчики угловой скорости и т. п.). Кроме того, это же обстоятельство позволяет сравнительно просто учитывать в исследуемой системе сложные нелинейные зависимости, что делается установкой на выходных валиках интеграторов таких элементов, как синусно-косинусные потенциометры, функциональные потенциометры, эксцентрики для воспроизведения функции одной переменной, коноиды для воспроизведения функций двух переменных, множительные и делительные устройства и т. п.

Набор задачи на электромеханической модели делается примерно так же, как и на электронной, с учетом специфики тех новых элементов, которые используются для установки на выходных валиках интеграторов.

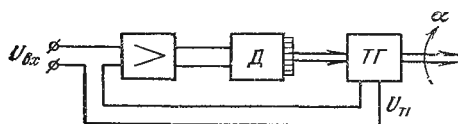


Рис. 7.13.

На подобном принципе работает, например, электромеханическая модель типа «Электрон». Электромеханические модели подобного типа особенно удобны для моделирования пространственного движения самолетов, ракет, космических кораблей,

подводных лодок [и т. д. Однако в этих моделях по-прежнему существует ограничение времени их непрерывной работы, что связано с наличием электронного интегратора.

Некоторым их недостатком, который свойствен вообще всем электромеханическим моделям, является то, что следящая система преобразования выходного напряжения электронного интегратора в угол поворота выходного валика вносит нежелательный динамический эффект, связанный с введением в модель передаточной функции самой следящей системы. Эта передаточная функция может быть обычно сведена к передаточной функции аperiodического звена первого порядка или передаточной функции колебательного звена.

Второй способ построения электромеханических моделей заключается в том, что электронный интегратор исключается, а интегрирование ведется на интегрирующем приводе [10], схема которого изображена на рис. 7.13. В качестве входной величины здесь может быть напряжение постоянного или переменного тока. Это напряжение сравнивается с напряжением тахогенератора $\mathcal{TГ}$ постоянного или, соответственно, переменного тока, который установлен на оси исполнительного двигателя $\mathcal{Д}$. Если коэффициент усиления усилителя достаточно велик, то напряжение тахогенератора с большой точностью будет равно входному напряжению $U_{\text{тг}} = U_{\text{вх}}$. Так как напряжение тахогенератора с большой степенью точности пропорционально скорости его вращения, то, следовательно, можно записать зависимость

$$\frac{d\alpha}{dt} = kU_{\text{тг}} = kU_{\text{вх}}. \quad (7.77)$$

Угол поворота выходного валика оказывается пропорциональным интегралу от входного напряжения:

$$\alpha = k \int_0^t U_{\text{вх}} dt. \quad (7.78)$$

Если электромеханическая модель строится на базе интегрирующего привода постоянного тока, то в ней могут быть использованы те же элементы, что и в описанной выше модели, построенной на базе электронного интегратора с преобразующей следящей системой.

Если электромеханическая модель строится на базе интегрирующего привода переменного тока, то в ней должны использоваться специальные элементы переменного тока (масштабные трансформаторы, линейные и синусно-косинусные вращающиеся трансформаторы, потенциометры переменного тока, суммирующие и масштабные усилители переменного тока, асинхронные тахогенераторы и т. п.).

Электромеханические модели с интегрирующими приводами могут работать непрерывно длительное время, которое может измеряться часами и днями. Это облегчает моделирование процессов в натуральном масштабе времени. Однако некоторая сложность подобных моделей приводит к тому, что они строятся, как правило, специализированного типа и предназначаются для исследования объектов определенного класса.

Цифровые вычислительные машины. В вычислительных машинах непрерывного действия (электронных и электромеханических) достижимая точность ограничивается точностью изготовления входящих в машину элементов. Повышение точности всегда связано со значительным удорожанием изготовления, а в некоторых случаях желаемая точность вообще не может быть достигнута при современном уровне техники. В цифровых вычислительных машинах принципиально может быть достигнута любая желаемая точность вычислений. Это связано лишь с увеличением числа используемых разрядов в изображении чисел, что вызывает умеренный рост стоимости вычислительных машин при росте их точности.

Цифровые вычислительные машины по своему принципу действия относятся к устройствам дискретного действия. Результаты вычислений выдаются этими машинами не непрерывно, а в виде последовательности дискретных чисел. Цифровые вычислительные машины могут применяться для различных целей. В том числе их можно использовать для решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами, что нужно для исследования процессов в сложных системах управления и регулирования.

Любые вычисления, которые производит цифровая вычислительная машина, сводятся к последовательности арифметических и логических операций. Это означает, что решение дифференциальных уравнений исследуемой системы осуществляется методами численного интегрирования по шагам и точность получаемого решения будет зависеть от величины выбранного шага интегрирования.

Цифровая вычислительная машина имеет в своем составе три основные части (рис. 7.14). Арифметическое устройство предназначается для выполнения операций над числами. Запоминающее устройство осуществляет прием, хранение и выдачу чисел. Управляющее устройство автоматизирует процесс управления машиной в процессе выполнения вычислений.

Число операций, которые может делать машина, ограничено (сложение, вычитание, умножение, деление, перенос числа из одного места памяти в другое и т. п.). Поэтому решение на машине любой задачи должно быть предварительно представлено в виде последовательности таких простейших

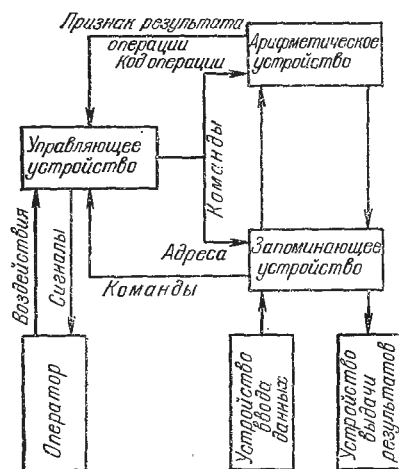


Рис. 7.14.

операций. Отдельные операции выполняются машиной под воздействием управляющих сигналов, которые носят название команд.

Последовательность всех команд, которые заложены в запоминающее устройство машины, образует программу ее работы. Команды вводятся в запоминающее устройство в виде некоторых закодированных чисел.

Программа работы машины составляется с учетом особенностей самой машины (принцип действия, число разрядов, объем памяти и т. п.) и существа используемого численного метода интегрирования дифференциальных уравнений. К численным методам, которые могут быть использованы в цифровых вычислительных машинах, предъявляются некоторые специфические требования. Желательны такие численные методы, которым свойственно циклическое решение задачи, характеризующее многократным повторением расчетов по одним и тем же формулам. Это упрощает составление и реализацию программы.

Используемый численный метод должен сводить решение к последовательности простейших арифметических действий. Кроме того, желательно использовать такой метод, который дает возможность периодического контроля выполненных вычислений.

Как уже отмечалось выше, цифровые вычислительные машины могут дать значительно более высокую точность, чем машины непрерывного действия. Это является их преимуществом. В настоящее время разработано большое количество разнообразных алгоритмических языков: АЛГОЛ, ФОРТРАН, КОБОЛ и др., которые значительно облегчают вопросы программирования. Современные оконечные устройства цифровых вычислительных машин позволяют получать решения как в виде таблиц, так и в виде готовых графиков.

К числу недостатков цифровых вычислительных машин следует отнести трудности сопряжения с реальной аппаратурой и в некоторых случаях замедленность в выдаче решения.

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 8.1. Общие соображения

Качество работы любой системы регулирования в конечном счете определяется величиной ошибки, равной разности между требуемым и действительным значениями регулируемой величины: $x(t) = g(t) - y(t)$. В системах стабилизации при $g(t) = 0$ ошибка $x(t) = -y(t)$.

Знание мгновенного значения ошибки в течение всего времени работы регулируемого объекта позволяет наиболее полно судить о свойствах системы регулирования. Однако в действительности, вследствие случайности задающего и возмущающего воздействий, такой подход не может быть реализован. Поэтому приходится оценивать качество системы регулирования по некоторым ее свойствам, проявляющимся при различных типовых воздействиях. Для определения качественных показателей системы регулирования в этом случае используются так называемые *критерии качества*.

В настоящее время разработано большое число различных критериев качества систем регулирования. Все их можно разбить на четыре группы.

К первой группе относятся критерии, в той или иной степени использующие для оценки качества величину ошибки в различных типовых режимах. Эту группу назовем *критериями точности* систем регулирования.

Ко второй группе относятся критерии, определяющие величину *запаса устойчивости*, т. е. критерии, устанавливающие, насколько далеко от границы устойчивости находится система регулирования.

Почти всегда опасной для системы является колебательная граница устойчивости. Это определяется тем, что стремление повысить общий коэффициент усиления в системе, как правило, приводит к приближению системы именно к колебательной границе устойчивости и затем — к возникновению незатухающих автоколебаний.

Третья группа критериев качества определяет так называемое *быстродействие* систем регулирования. Под быстродействием понимается быстрота реагирования системы регулирования на появление задающих и возмущающих воздействий. Наиболее просто быстродействие может оцениваться по времени затухания переходного процесса системы.

К четвертой группе критериев качества относятся комплексные критерии, дающие оценку некоторых обобщенных свойств, которые могут учитывать точность, запас устойчивости и быстродействие. Обычно это делается при помощи рассмотрения некоторых интегральных свойств кривой переходного процесса.

При рассмотрении понятий запаса устойчивости и быстродействия можно исходить из двух существующих в настоящее время точек зрения.

Во-первых, можно основываться на характере протекания процессов во времени и использовать для формирования критериев качества переходную или весовую функцию, расположение полюсов и нулей передаточной функции замкнутой системы и т. п.

Во-вторых, можно основываться на некоторых частотных свойствах рассматриваемой системы, характеризующих ее поведение в установившемся режиме при действии на входе гармонического сигнала. К ним относятся полоса пропускания, относительная высота резонансного пика и др.

Оба эти подхода имеют в настоящее время большое распространение и используются параллельно. И тот и другой подход требует изучения условий эксплуатации построенных систем автоматического регулирования, так как только на основании такого изучения можно правильно сформулировать количественные оценки, которые могут быть использованы в практике проектирования и расчета новых систем.

Связь между временными и частотными свойствами системы автоматического регулирования имеет сложный характер и может быть определена в общем виде только в простейших случаях, например для систем, описываемых дифференциальным уравнением второго порядка.

Однако отсутствие зависимостей, связывающих в общей форме свойства системы во временном и частотном представлениях, не может служить препятствием для развития и независимого использования критериев качества того или иного направления.

Использование того или иного подхода при формулировании критериев качества определяется в настоящее время удобствами его применения в системах конкретного вида, а также, в известной мере, сложившимися в данной области традициями.

§ 8.2. Точность в типовых режимах

Для оценки точности системы регулирования используется величина ошибки в различных типовых режимах. Ниже будут рассмотрены наиболее употребительные режимы.

1. **Неподвижное состояние.** В качестве типового режима рассматривается установившееся состояние при постоянных значениях задающего и возмущающего воздействий. Ошибка системы в этом случае называется *статической*. Величина ошибки может быть найдена из общего выражения (5.2). Для этого необходимо положить $g(t) = g_0 = \text{const}$. Далее необходимо учесть действующие на систему возмущения. В общем случае их может быть несколько: $f_1(t)$, $f_2(t)$ и т. д. Тогда в правой части (5.2) появится несколько слагаемых, определяемых имеющимися возмущениями. В неподвижном состоянии необходимо положить $f_1(t) = f_{10} = \text{const}$, $f_2(t) = f_{20} = \text{const}$ и т. д. Затем можно использовать изображения функций по Лапласу или Карсону — Хевисайду. Используем, например, изображения Карсона — Хевисайда. Тогда изображение постоянной величины равно ей самой, т. е. $G(p) = g_0$, $F_1(p) = f_{10}$, $F_2(p) = f_{20}$ и т. д. Далее необходимо воспользоваться теоремой предельного перехода и получить установившееся значение ошибки (статическую ошибку):

$$x_{\text{ст}} = \left[\frac{g_0}{1+W(p)} \right]_{p \rightarrow 0} + \left[\frac{\sum_{k=1}^l W_k(p) f_{k0}}{1+W(p)} \right]_{p \rightarrow 0} = x'_{\text{ст}} + x''_{\text{ст}}, \quad (8.1)$$

где l — число действующих на систему возмущений, а $W_k(p) = -W_f(p)$.

Это же выражение может быть получено из операторного уравнения (5.16), если оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$ положить равным нулю.

Первое слагаемое (8.1) представляет собой составляющую статической ошибки, определяемую задающим воздействием. Эта составляющая, в соответствии с изложенным в § 5.3, может быть отличной от нуля только в следящих системах при статическом регулировании.

В статических системах $W(0) = K^*$ представляет собой общий коэффициент усиления по разомкнутой цепи. В этом случае первое слагаемое (8.1) может быть представлено в виде

$$x_{\text{ст}}'' = \frac{g_0}{1 + W(0)} = \frac{g_0}{1 + K^*} \quad (8.2)$$

Однако эта составляющая ошибки практически всегда может быть сведена к нулю посредством использования неединичной обратной связи или путем масштабирования задающего воздействия или регулируемой величины (см. § 9.3).

При астатическом регулировании $W(0) \rightarrow \infty$. Поэтому первая составляющая (8.1) обращается в нуль.

В системах стабилизации $g(t) = 0$, что также обращает в нуль $x_{\text{ст}}'$. В связи с этим практически во всех случаях первая составляющая статической ошибки может быть принята равной нулю.

Второе слагаемое (8.1) никогда не обращается в нуль, так как даже использование регулирования с астатизмом высокого порядка и использование принципа регулирования по возмущению (см. § 9.2) могут обратить в нуль лишь часть слагаемых, находящихся под знаком суммы (8.1).

При выводе выражения (8.1) предполагалось, что чувствительный элемент, определяющий разность между требуемым и действительным значениями регулируемой величины, является идеальным и определяет имеющуюся ошибку в соответствии с выражением $x(t) = g(t) - y(t)$. В действительности чувствительному элементу как измерительному органу присущи свои ошибки. Ошибку чувствительного элемента можно рассматривать также как некоторое возмущающее воздействие и считать, что она входит во второе слагаемое (8.1). Однако на практике удобнее эту ошибку учитывать отдельно и считать, что статическая ошибка равна (при $x_{\text{ст}}' = 0$)

$$x_{\text{ст}} = x_{\text{ст}}'' + x_{\text{ст}}''', \quad (8.3)$$

где $x_{\text{ст}}''$ представляет собой второе слагаемое в выражении (8.1) и определяется внешними возмущениями, $x_{\text{ст}}'''$ является ошибкой чувствительного элемента.

Рассмотрим теперь ошибку регулирования $x_{\text{ст}}'$. Примем для простоты, что на систему действует одно возмущающее воздействие f_1 . Тогда в статической системе получим

$$x_{\text{ст}}' = \frac{W_1(0) f_{10}}{1 + W(0)} = \frac{\gamma_1 f_{10}}{1 + K}. \quad (8.4)$$

В этом равенстве γ_1 представляет собой отношение установившейся ошибки к постоянному возмущению (коэффициент статизма) в системе с разомкнутой цепью регулирования. Эта же величина, деленная на $1 + K$, соответствует коэффициенту статизма в замкнутой системе регулирования. Величина $1 + K$, по сути дела, показывает эффективность регулирования с точки зрения уменьшения установившейся ошибки.

В астатической системе $W(0) \rightarrow \infty$. Однако это еще не означает, что $x_{\text{ст}}' = 0$, так как возможен случай, когда $W_1(0) \rightarrow \infty$. Вследствие этого для каждого действующего на систему возмущения необходимо определить факт наличия или отсутствия установившейся ошибки посредством нахождения значения (8.4).

Для иллюстрации этого на рис. 8.1 изображена структурная схема системы автоматического регулирования. Она содержит объект с передаточной функцией $W_o(p)$ и астатический регулятор с передаточной функцией $W_p(p) = \frac{k_p}{p}$. Пусть объект не имеет интегрирующих свойств и $W_o(0) = k_o$.

На систему действуют два возмущения $-f_1$ и f_2 . В разомкнутой системе (как показано на рис. 8.1)

$$x = W_o(p) \left[\frac{k_p}{p} f_1 + f_2 \right]$$

и в замкнутой

$$x = \frac{W_o(p) \left[\frac{k_p}{p} f_1 + f_2 \right]}{1 + W(p)},$$

где $W(p) = W_o(p) W_p(p)$ — передаточная функция разомкнутой системы. Отсюда по теореме предельного перехода определяем установившуюся ошибку, положив $p = 0$, $f_1 = f_{10} = \text{const}$, $f_2 = f_{20} = \text{const}$,

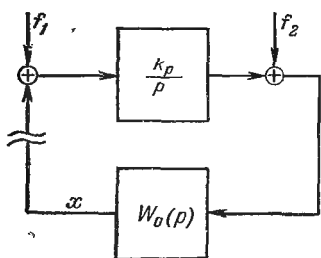


Рис. 8.1.

$$x''_{уст} = \frac{W_o(p) \left[\frac{k_p}{p} f_{10} + f_{20} \right]}{1 + W(p)} \Big|_{p=0} = f_{10}.$$

Таким образом, первое возмущение дает статическую ошибку, а второе не дает. Из рассмотрения рис. 8.1 видно, что возмущение f_1 приложено до интегрирующего звена, а f_2 — после. Из этого и вытекает правило, по которому можно определить, устраняет ли аста-

тический закон регулирования статическую ошибку от какого-либо возмущения. Для выполнения этого необходимо, чтобы интегрирующий элемент был включен в цепь регулирования до места приложения данного возмущения. Это объясняет, в частности, тот факт, что включение интегрирующих элементов и повышение степени астатизма не дает возможности устранить ошибку чувствительного элемента $x'''_{ст}$, которую можно рассматривать как возмущение.

2. Движение с постоянной скоростью. В качестве второго типового режима используется режим движения системы с постоянной скоростью $v = \text{const}$, который будет наблюдаться в установившемся состоянии при задающем воздействии, изменяющемся по закону $g(t) = vt$, где $v = \text{const}$, и при постоянных значениях возмущающих воздействий $f_1(t) = f_{10}$, $f_2(t) = f_{20}$ и т. д. Этот режим имеет смысл только в следящих системах и системах программного регулирования.

Используя изображения Карсона — Хевисайда, в этом случае получаем $G(p) = \frac{v}{p}$, $F_1(p) = f_{10}$, $F_2(p) = f_{20}$ и т. д.

Из общего выражения для ошибки (5.16) посредством теоремы о предельном переходе может быть найдена установившаяся ошибка в этом режиме:

$$x_{уст} = \left[\frac{\frac{v}{p}}{1 + W(p)} \right]_{p \rightarrow 0} + \left[\frac{\Sigma W_k(p) f_{k0}}{1 + W(p)} \right]_{p \rightarrow 0}. \quad (8.5)$$

Второе слагаемое этого выражения дает статическую ошибку (при условии, что возмущающие воздействия такие же, как в неподвижном положении системы), в которой может быть также учтена ошибка чувствительного элемента.

Первое слагаемое (8.5) имеет смысл только при астатизме первого порядка, т. е. в том случае, когда передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена в виде (5.42)

$$W(p) = \frac{K_p(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{p(1 + C_{n-2}p + \dots + C_0p^{n-1})}.$$

Тогда выражение (8.5) приводится к виду

$$x_{уст} = \frac{v}{K_v} + x_{ст} = x_c + x_{ст}. \quad (8.6)$$

Таким образом, в этом типовом режиме установившаяся ошибка будет складываться из статической ошибки и добавочной *скоростной* ошибки, равной отношению скорости задания к добротности системы по скорости:

$$x_c = \frac{v}{K_v}. \quad (8.7)$$

Так как система может двигаться с различными скоростями, то качество ее удобнее характеризовать не самой скоростной ошибкой, которая является переменной величиной, а значением добротности по скорости

$$K_v = \frac{v}{x_c}. \quad (8.8)$$

В статических системах первое слагаемое (8.6) стремится к бесконечности; при астатизме выше первого порядка это слагаемое стремится к нулю. Поэтому режим движения с постоянной скоростью используется для оценки точности только систем с астатизмом первого порядка, главным образом следящих систем, для которых такой режим является характерным.

3. Движение с постоянным ускорением. В качестве третьего типового режима используется режим установившегося движения системы регулирования с постоянным ускорением $\varepsilon = \text{const}$. В этом случае задающее воздействие меняется по закону $g(t) = \frac{\varepsilon t^2}{2}$. Возмущающие воздействия принимаются постоянными, как и во втором типовом режиме. Этот режим имеет смысл только в следящих системах и системах программного регулирования.

Аналогично изложенному выше, установившееся значение ошибки в этом режиме может быть найдено из выражения

$$x_{уст} = \left[\frac{\frac{\varepsilon}{p^2}}{1+W(p)} \right]_{p \rightarrow 0} + \left[\frac{\sum W_k(p) f_{k0}}{1+W(p)} \right]_{p \rightarrow 0}. \quad (8.9)$$

Второе слагаемое (8.9), как и ранее, дает статическую ошибку. Первое слагаемое (8.9) имеет смысл только при астатизме второго порядка, когда передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{K_e(1+B_{m-1}p+\dots+B_0p^m)}{p^2(1+C_{n-3}p+\dots+C_0p^{n-2})}.$$

Тогда выражение (8.9) приводится к виду

$$x_{уст} = \frac{\varepsilon}{K_e} + x_{ст} = x_y + x_{ст}. \quad (8.10)$$

Первое слагаемое (8.10) представляет собой добавочную ошибку от постоянного ускорения. Как и в предыдущем случае, качество системы может быть оценено величиной добротности по ускорению

$$K_e = \frac{\varepsilon}{x_y}. \quad (8.11)$$

Этот типовой режим используется только для систем регулирования с астатизмом второго порядка, главным образом следящих систем.

4. Движение по гармоническому (синусоидальному) закону. Такой режим используется весьма часто, так как он позволяет наиболее полно оценить динамические свойства системы регулирования. Задающее воздействие принимается изменяющимся по закону

$$g(t) = g_{\max} \sin \omega_k t. \quad (8.12)$$

В зависимости от конкретного вида системы регулирования возмущающие воздействия в рассматриваемом режиме могут оставаться постоянными или меняться.

Случай постоянства возмущающих воздействий приводит, как и в рассмотренных выше втором и третьем типовых режимах, к появлению некоторой постоянной ошибки $x_{ст}$.

Более вероятным является случай, когда возмущающие воздействия при движении системы в этом режиме меняются во времени. Это объясняется тем, что при движении по гармоническому закону непрерывно будет меняться направление движения системы, а следовательно, одновременно будет меняться направление действующих в системе сил сухого трения. Этот случай является довольно сложным, и он может рассматриваться только в приложении к конкретным системам регулирования. Рассмотрим ошибку, определяемую только первым слагаемым выражения (5.16):

$$x = \frac{g}{1 + W(p)}. \quad (8.13)$$

В линеаризованной системе при гармоническом задающем воздействии (8.12) ошибка в установившемся режиме будет также меняться по гармоническому закону с частотой ω_k :

$$x = x_{\max} \sin(\omega_k t + \psi). \quad (8.14)$$

Точность системы в этом режиме может быть оценена по амплитуде ошибки, которая может быть найдена из (8.13) на основании символического метода подстановкой $p = j\omega_k$:

$$x_{\max} = \frac{g_{\max}}{|1 + W(j\omega_k)|}. \quad (8.15)$$

Так как предполагается, что амплитуда ошибки значительно меньше амплитуды входного воздействия: $x_{\max} \ll g_{\max}$, то, следовательно, модуль знаменателя (8.15) значительно больше единицы. Это позволяет с большой точностью выражение (8.15) заменить приближенным

$$x_{\max} \approx \frac{g_{\max}}{|W(j\omega_k)|} = \frac{g_{\max}}{A(\omega_k)}, \quad (8.16)$$

где $A(\omega_k)$ — модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы при $\omega = \omega_k$.

Последняя формула позволяет легко вычислять амплитуду ошибки в устано-

вившемся режиме. Для этого необходимо располагать либо аналитическим выражением для передаточной функции разомкнутой системы, либо иметь экспериментально снятую амплитудную или амплитудно-фазовую частотную характеристику разомкнутой системы.

Формула (8.16) широко используется также при расчете системы методом логарифмических амплитудных частотных характеристик (л. а. х.). В этом случае модуль $A(\omega_k)$ в децибелах, т. е. $L(\omega_k) = 20 \lg A(\omega_k)$, равен ординате л. а. х. при частоте $\omega = \omega_k$ (рис. 8.2, а).

Простота выражения (8.16) позволяет легко решить обратную задачу, т. е. сформулировать требования к л. а. х., которые необходимо выполнить, чтобы амплитуда ошибки в установившемся режиме была не больше заданной. Для этого необходимо по заданному значению амплитуды задающего

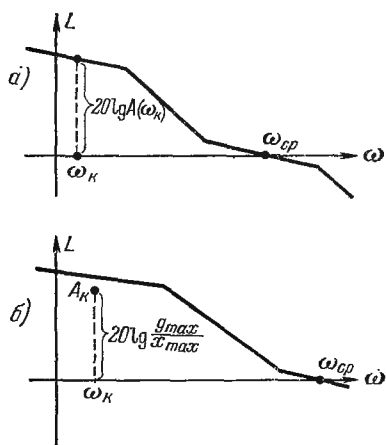


Рис. 8.2.

воздействия $g_{\max}$ и допустимой амплитуде ошибки $x_{\max}$ вычислить требуемое значение модуля частотной передаточной функции разомкнутой системы в децибелах:

$$L(\omega_h) = 20 \lg A(\omega_h) = 20 \lg \frac{g_{\max}}{x_{\max}}. \quad (8.17)$$

Это значение модуля необходимо отложить на логарифмической сетке при частоте управляющего воздействия $\omega = \omega_h$. Полученная точка A_h (рис. 8.2, б) обычно называется контрольной точкой для л. а. х. Для того чтобы амплитуда ошибки в системе не превосходила допустимого значения $x_{\max}$, л. а. х. должна проходить *не ниже* контрольной точки A_h . Если л. а. х. пройдет через эту точку, то амплитуда ошибки будет как раз равна допустимому значению. Если л. а. х. пройдет ниже точки A_h , то ошибка будет больше допустимого значения.

§ 8.3. Коэффициенты ошибок

Рассматриваемый метод может применяться как для задающего $g(t)$, так и для возмущающего $f(t)$ воздействий. Не снижая общности рассуждений, рассмотрим случай, когда имеется только задающее воздействие.

Если функция времени $g(t)$ имеет произвольную форму, но достаточно плавную вдали от начальной точки процесса в том смысле, что через некоторое время существенное значение имеет только конечное число m производных

$$\frac{dg}{dt}, \quad \frac{d^2g}{dt^2}, \quad \dots, \quad \frac{d^m g}{dt^m},$$

то ошибку системы можно определить следующим образом. Из формулы (5.20) можно найти изображение ошибки

$$X(p) = \Phi_x(p) G(p) = \frac{G(p)}{1+W(p)}, \quad (8.18)$$

где $\Phi_x(p)$ — передаточная функция замкнутой системы по ошибке, $G(p)$ — изображение задающего воздействия.

Разложим передаточную функцию по ошибке в выражении (8.18) в ряд по возрастающим степеням комплексной величины p :

$$X(p) = \left[c_0 + c_1 p + \frac{c_2}{2!} p^2 + \frac{c_3}{3!} p^3 + \dots \right] G(p), \quad (8.19)$$

сходящийся при малых значениях p , т. е. при достаточно больших значениях времени t , что соответствует установившемуся процессу изменения регулируемой величины при заданной форме управляющего воздействия.

Переходя в выражении (8.19) к оригиналу, получаем формулу для установившейся ошибки

$$x_{\text{уст}} = c_0 g(t) + c_1 \frac{dg(t)}{dt} + \frac{c_2}{2!} \frac{d^2g(t)}{dt^2} + \dots \quad (8.20)$$

Величины $c_0, c_1, c_2, \dots$ называются *коэффициентами ошибок*. Они могут определяться согласно общему правилу разложения функции в ряд Тейлора по формулам

$$c_0 = [\Phi_x(p)]_{p=0}, \quad c_1 = \left[\frac{d\Phi_x(p)}{dp} \right]_{p=0}, \quad \dots, \quad c_m = \left[\frac{d^m \Phi_x(p)}{dp^m} \right]_{p=0}.$$

Так как передаточная функция по ошибке представляет собой дробно-рациональную функцию, то коэффициенты ошибок можно более просто

получить делением числителя на знаменатель и сравнением получающегося ряда с выражением (8.19).

Коэффициент c_0 может быть отличным от нуля только в статических системах и то только в тех случаях, когда не принимаются меры по устранению первой составляющей статической ошибки посредством масштабирования или использования неединичных обратных связей (см. § 9.3).

В системах с астатизмом первого порядка $c_0 = 0$, а коэффициент c_1 связан с добротностью по скорости соотношением

$$c_1 = \frac{1}{K_v}. \quad (8.21)$$

В системах с астатизмом второго порядка

$$c_0 = 0 \quad \text{и} \quad c_1 = 0,$$

а коэффициент c_2 связан с добротностью по ускорению соотношением

$$\frac{c_2}{2} = \frac{1}{K_e}. \quad (8.22)$$

При исследовании ошибки от возмущающего воздействия можно получить все коэффициенты не равными нулю при астатизме любого порядка, так как астатизму по задающему воздействию может соответствовать наличие статической ошибки по возмущению.

Если задающее воздействие $g(t)$ имеет ограниченное число производных, то ряд (8.20) будет иметь ограниченное число членов. Предположение, что коэффициенты ошибок представляют собой постоянные числа, обуславливает применение этого метода для сравнительно медленно меняющихся входных воздействий $g(t)$ или $f(t)$, когда можно пренебречь влиянием переходной составляющей процесса и рассматривать только вынужденное движение системы.

П р и м е р. Определим первые три коэффициента ошибки по задающему воздействию, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_o}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}.$$

Передаточная функция по ошибке

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{T_1T_2p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p}{T_1T_2p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p + K_o}.$$

Деля числитель на знаменатель, получаем ряд

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{K_o}p + \left(\frac{T_1+T_2}{K_v} - \frac{1}{K_v^2}\right)p^2 + \left(T_1T_2 - 2\frac{T_1+T_2}{K_o} + \frac{1}{K_v^2}\right)p^3 + \dots$$

Сравнение этого ряда с (8.19) дает

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{K_v}, \quad \frac{c_2}{2} = \frac{T_1+T_2}{K_v} - \frac{1}{K_v^2}, \quad \frac{c_3}{6} = \frac{T_1T_2}{K_v} - 2\frac{T_1+T_2}{K_o} + \frac{1}{K_v^2}.$$

Так, например, если задающее воздействие в этой системе меняется по закону

$$g(t) = g_0 + v_0t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

то установившаяся ошибка будет

$$x_{уст} = \frac{v_0 + \varepsilon t}{K_v} + \frac{\varepsilon}{K_v^2} [(T_1+T_2)K_v - 1].$$

§ 8.4. Определение запаса устойчивости и быстродействия по переходной характеристике

Оценку запаса устойчивости и быстродействия можно произвести по виду кривой переходного процесса в системе автоматического регулирования при некотором типовом входном воздействии, которым может быть как задающее, так и возмущающее воздействие. В качестве типового входного воздействия рассматривается обычно единичный скачок. В этом случае кривая переходного процесса для регулируемой величины будет представлять собой *переходную характеристику* системы (рис. 8.3). Она может строиться для регулируемой величины $y(t)$ или для ошибки $x(t)$.

Склонность системы к колебаниям, а следовательно, и запас устойчивости могут быть охарактеризованы максимальным значением регулируемой величины $y_{\max}$ или так называемым *перерегулированием*

$$\sigma\% = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100\%, \quad (8.23)$$

где $y(\infty) \neq 0$ представляет собой установившееся значение регулируемой величины после завершения переходного процесса.

Допустимое значение перерегулирования для той или иной системы автоматического регулирования может быть установлено на основании опыта эксплуатации подобных систем. В большинстве случаев считается, что запас устойчивости является достаточным, если величина перерегулирования не превышает $10 \div 30\%$. Однако в некоторых случаях требуется, чтобы переходный процесс протекал вообще без перерегулирования, т. е. был монотонным; в ряде других случаев может допускаться перерегулирование $50 \div 70\%$.

Быстродействие системы может определяться по длительности переходного процесса t_n . Длительность переходного процесса определяется как время, протекающее от момента приложения на вход единичного скачка до момента, после которого имеет место неравенство

$$|y(t) - y(\infty)| \leq \Delta y(\infty) = \Delta_1, \quad (8.24)$$

где Δ_1 — заданная малая постоянная величина, представляющая собой обычно допустимую ошибку. Величина $y(\infty)$ в частном случае может равняться нулю.

Допустимое значение времени переходного процесса определяется на основании опыта эксплуатации систем регулирования. В следящих системах в качестве единичного скачка принимается мгновенное изменение управляющего воздействия $g(t) = 1(t)$. В этом случае под величиной Δ обычно понимают некоторую долю входного воздействия, составляющую, как правило, от 1 до 5% величины скачка на входе.

Иногда дополнительно к величине перерегулирования $\sigma\%$ (или к величине $y_{\max}$) задается допустимое число колебаний, которое может наблюдаться в течение времени переходного процесса. Это число составляет обычно $1 \div 2$. В некоторых системах колебания могут вообще не допускаться, а иногда может допускаться до $3 \div 4$ колебаний.

Графически требования к запасу устойчивости и быстродействию сводятся к тому, чтобы отклонение регулируемой величины не выходило при единичном входном воздействии из некоторой области, изображенной

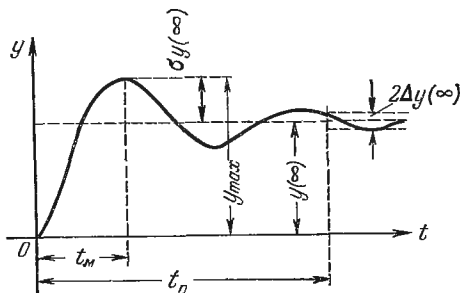


Рис. 8.3.

на рис. 8.4. Эта область называется областью допустимых отклонений регулируемой величины в переходном процессе.

В следящих системах удобно применять сформулированные требования качества к ошибке системы $x(t) = g(t) - y(t)$. В этом случае можно рассматривать область допустимых значений ошибки и при более сложных входных воздействиях, например при мгновенном приложении на входе постоянной скорости.

Дальнейшее развитие критериев качества, использующих переходную характеристику, приводит к введению дополнительных оценок качества (кроме введенных выше t_n , $y_{\max}$ и $\sigma\%$). К ним относятся следующие оценки.

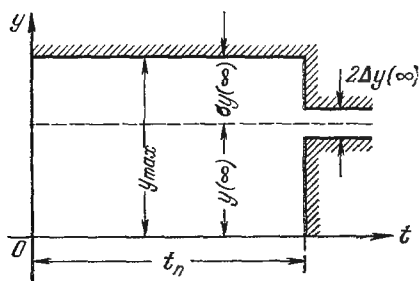


Рис. 8.4.

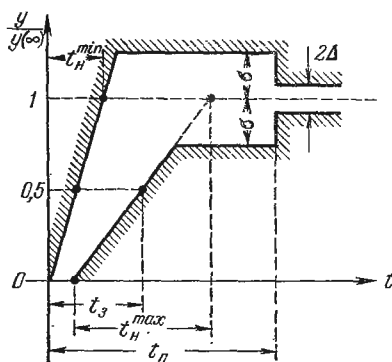


Рис. 8.5.

1. Время запаздывания t_3 , равное отрезку времени, заключенному между моментом приложения входного скачкообразного сигнала и моментом времени, при котором осредненная выходная величина становится равной половине ее установившегося значения. Примененный здесь термин «осредненная» означает, что в случаях, когда на передний фронт выходного сигнала накладываются высокочастотные колебания (это может иметь место в системах высокого порядка), величина t_3 определяется по сглаженной кривой, аппроксимирующей реальную переходную характеристику системы.

2. Время нарастания t_n , равное отрезку времени, заключенному между точкой пересечения оси времени с касательной, проведенной к осредненной кривой переходной характеристики в точке $t = t_3$, и координатой t точки пересечения указанной касательной с горизонтальной прямой, соответствующей установившемуся значению регулируемой величины. Максимальное время нарастания $t_n^{\max}$ ограничивается требуемым быстродействием. Минимальное время нарастания $t_n^{\min}$ ограничивается допустимыми в системе ускорения и колебательными режимами.

Уточненная диаграмма качества переходного процесса изображена на рис. 8.5.

§ 8.5. Приближенная оценка вида переходного процесса по вещественной частотной характеристике

Построение кривой переходного процесса является в большинстве случаев весьма трудоемкой операцией. Поэтому целесообразно использовать методы, позволяющие определить вид переходной характеристики без построения всей кривой процесса. Это можно сделать по вещественной частотной характеристике $P(\omega)$ замкнутой системы, которая используется для построения переходной функции (см. § 7.5). При этом предполагается, что

переходный процесс $y(t)$ вызван скачком задающего воздействия $g(t)$. Возможна оценка вида переходного процесса при приложении скачка возмущения $f(t)$. В этом случае необходимо использовать вещественную часть частотной передаточной функции системы по возмущающему воздействию $\Phi_F(j\omega) = P_F(\omega) + jS_F(\omega)$.

Использование оценки вида переходного процесса по вещественной частотной характеристике наиболее удобно применять в том случае, когда для исследования автоматической системы используются частотные методы.

Пусть вещественная частотная характеристика замкнутой системы имеет вид, изображенный на рис. 8.6.

Интервал частот $0 \leq \omega \leq \omega_n$, в котором $P(\omega) \geq 0$, называется интервалом положительности. Интервал частот $0 \leq \omega \leq \omega_c$ называется интервалом существенных частот. Если при $\omega = \omega_c$ и далее при $\omega > \omega_c$ величина $|P(\omega)|$ становится и остается меньше некоторой заданной достаточно малой положительной величины δ , влиянием остальной части вещественной частотной характеристики (при $\omega \geq \omega_c$) на качество переходного процесса можно пренебречь. Если же при $\omega > \omega_n$ оказывается, что $|P(\omega)| < 0,2P(0)$, то при оценке качества переходного процесса в первом приближении можно принимать во внимание только интервал положительности $0 \leq \omega \leq \omega_n$.

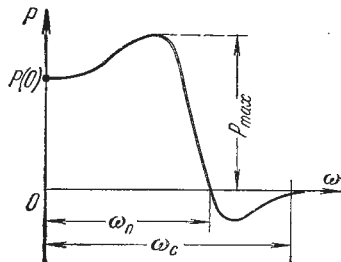


Рис. 8.6.

Заметим, что отбрасываемый «хвост» вещественной частотной характеристики ($\omega > \omega_c$ или $\omega > \omega_n$) влияет главным образом на начальную часть переходного процесса, которая, следовательно, будет оцениваться более грубо. Начало же вещественной частотной характеристики определяет главным образом концевую часть переходного процесса.

На основании анализа интеграла (7.53) были получены следующие оценки качества переходного процесса.

1. Статическое отклонение $y(\infty)$ регулируемой величины, получающееся в результате единичного скачка внешнего воздействия, равно начальному значению вещественной частотной характеристики $P(0)$. Если речь идет о скачке задающего воздействия, то $P(0)$ должно равняться либо 1, либо некоторому k_0 , если система должна воспроизводить задающее воздействие в определенном масштабе k_0 . Если же вводится скачок возмущающего воздействия f , то значению $P_F(0)$ должно быть как можно меньше, причем в астатической системе возможно $P_F(0) = 0$.

2. Чтобы величина перерегулирования $y_{\max} - y(\infty)$ (кривая 1 на рис. 8.7, а) не превышала 18% от статического отклонения, достаточно иметь положительную невозрастающую непрерывную характеристику $P(\omega)$ (кривая 1 на рис. 8.7, б).

3. Для монотонности переходного процесса $y(t)$ (кривая 2 на рис. 8.7, а) достаточно, чтобы $dP/d\omega$ представляла собой отрицательную, убывающую по модулю непрерывную функцию от ω (кривая 2 на рис. 8.7, б), причем $P(\infty) = 0$.

4. Простейшим признаком немонотонности переходного процесса является наличие значений $P(\omega) > P(0)$ (кривая 3 на рис. 8.7, б). Переходный процесс тоже будет немонотонным, когда кривая $P(\omega)$ располагается при каких-нибудь ω выше ступенчатой кривой $G(\omega)$ (рис. 8.7, в), причем

$$G(\omega) = \cos \frac{\pi}{\left[\frac{\omega_n}{\omega} \right] + 1},$$

где через $\left[\frac{\omega_{\text{п}}}{\omega} \right]$ обозначены целочисленные значения, взятые с избытком; например, если $\frac{\omega_{\text{п}}}{\omega} = 1,25$, то берется

$$\left[\frac{\omega_{\text{п}}}{\omega} \right] = 2.$$

5. В случае, если вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ имеет очертание вида кривой 3 (рис. 8.7, б), которую можно представить как

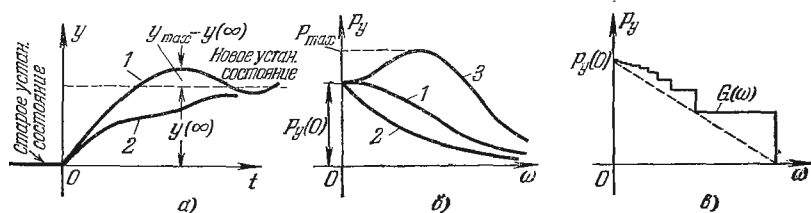


Рис. 8.7.

разность двух положительных невозрастающих непрерывных функций, то величина перерегулирования $y_{\text{max}} - y(\infty)$ (рис. 8.7, а) будет меньше, чем $1,18 P_{\text{max}} - P(0)$.

6. Для монотонных процессов $y(t)$ время затухания t_1 до значения $y = 5\%$ от статического отклонения $y(\infty)$ будет больше, чем $\frac{4\pi}{\omega_{\text{п}}}$. В общем же

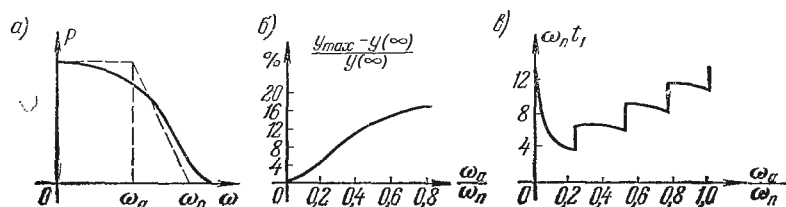


Рис. 8.8.

случае $t_1 > \frac{\pi}{\omega_{\text{п}}}$. Вообще при прочих равных условиях переходный процесс тем быстрее затухает, чем больше $\omega_{\text{п}}$, т. е. чем больше растянута область

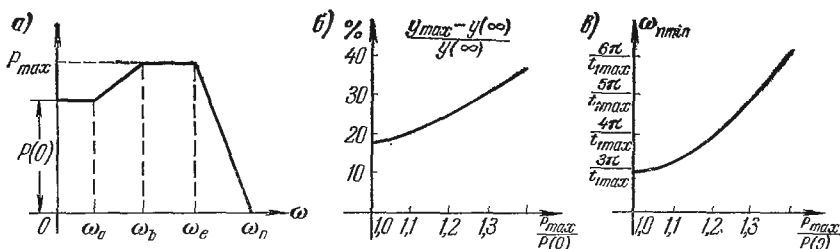


Рис. 8.9.

положительности вещественной частотной характеристики $P(\omega)$ вдоль оси ω .

7. Если заданную вещественную частотную характеристику $P(\omega)$ можно приблизительно заменить трапецией (рис. 8.8; а), то в зависимости от отноше-

ния длин оснований ω_a и ω_n трапеции величина перерегулирования в процентах и время затухания переходного процесса в относительном виде $\omega_n t_1$ могут быть приближенно оценены графиками, показанными на рис. 8.8, б и 8.8, в, причем величина t_1 заключается в интервале $\frac{\pi}{\omega_n} < t_1 < \frac{4\pi}{\omega_n}$.

8. Если заданную характеристику $P(\omega)$ можно приближенно заменить ломаной, изображенной на рис. 8.9, а, причем

$$\frac{\omega_a}{\omega_b} \leq 0,4, \quad \frac{\omega_b}{\omega_n} \leq 0,5, \quad \frac{\omega_e}{\omega_n} \leq 0,8,$$

то зависимость максимально возможного перерегулирования (в процентах) от величины отношения $\frac{P_{\max}}{P(0)}$ определяется кривой на рис.

8.9, б. При этом заданной верхней границе допустимого значения времени затухания переходного процесса t_1 соответствует нижняя допустимая граница величины интервала положительности $\omega_{n\min}$, определяемая кривой на рис. 8.9, в.

9. Склонность системы к колебаниям тем больше, чем выше пик у вещественной характеристики. В частности, этот пик уходит в бесконечность, если система находится на границе колебательной устойчивости, что соответствует наличию пары чисто мнимых корней (кривая 1 на рис. 8.10). При нахождении системы на границе устойчивости, соответствующей наличию одного

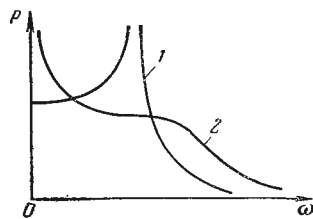
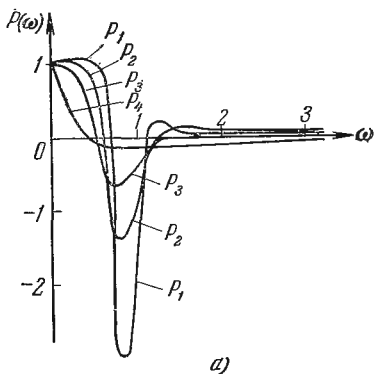
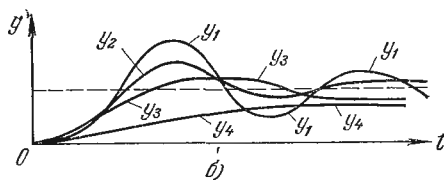


Рис. 8.10.



а)



б)

Рис. 8.11.

нулевого корня, в бесконечность уходит начальное значение ординаты $P(0)$ вещественной частотной характеристики (кривая 2 на рис. 8.10).

На основании вышеуказанных простых признаков можно грубо оценивать качество переходного процесса в замкнутой автоматической системе по виду ее вещественных частотных характеристик $P(\omega)$ и $P_F(\omega)$.

Для иллюстрации, следуя В. В. Солодовникову, приведем ряд кривых переходного процесса $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, $y_4(t)$ (рис. 8.11, б), которые соответствуют вещественным частотным характеристикам замкнутой системы $P_1(\omega)$, $P_2(\omega)$, $P_3(\omega)$, $P_4(\omega)$, изображенным на рис. 8.11, а. Наилучший переходный процесс $y_3(t)$ соответствует характеристике $P_3(\omega)$, а наихудший $y_1(t)$ — характеристике $P_1(\omega)$, обладающей наибольшими пиками.

§ 8.6. Корневые методы

Как было сказано выше, вид корней характеристического уравнения определяет характер переходных процессов в системе автоматического регулирования. Поэтому можно сформулировать требования по запасу устойчивости и быстродействию системы, не рассматривая самих переходных

процессов, а накладывая определенные условия на корни характеристического уравнения.

Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_k p^{n-k} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (8.25)$$

где $p = s + j\omega$ — комплексное число.

Используя понятие *среднегеометрического корня*

$$\Omega_0 = +\sqrt[n]{|p_1 p_2 \dots p_n|} = +\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}, \quad (8.26)$$

где $p_1, p_2, \dots, p_n$ — корни характеристического уравнения, в формуле (8.25) можно перейти к новой комплексной величине q путем подстановки $p = \Omega_0 q$. В результате получим уравнение

$$q^n + A_1 q^{n-1} + \dots + A_k q^{n-k} + \dots + A_{n-1} q + 1 = 0, \quad (8.27)$$

в котором безразмерные коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_{n-1}$ определяются выражением

$$A_k = \frac{a_k \Omega_0^{n-k}}{a_0}, \quad (8.28)$$

а его корни равны $q_1 = \frac{p_1}{\Omega_0}$, $q_2 = \frac{p_2}{\Omega_0}$ и т. д.

Исходное характеристическое уравнение (8.25) при возвращении к прежней комплексной величине получает вид

$$p^n + A_1 \Omega_0 p^{n-1} + \dots + A_k \Omega_0^{n-k} p^{n-k} + \dots + \Omega_0^n = 0. \quad (8.29)$$

Среднегеометрический корень Ω_0 может служить мерой быстроты протекания переходных процессов. Если в уравнении (8.29) увеличить Ω_0 , например, в 10 раз, то на основании теоремы подобия (табл. 7.2) переходный процесс, оставаясь подобным сам себе, будет протекать в 10 раз быстрее.

В связи с этим можно рассматривать (8.27) как некоторое нормированное характеристическое уравнение, которому соответствует переходный процесс, построенный для безразмерного времени $t_0 = \Omega_0 t$. Если

качество переходного процесса является приемлемым с точки зрения допустимого запаса устойчивости, определяемого, например, перерегулированием (рис. 8.3), то требуемая быстрота протекания переходного процесса может быть обеспечена соответствующим выбором величины Ω_0 .

Для увеличения величины Ω_0 , как следует из (8.26), необходимо увеличивать свободный член характеристического уравнения a_n . Напомним, что в статических системах $a_n = 1 + K$, а в астатических $a_n = K$, где K — общий коэффициент усиления по разомкнутой цепи регулирования. Следовательно, повышение быстродействия может осуществляться за счет увеличения общего коэффициента усиления.

Для оценки быстродействия системы может использоваться понятие степени устойчивости¹⁾.

Под *степенью устойчивости* η понимается абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня (рис. 8.12). Здесь могут

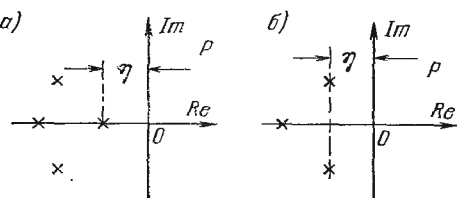


Рис. 8.12.

¹⁾ Термин «степень устойчивости» не является удачным, и его, вообще говоря, следовало заменить термином «степень быстродействия». Это объясняется тем, что «степень устойчивости» никак не связана с удалением системы от границы устойчивости, определяемым по склонности системы к колебаниям. Однако этот термин используется в литературе, и мы будем его придерживаться.

быть два случая: когда ближайший корень является вещественным (рис. 8.12, а) и когда к оси мнимых ближе всего расположена пара комплексных корней (рис. 8.12, б).

Корни характеристического уравнения, расположенные ближе всего к оси мнимых, т. е. имеющие наименьшую по абсолютной величине вещественную часть, дают в переходном процессе (7.3) члены, которые затухают наиболее медленно. В большинстве случаев переходный процесс можно считать закончившимся тогда, когда затухнет член, определяемый ближайшим к мнимой оси корнем. Если ближайшим к мнимой оси является вещественный корень, то составляющая в переходном процессе, определяемая этим корнем, будет иметь вид $x_{\eta}(t) = C_{\eta}e^{-\eta t}$.

Положив в конце переходного процесса $x_{\eta}(t_{\pi}) = \Delta C_{\eta}$, где $\Delta = 0,01 \div 0,05$, можно получить приближенную зависимость между степенью устойчивости и временем переходного процесса:

$$t_{\pi} \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta}. \quad (8.30)$$

Так, например, если принять $\Delta = 0,05$, то время переходного процесса составит

$$t_{\pi} = \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0,05} \approx \frac{3}{\eta}.$$

Если ближайшей к оси мнимых является пара комплексных корней $-\eta \pm j\beta$, то составляющая в переходном процессе, определяемая этими корнями, будет $x_{\eta}(t) = C_{\eta}e^{-\eta t} \sin(\beta t + \psi)$.

Положив в этом случае $x_{\eta}(t) = \Delta C_{\eta}$, нельзя в общем виде определить время переходного процесса, так как для этой цели потребовалось бы решить трансцендентное уравнение. Однако можем найти верхнюю границу переходного процесса, положив в этом уравнении $\sin(\beta t + \psi) = 1$. Тогда получим выражение

$$t_{\pi} \leq \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta}. \quad (8.31)$$

Таким образом, и в этом случае величина степени устойчивости будет в какой-то мере определять быстроту затухания переходного процесса.

Более строго связь между видом переходного процесса и величиной степени устойчивости может быть определена для случая, когда исходное дифференциальное уравнение системы имеет вид

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) x(t) = f(t). \quad (8.32)$$

Тогда можно показать [61], что при всех вещественных корнях или одной паре комплексных корней для переходной функции справедливо неравенство

$$1 + v(\eta, t) > h(t) > 1 - v(\eta, t), \quad (8.33)$$

где $1 + v(\eta, t)$ — функция, ограничивающая $h(t)$ сверху (мажоранта); $1 - v(\eta, t)$ — функция, ограничивающая $h(t)$ снизу (миноранта).

Вспомогательная функция $v(\eta, t)$ определяется из выражения

$$v(\eta, t) = e^{-\eta t} \left[1 + \eta t + \frac{(\eta t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\eta t)^{n-1}}{(n-1)!} \right]. \quad (8.34)$$

Миноранта совпадает с переходной функцией, если характеристическое уравнение имеет корень $p_1 = -\eta$ кратности n , т. е. выглядит следующим образом:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = a_0 (p + \eta)^n = 0. \quad (8.35)$$

Очевидно, что в этом случае n -кратный корень совпадает со среднегеометрическим корнем

$$\eta = \Omega_0 = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}. \quad (8.36)$$

Из неравенства (8.33) вытекает, что при заданном значении среднегеометрического корня $\Omega_0 = \text{const}$ и всех вещественных корнях наименьшее время переходного процесса будет при всех кратных корнях, т. е. в случае (8.35).

На рис. 8.13 приведены миноранты, совпадающие с переходными характеристиками для случая n -кратного корня, построенные в функции относительного времени $\tau = \Omega_0 t$ для различных значений порядка дифференциального уравнения n .

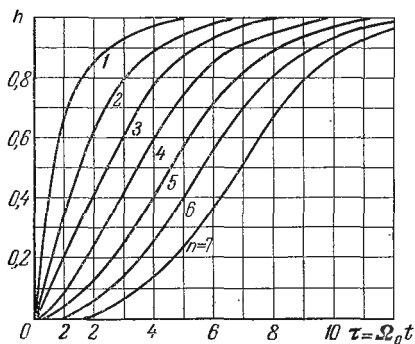


Рис. 8.13.

Важным обстоятельством является то, что степень устойчивости можно найти без вычисления значений корней характеристического уравнения. Для этой цели в характеристическом уравнении (8.25) переходят к новой переменной $z = p + \eta$. Подставляя в него $p = z - \eta$, получаем так называемое смещенное уравнение

$$a_0(z - \eta)^n + a_1(z - \eta)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(z - \eta) + a_n = 0.$$

Раскрывая скобки и группируя подобные члены, получаем

$$a_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n = 0. \quad (8.37)$$

Это уравнение соответствует смещению осей на плоскости корней (рис. 8.12) влево на величину η . В результате один (рис. 8.12, а) или два (рис. 8.12, б) корня попадают на ось мнимых, что соответствует границе устойчивости.

Для вычисления степени устойчивости необходимо применить к смещенному характеристическому уравнению (8.37) любой критерий устойчивости и определить, при каком значении η получается граница устойчивости. Напомним, что аperiodической границе устойчивости соответствует равенство нулю свободного члена характеристического уравнения:

$$A_n = a_n - a_{n-1}\eta + a_{n-2}\eta^2 - a_{n-3}\eta^3 + \dots = 0, \quad (8.38)$$

а колебательной границе устойчивости соответствует равенство нулю предпоследнего определителя Гурвица, прохождение кривой Михайлова через начало координат и прохождение амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы через точку $(-1, j0)$.

Обратимся теперь к оценке запаса устойчивости системы автоматического регулирования. Склонность системы к колебаниям будет наблюдаться, если в решении характеристического уравнения будут присутствовать комплексные корни вида $-\alpha \pm j\beta$. Эта склонность может характеризоваться отношением мнимой части корня (угловой частоты колебаний) к вещественной (коэффициенту затухания), которое называется *колебательностью*:

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (8.39)$$

Колебательность связана с другим корневым показателем запаса устойчивости — с так называемым затуханием. Комплексные сопряженные корни дают в выражении для переходного процесса член вида

$$x(t) = Ce^{-\alpha t} \sin(\beta t + \psi).$$

Найдем затухание амплитуды синусоидального колебания за один период. При некотором времени $t = t_1$ эта амплитуда равна

$$C_1 = Ce^{-\alpha t_1}.$$

Через один период $T = \frac{2\pi}{\beta}$

$$C_2 = C e^{-\alpha \left(t_1 + \frac{2\pi}{\beta}\right)} = C_1 e^{-2\pi \frac{\alpha}{\beta}} = C_1 e^{-\frac{2\pi}{\mu}}.$$

Затуханием за период называют величину

$$\zeta = \frac{C_1 - C_2}{C_1} = 1 - \frac{C_2}{C_1}. \quad (8.40)$$

Эта величина обычно выражается в процентах. Подставляя значение амплитуды C_2 , получаем

$$\zeta = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}}, \quad (8.41)$$

или

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln \frac{1}{1-\zeta}}. \quad (8.42)$$

Обычно в системах автоматического регулирования допускается затухание за один период не менее чем $90 \div 98\%$. Так, например, если $\zeta\% = 98\%$, то допустимая колебательность при этом составит

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln 50} \approx \frac{\pi}{2} = 1,57.$$

Соответственно при $\zeta = 90\%$ получаем $\mu \approx 2,72$.

Задание определенной колебательности заставляет ограничивать область расположения корней двумя лучами (рис. 8.14, а), которые составляют с осью вещественных угол

$$\varphi = \arctg \frac{\beta}{\alpha} = \arctg \mu. \quad (8.43)$$

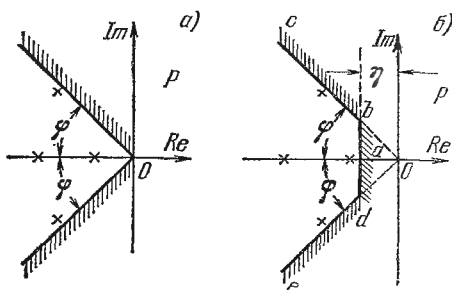


Рис. 8.14.

Колебательность системы можно определить без нахождения корней характеристического уравнения подобно тому, как это было сделано выше по отношению к степени устойчивости. Идея метода заключается в том, что используется подстановка $p = jze^{-j\varphi}$, которая соответствует повороту координатных осей (рис. 8.14, б) против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2} - \varphi$. При этом по крайней мере один корень попадает на ось мнимых и затем он отыскивается. Ввиду громоздкости этот метод почти не имеет практического значения.

При задании допустимых значений колебательности и степени устойчивости область расположения корней должна ограничиваться также вертикальной прямой, проходящей параллельно оси мнимых на расстоянии η (рис. 8.14, б). Расположению корней в этой области соответствует выдерживание требуемого запаса устойчивости, определяемого величиной колебательности μ или затуханием, и требуемой степени устойчивости η , характеризующей быстрдействие системы.

Для определения параметров системы, при которых обеспечивается нахождение корней характеристического уравнения в заданной области, можно воспользоваться D -разбиением. В этом случае в плоскости двух параметров системы может быть построена область, аналогично построению области устойчивости (см. § 6.4). Напомним, что при построении области

устойчивости комплексная величина $p = j\omega$ изменялась от $-j\infty$ до $+j\infty$, что соответствует движению по мнимой оси снизу вверх. В рассматриваемом случае комплексная величина p должна перемещаться по границе допустимого расположения корней $edabc$ (рис. 8.14, б). В силу симметрии области достаточно рассмотреть участок abc .

Методика построения допустимой области изменения двух параметров системы A и B , входящих линейно в характеристический полином

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n,$$

остается аналогичной, за тем исключением, что для участка ab делается подстановка $p = -\eta + j\omega$, а затем частота изменяется в пределах $0 \leq \omega \leq \eta \operatorname{tg} \varphi = \eta \mu$. Для участка bc делается подстановка $p = -\frac{\omega}{\mu} + j\omega$ и частота изменяется в пределах $\eta \mu \leq \omega < +\infty$.

Использование корней характеристического уравнения для оценки качества регулирования является не совсем полным, так как вид переходного процесса определяется не только левой, но и правой частью дифференциального уравнения. Для того чтобы учесть это обстоятельство, рассмотрим, например, зависимость между регулируемой величиной и управляющим воздействием, записанную посредством передаточной функции замкнутой системы (5.18):

$$Y(p) = \Phi(p) G(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} G(p).$$

Передаточная функция замкнутой системы представляет собой дробно-рациональную функцию

$$\Phi(p) = \frac{R(p)}{D(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (8.44)$$

Раскладывая числитель и знаменатель (8.44) на множители, получим

$$\Phi(p) = \frac{b_0 (p - p_1^0) (p - p_2^0) \dots (p - p_m^0)}{a (p - p_1) (p - p_2) \dots (p - p_n)}. \quad (8.45)$$

Корни числителя $p_1^0, \dots, p_m^0$ называются нулями передаточной функции, так как в точке $p = p_i^0$ передаточная функция обращается в нуль. Корни знаменателя $p_1, \dots, p_n$ являются корнями характеристического уравнения, и они называются полюсами передаточной функции. В полюсе, т. е. при $p = p_i$, передаточная функция обращается в бесконечность.

Полюсы передаточной функции характеризуют левую часть дифференциального уравнения, а нули — правую. В частном случае, когда передаточная функция (8.44) не имеет нулей, правая часть дифференциального уравнения имеет вид $R(p) y(t) = b_m f(t)$ и формула (8.45) сводится к выражению

$$\Phi(p) = \frac{b_m}{a_0 (p - p_1) (p - p_2) \dots (p - p_n)}. \quad (8.46)$$

В этом случае вид переходного процесса определяется только расположением полюсов.

Задание области расположения полюсов и нулей позволяет более полно оценить вид переходного процесса. Не останавливаясь на подробном анализе, приведем без доказательства общие рекомендации, которых желательно придерживаться при выборе расположения полюсов и нулей передаточных функций [98].

1. Желательно располагать нули вблизи области расположения полюсов. Удаление нулей от области полюсов ведет к увеличению амплитуд собственных колебаний в переходном процессе.

2. Для уменьшения отклонений в переходном процессе часто бывает выгодно удалять полюсы друг от друга.

3. Приближение друг к другу не представляет опасности для тех полюсов, которые расположены далеко от мнимой оси.

Кроме этих рекомендаций сохраняют свою силу ограничения на область расположения полюсов, накладываемые в связи с требованиями обеспечения определенного запаса устойчивости и быстродействия (см. рис. 8.14, б).

§ 8.7. Диаграмма Вышнеградского

Рассмотрим характеристическое уравнение третьего порядка

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0. \quad (8.47)$$

Приведем его к нормированному виду. Для этого разделим все члены на a_3 и введем новую переменную

$$q = p \sqrt[3]{\frac{a_0}{a_3}} = \frac{p}{\Omega_0}. \quad (8.48)$$

Здесь использовано понятие среднегеометрического корня (8.26):

$$\Omega_0 = \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}.$$

В результате получим нормированное уравнение

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0, \quad (8.49)$$

где коэффициенты

$$A = \frac{a_1 \Omega_0^2}{a_3} = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 a_3}}, \quad B = \frac{a_2 \Omega_0}{a_3} = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 a_3^2}}$$

называются *параметрами Вышнеградского*.

На плоскости параметров A и B напесем границу устойчивости. Условия устойчивости системы третьего порядка были впервые сформулированы Вышнеградским еще в 1876 году, до появления в 1895 году критерия Гурвица. Эти условия: $A > 0$, $B > 0$ и $AB > 1$. Уравнение границы устойчивости (колебательной): $AB = 1$ при $A > 0$ и $B > 0$. Это есть равнобокая гиперболa, для которой оси координат служат асимптотами (рис. 8.15). Область устойчивости системы, согласно написанным выше условиям, лежит выше этой кривой.

Разобьем область устойчивости на отдельные части, соответствующие различному расположению корней характеристического уравнения. Заметим, что в точке C , где $A = 3$ и $B = 3$, характеристическое уравнение (8.49) принимает вид $(q + 1)^3 = 0$. Следовательно, в этой точке все три корня равны: $q_1 = q_2 = q_3 = -1$. При этом для исходного характеристического уравнения согласно (8.48) получаем $p_1 = p_2 = p_3 = -\sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}} = -\Omega_0$.

В общем случае возможны два варианта: 1) все три корня вещественные; 2) один корень вещественный и два комплексных.

Граница между этими двумя случаями определяется равенством нулю дискриминанта уравнения третьей степени (8.49), который может быть получен, например, из формулы Кардана для решения кубического уравнения

$$A^2 B^3 - 4(A^3 + B^3) + 18AB - 27 = 0.$$

Это уравнение дает на плоскости параметров A , B две кривые: CE и CF (рис. 8.15). Внутри области ECF дискриминант положителен. Следовательно, в этой области имеется три вещественных корня (область III). В остальной части плоскости дискриминант отрицателен, что соответствует наличию пар комплексных корней.

Существенное значение имеет взаимное расположение вещественного и комплексных корней. Будем различать здесь два случая: *I* — пара комплексных корней лежит ближе к мнимой оси, чем вещественный, и *II* — вещественный корень лежит ближе к мнимой оси, чем пара комплексных. Границей между этими двумя случаями является расположение всех трех корней на одинаковом расстоянии от мнимой оси. Уравнение этой границы можно найти, положив значения корней $q_1 = -\alpha$ и $q_{2,3} = -\alpha \pm j\beta$. Тогда характеристическое уравнение (8.49) будет

$$\begin{aligned} q^3 + Aq^2 + Bq + 1 &= \\ &= (q + \alpha)(q + \alpha - j\beta)(q + \alpha + j\beta) = \\ &= q^3 + 3\alpha q^2 + (3\alpha^2 + \beta^2)q + \\ &\quad + \alpha(\alpha^2 + \beta^2) = 0. \end{aligned}$$

Уравнивание коэффициентов при одинаковых степенях дает

$$A = 3\alpha, \quad B = 3\alpha^2 + \beta^2, \quad 1 = \alpha(\alpha^2 + \beta^2).$$

В результате совместного решения последних трех равенств получаем после исключения α и β искомое уравнение, соответствующее граничному случаю:

$$2A^3 - 9AB + 27 = 0, \quad A < 3.$$

Рис. 8.15.

Написанное равенство дает на плоскости параметров кривую CD .

В результате область устойчивости разбивается на три части: *I*, *II*, *III* (см. рис. 8.15). Этот график называется *диаграммой Вышнеградского*. Он построен им в 1876 году в работе, которая положила начало развитию теории

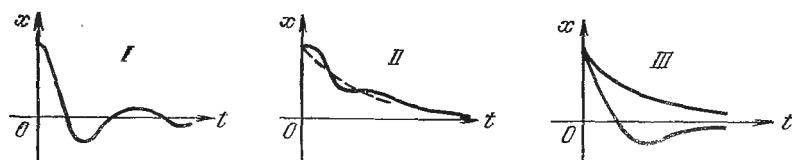


Рис. 8.16.

автоматического регулирования. На рисунке показан характер расположения корней внутри каждой из этих частей области устойчивости.

В области *III*, где все корни вещественные, в зависимости от начальных условий получим аperiodический переходный процесс в одной из форм, показанных на третьем графике рис. 8.16. Область *III* носит название области аperiodических процессов.

В областях *I* и *II*, где имеется один вещественный корень и два комплексных, переходный процесс будет иметь соответственно формы, показанные на первых двух графиках рис. 8.16. В области *I* быстрее затухает экспонента и переходный процесс в основном будет определяться колебательной составляющей. Это будет область колебательных процессов. В области *II*, наоборот, быстрее затухает колебательная составляющая. Это будет область монотонных процессов.

Диаграмма Вышнеградского получила дальнейшее развитие. Для более точной оценки характера переходного процесса на ней можно нанести вспомогательные линии, разбивающие области *I*, *II* и *III* на еще более мелкие части, что позволяет при известных параметрах Вышнеградского иметь более

полное суждение о быстродействии и запасе устойчивости. Ниже будут рассмотрены наиболее распространенные способы уточнения диаграммы

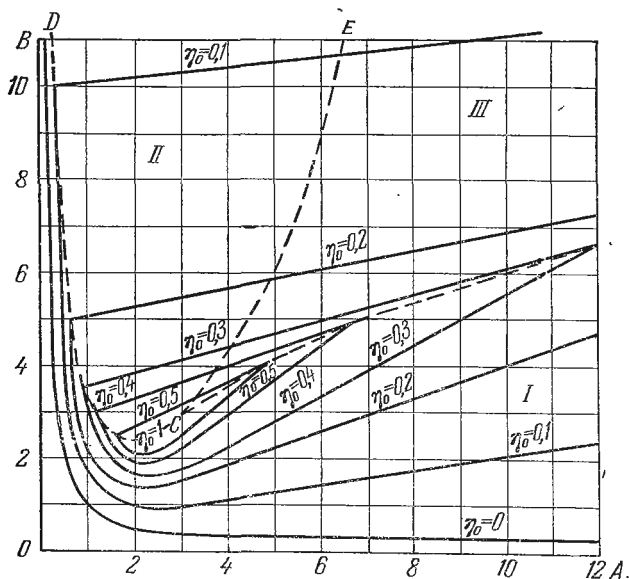


Рис. 8.17.

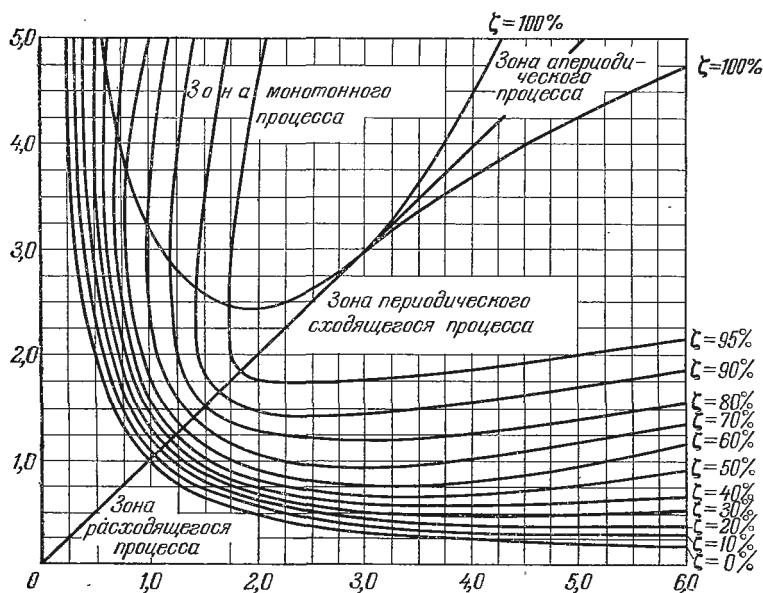


Рис. 8.18.

Вышнеградского посредством нанесения линий равной степени устойчивости (для оценки быстродействия) и линий равного затухания (для оценки запаса устойчивости).

Для нанесения линий равной степени устойчивости обратимся к нормированному характеристическому уравнению (8.49). Для получения смещенного уравнения введем новую переменную, определяемую соотношением $q = q_1 - \eta_0$, где η_0 обозначает степень устойчивости для нормированного

уравнения. Для исходного уравнения (8.47) согласно (8.48) степень устойчивости будет

$$\eta = \eta_0 \Omega_0 = \eta_0 \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}.$$

Смещенное уравнение имеет вид

$$q_1^3 + A_1 q_1^2 + A_2 q + A_3 = 0. \quad (8.50)$$

Коэффициенты этого уравнения:

$$A_1 = -3\eta_0 + A, \quad A_2 = 3\eta_0^2 - 2A\eta_0 + B, \quad A_3 = -\eta_0^3 + A\eta_0^2 - B + 1.$$

Применим к смещенному уравнению условие границы устойчивости. Колебательная граница устойчивости, соответствующая чисто мнимым корням смещенного уравнения (8.50), будет при выполнении условия $A_1 A_2 = -A_3$. Апериодическая граница устойчивости (нулевой корень) будет при $A_3 = 0$. Первое условие при подстановке значений коэффициентов приводит к уравнению

$$B = \frac{1}{A - 2\eta_0} + 2\eta_0 (A - 2\eta_0), \quad (8.51)$$

а второе дает

$$B = A\eta_0 - \eta_0^2 + \frac{1}{\eta_0}. \quad (8.52)$$

На основании полученных уравнений, задаваясь различными значениями $\eta_0 = \text{const}$, можно построить на диаграмме Вышнеградского линии одинаковых значений нормированной степени устойчивости (рис. 8.17). По уравнению (8.51) построены кривые $\eta_0 = \text{const}$ в области I, так как там, согласно рис. 8.15, ближайшими к мнимой оси являются комплексные корни. Кривая $\eta_0 = 0$ совпадает с границей устойчивости. Уравнение (8.52) дает прямые, которые нанесены в областях II и III.

Как видно из диаграммы, наибольшая степень устойчивости $\eta_0 = 1$ имеет место в точке C с координатами $A = 3$ и $B = 3$. Следовательно, эта точка соответствует наилучшим значениям параметров с точки зрения величины степени устойчивости. Однако, как уже отмечалось, степень устойчивости является приближенной оценкой быстроты затухания переходного процесса. Поэтому при выборе параметров системы регулирования практически нет смысла попадать именно в эту точку диаграммы. Можно считать, что наилучшей областью параметров системы будет область, прилегающая к точке C, например внутри замкнутой кривой $\eta_0 = 0,5$.

На рис. 8.18 приведена диаграмма Вышнеградского с нанесенными линиями равного затухания $\xi = \text{const}$. (Аналитические выкладки не приводятся ввиду громоздкости). Эти же линии являются, по существу, и линиями равной колебательности $\mu = \text{const}$, так как колебательность и затухание связаны между собой формулами (8.41) и (8.42).

§ 8.8. Интегральные оценки

Интегральные оценки имеют целью дать общую оценку быстроты затухания и величины отклонения регулируемой величины в совокупности, без определения того и другого в отдельности. Простейшей интегральной оценкой может служить величина

$$I_1 = \int_0^{\infty} x(t) dt, \quad (8.53)$$

где $x(t)$ — отклонение регулируемой величины от нового установившегося значения, которое она будет иметь после завершения переходного процесса.

В устойчивой системе $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и этот интеграл имеет конечную величину. Геометрически это будет площадь под кривой переходного процесса, построенного для отклонения (рис. 8.19, а).

Площадь будет тем меньше, чем быстрее затухает переходный процесс и чем меньше величина отклонения. Поэтому параметры системы рекомендуется выбирать таким образом, чтобы добиваться минимума этой интегральной оценки.

Для вычисления интеграла (8.53) нет необходимости в нахождении $x(t)$, так как его можно легко вычислить, используя изображение Лапласа или Хевисайда — Карсона. Действительно, изображение Лапласа определяется выражением

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt.$$

Отсюда следует, что интеграл (8.53) может быть найден посредством предельного перехода $p \rightarrow 0$:

$$\int_0^{\infty} x(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt = \lim_{p \rightarrow 0} X(p). \quad (8.54)$$

Неудобством интегральной оценки вида (8.53) является то, что она годится только для монотонных процессов, когда не меняется знак отклонения x . Если же имеет место колебательный процесс (рис. 8.19, б), то при вычислении интеграла (8.53) площади будут складываться алгебраически и минимум этого интеграла может соответствовать колебаниям с малым затуханием или вообще без затухания. Так как форма переходного процесса при расчете систем регулирования может быть неизвестна, то применять интегральную оценку вида (8.53) оказывается практически нецелесообразным. Поэтому предлагалась другая интегральная оценка:

$$I_2 = \int_0^{\infty} |x| dt, \quad (8.55)$$

т. е. сумма абсолютных величин всех площадей по кривой переходного процесса. Но оказалось, что вычисление ее по коэффициентам уравнения затруднительно.

Квадратичная интегральная оценка. В свете вышесказанного целесообразно перейти к квадратичной интегральной оценке, называемой иногда «квадратичной площадью» регулирования:

$$I = \int_0^{\infty} x^2 dt \quad (x \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty), \quad (8.56)$$

которая не зависит от знаков отклонений, а значит, и от формы переходного процесса (монотонной или колебательной).

Величина I (8.56) будет тем меньше, чем меньше сумма заштрихованных на рис. 8.20 площадей (взятых для квадратов ординат), т. е. чем лучше

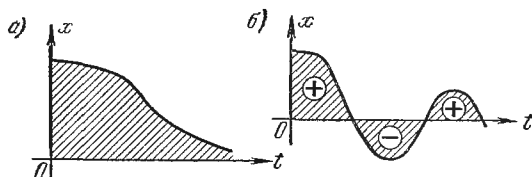


Рис. 8.19.

переходный процесс приближается к идеальному скачку регулируемой величины вслед за скачком задающего или возмущающего воздействия. Ниже будет показано, что такая оценка не всегда является лучшей, но пока остановимся на ней.

Заметим, что оценку (8.56) называют также квадратичной динамической ошибкой регулирования. Ее можно записать в безразмерном виде:

$$I_0 = \frac{\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}}{C^2} \int_0^{\infty} x^2 dt = \frac{\Omega_0}{C^2} \int_0^{\infty} x^2 dt, \quad (8.57)$$

где $x = x(t)$ обозначает отклонение регулируемой величины в переходном процессе от ее нового установившегося значения: $x(t) = y(t) - y(\infty)$;

C — некоторая величина, имеющая размерность регулируемой величины, например статическое отклонение $y(\infty)$; Ω_0 — среднегеометрическое значение корня характеристического уравнения (8.26).

Рассмотрим один из возможных способов вычисления квадратичной интегральной оценки (8.56) при скачкообразном внешнем воздействии.

В общем случае дифференциальное уравнение системы автоматического регулирования (в символической оператор-

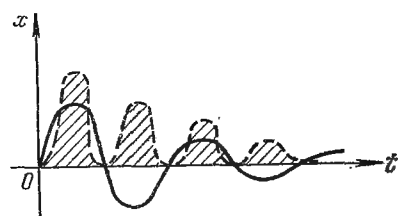


Рис. 8.20.

ной записи) согласно (5.5) имеет вид

$$D(p)y(t) = R(p)g(t) - N(p)f(t), \quad (8.58)$$

где $y(t)$ — регулируемая величина или ее отклонение, $g(t)$ и $f(t)$ — задающее и возмущающее воздействия.

Степени многочленов $R(p)$ и $N(p)$ обычно ниже, чем $D(p)$; в некоторых случаях они могут иметь ту же степень, что и полином $D(p)$. Пусть переходный процесс вызывается единичным скачком $1(t)$ либо функции f при $g = \text{const}$, либо функции g при $f = \text{const}$. Положим, например, что рассматриваем скачок задающего воздействия $g(t) = 1(t)$. Изображение Лапласа такого скачка будет $G(p) = \frac{1}{p}$. Перейдя в формуле (8.58) к изображениям, получаем

$$D(p)Y(p) = R(p)\frac{1}{p}. \quad (8.59)$$

Изображение регулируемой величины $y(t)$ представляет собой дробно рациональную функцию:

$$Y(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \frac{1}{p}. \quad (8.60)$$

Отклонение x регулируемой величины от нового установившегося состояния в переходном процессе, входящее в формулу (8.56), будет

$$x(t) = y(t) - y(\infty) = y(t) - \frac{b_m}{a_n} \cdot 1,$$

где $y(t)$ есть решение уравнения (8.59), а также оригинал изображения (8.60).

Для изложенных условий при $m < n$ ниже без вывода приводится формула [121], по которой может быть вычислена квадратичная интегральная

где

$$\left. \begin{aligned}
 B'_n &= b_0^2 \left(\frac{b_n}{b_0} - \frac{a_n}{a_0} \right)^2, \\
 B'_{n-1} &= b_0^2 \left[\left(\frac{b_{n-1}}{b_0} - \frac{a_{n-1}}{a_0} \right)^2 - 2 \left(\frac{b_n}{b_0} - \frac{a_n}{a_0} \right) \left(\frac{b_{n-2}}{b_0} - \frac{a_{n-2}}{a_0} \right) \right], \\
 B'_{n-2} &= b_0^2 \left[\left(\frac{b_{n-2}}{b_0} - \frac{a_{n-2}}{a_0} \right)^2 - 2 \left(\frac{b_{n-1}}{b_0} - \frac{a_{n-1}}{a_0} \right) \left(\frac{b_{n-3}}{b_0} - \frac{a_{n-3}}{a_0} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left(\frac{b_n}{b_0} - \frac{a_n}{a_0} \right) \left(\frac{b_{n-4}}{b_0} - \frac{a_{n-4}}{a_0} \right) \right], \\
 &\dots \dots \dots \\
 B'_1 &= b_0^2 \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} \right)^2, \\
 b'_n &= b_0 \left(\frac{b_n}{b_0} - \frac{a_n}{a_0} \right), \\
 b'_{n-1} &= b_0 \left(\frac{b_{n-1}}{b_0} - \frac{a_{n-1}}{a_0} \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (8.66)$$

При поступлении на вход системы единичного импульса $\delta(t) = 1'(t)$, изображение которого по Лапласу равно 1, изображение регулируемой величины можно также представить в виде дробно-рациональной функции (8.60). Разница будет заключаться только в том, что степень числителя m возрастает на единицу, а последний коэффициент числителя $b_m = 0$. Это обусловлено тем, что получение реакции системы на единичный импульс (весовой функции) эквивалентно дифференцированию переходной функции, получающейся при действии единичного скачка. В области изображений это эквивалентно умножению на комплексную величину p .

В связи с этим квадратичную интегральную оценку при действии единичного импульса можно рассматривать в виде выражения

$$I' = \int_0^{\infty} w^2(t) dt = \int_0^{\infty} [\dot{x}(t)]^2 dt, \quad (8.67)$$

где $w(t)$ — весовая функция системы по задающему или возмущающему воздействию, $x(t)$ — отклонение регулируемой величины от нового установившегося состояния в переходном процессе при действии единичной ступеньки задающего или возмущающего воздействия.

Таким образом, техника вычисления оценки I' полностью совпадает с вычислением оценки I по формуле (8.64) или (8.65). Совпадает при этом и значение определителя Δ (8.62). Отличаться в вычислениях будут определители $\Delta_0, \dots, \Delta_m$ и коэффициенты $B_0, \dots, B_m$ или $B'_0, \dots, B'_n$, что обусловлено повышением степени m в выражении (8.60) на единицу при вычислении I' по сравнению со случаем вычисления I .

Интегральная оценка I' также может использоваться в безразмерном виде аналогично формуле (8.57):

$$I'_0 = \frac{\Omega_0}{c^2} I'. \quad (8.68)$$

Интегральные оценки I и I' (или выражения квадратичных динамических ошибок) применяются для выбора структуры и параметров систем автоматического регулирования. При этом наилучшими параметрами считаются такие, при которых величина I или I' имеет минимальное значение.

Вычисление квадратичных интегральных оценок I и I' можно также производить на основании так называемой формулы Релея, которая будет доказана ниже, в главе 11. Здесь она будет приведена без доказательства.

Если $X(j\omega)$ есть изображение Фурье функции времени $x(t)$, то существует зависимость, определяемая теоремой Парсеваля (см. ниже стр. 317),

$$\int_0^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega,$$

т. е. интегрирование квадрата функции по времени в пределах от нуля до бесконечности можно заменить интегрированием квадрата модуля изображения Фурье этой функции по всем частотам. При нахождении интегральной оценки I , соответствующей реакции системы на входное задающее воздействие типа $1(t)$, изображение Фурье исследуемого отклонения $x(t) = y(\infty) - y(t)$ будет

$$X(j\omega) = \frac{\Phi(0) - \Phi(j\omega)}{j\omega},$$

где $\Phi(j\omega)$ — частотная передаточная функция замкнутой системы. Тогда

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|\Phi(0) - \Phi(j\omega)|^2}{\omega^2} d\omega. \quad (8.69)$$

В астатических системах и статических системах с неединичной обратной связью или с масштабированием (см. § 9.3) установившееся значение $y(\infty) = 1$ и $\Phi(0) = 1$. Тогда формула (8.69) будет иметь вид

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|\Phi_x(j\omega)|^2}{\omega^2} d\omega, \quad (8.70)$$

где $\Phi_x(j\omega) = 1 - \Phi(j\omega)$ — частотная передаточная функция замкнутой системы по ошибке.

Аналогичным образом для входного задающего воздействия типа единичного импульса $\delta(t)$, изображение Фурье которого равно 1, изображение Фурье исследуемого отклонения $x(t) = -y(t)$ равно частотной передаточной функции замкнутой системы: $X(j\omega) = \Phi(j\omega) \cdot 1$. В результате получаем

$$I' = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega. \quad (8.71)$$

Подобные выражения могут быть получены и для входного возмущающего воздействия, если вместо частотной передаточной функции $\Phi(j\omega)$ использовать передаточную функцию по возмущающему воздействию $\Phi_F(j\omega)$.

Недостатком интегральных оценок является то, что здесь ничем не ограничивается форма кривой переходного процесса. Оказывается, например, что три совершенно различных по форме процесса, изображенных на рис. 8.21, имеют одно и то же значение квадратичной интегральной оценки (8.56). Часто оказывается, что выбранные по минимуму этой оценки параметры системы соответствуют слишком сильно колебательному процессу, ибо отмечавшееся уже при этом стремление приблизить процесс к идеальному скачку вызывает большую скорость процесса при подходе к установившемуся значению $x = 0$.

Это получается вследствие того, что оценка (8.56) учитывает только величину отклонения и быстроту затухания и никак не учитывает близость системы к колебательной границе устойчивости.

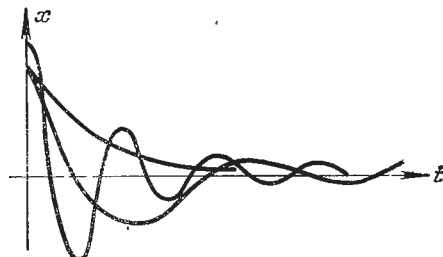


Рис. 8.21.

Если, например, подать на вход системы единичный скачок, то ошибка в переходном процессе определится заштрихованной частью на рис. 8.22, *а*. Очевидно, что величина интегральной оценки (8.56) будет тем меньше, чем ближе будет кривая переходного процесса к ломаной линии *AOBC*. Но приближение процесса к этой линии требует увеличения угла наклона кривой в начальной стадии процесса (приближение части кривой *OD* к отрезку *OB*).

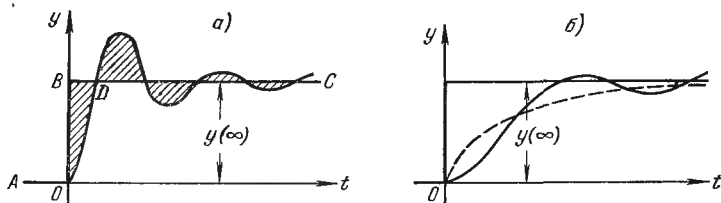


Рис. 8.22.

Увеличение же начальной скорости может вызвать значительное перерегулирование и, следовательно, малый запас устойчивости.

Поэтому применяется еще другой вид интегральной оценки, в которой ограничение накладывается не только на величину отклонения x , но также и на скорость отклонения $\dot{x}$. Эта улучшенная квадратичная интегральная оценка имеет вид

$$I_K = \int_0^{\infty} (x^2 + T^2 \dot{x}^2) dt, \quad (8.72)$$

где T — некоторая постоянная времени.

Выясним, какой вид переходного процесса будет получаться при выборе параметров системы регулирования по минимуму улучшенной интегральной оценки (8.72). Для этого пределаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} I_K &= \int_0^{\infty} (x + T\dot{x})^2 dt - \int_0^{\infty} 2Tx\dot{x} dt = \int_0^{\infty} (x + T\dot{x})^2 dt - T x^2 \Big|_{x_0}^0 = \\ &= \int_0^{\infty} (x + T\dot{x})^2 dt + T x_0^2, \end{aligned}$$

где x_0 — начальное значение отклонения в переходном процессе.

Наименьшее значение последнего выражения будет при выполнении условия $T\dot{x} + x = (Tp + 1)x = 0$.

Это есть дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого имеет вид

$$x = x_0 e^{-\frac{t}{T}}, \quad y = y_0 (1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad (8.73)$$

где $y_0 = x_0$ — установившееся отклонение регулируемой величины.

Этот процесс изображен на рис. 8.22, *б* пунктиром. Следовательно, выбирая параметры системы по минимуму улучшенной интегральной оценки (8.72), можно приблизить переходный процесс к заданной экспоненте (8.73) с постоянной времени T , которая носит в этом случае название экстремали. Из этих соображений можно заранее задаться определенной величиной T .

Выбор параметров системы по улучшенной квадратичной интегральной оценке приводит к менее колебательным процессам по сравнению с использованием обычной квадратичной интегральной оценки (8.56).

Методика вычисления интеграла (8.72) сводится к тому, что правая его часть разбивается на два слагаемых:

$$I_K = \int_0^{\infty} x^2 dt + T^2 \int_0^{\infty} \dot{x}^2 dt.$$

При входном воздействии типа единичной ступенчатой функции первое слагаемое последнего выражения соответствует интегральной оценке I , а второе — $T^2 I'$. Поэтому в результате получаем для этого случая

$$I_K = I + T^2 I'. \quad (8.74)$$

Улучшенная интегральная оценка I_K может также применяться в безразмерном виде аналогично (8.57) и (8.68):

$$I_{K0} = \frac{\Omega_0}{C^2} I_K, \quad (8.75)$$

где Ω_0 — среднегеометрический корень характеристического уравнения, а C — некоторая величина, имеющая размерность $y(t)$, например статическое отклонение $y(\infty)$.

Недостатком приведенных расчетных формул для вычисления как I , так и I_K является их выражение через определители, которые трудно бывает раскрывать в буквенном виде при высокой степени характеристического уравнения. В этих случаях можно использовать имеющиеся специальные приемы числовых расчетов. Сам определитель Δ (8.62), как старший определитель Гурвица, согласно § 6.2 имеет вид

$$\Delta = \Delta_n = a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) \quad \text{при } n = 3,$$

$$\Delta = \Delta_n = a_4 [a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2] \quad \text{при } n = 4,$$

$$\Delta = \Delta_n = a_5 [(a_1 a_2 - a_0 a_3) (a_3 a_4 - a_2 a_5) - (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2] \quad \text{при } n = 5.$$

Несколько сложнее вычисляется только определитель Δ_m , когда первый столбец Δ (8.62) с одним элементом a_n заменяется столбцом (8.63) с двумя элементами a_{n-1} и a_n . Все остальные определители оказываются проще.

Удобство интегральных оценок состоит в том, что они дают единый числовой критерий качества. Недостатком является то, что одному и тому же значению интегральной оценки могут отвечать разные формы переходного процесса, что создает недостаточную определенность решения задачи.

В принципе возможно использование более сложных выражений, чем (8.72), в которые кроме первой производной от отклонения будут входить вторая, третья и т. д. производные. Так, например, ограничившись при подаче ступенчатого воздействия $g(t)$ или $f(t)$ отклонением x , первой производной $\dot{x}$ и второй производной $\ddot{x}$, получим интегральную оценку в виде

$$I_K = \int_0^{\infty} (x^2 + T_1^2 \dot{x}^2 + T_2^2 \ddot{x}^2) dt. \quad (8.76)$$

Эта оценка будет характеризовать приближение переходного процесса к экстремали, определяемой решением дифференциального уравнения

$$T_2^2 \ddot{x} + T_1^2 \dot{x} + x = 0.$$

Экстремаль в данном случае будет соответствовать более сложной кривой, чем экспонента, что позволяет точнее задать желаемый вид переходного процесса.

Однако нахождение интегральных оценок вида

$$I_K = I + T_1^2 I' + T_2^4 I'',$$

к которым сводится вычисление интеграла (8.76), сопряжено со значительными трудностями, что ограничивает их применение.

Определение минимума интегральной оценки. Пусть требуется, исходя из минимума какой-нибудь интегральной оценки, выбрать два каких-нибудь параметра α и β заданной автоматической системы. Указанные два параметра входят в коэффициенты дифференциального уравнения системы. Прежде всего по вышеприведенным формулам находится выражение соответствующей интегральной оценки. Это выражение, если все параметры системы заданы, кроме α и β , имеет вид

$$I = I(\alpha, \beta).$$

Для определения значений α и β , соответствующих минимуму I , вычисляем частные производные по α и β и приравниваем их нулю. В результате получаем два уравнения:

$$\frac{dI(\alpha, \beta)}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dI(\alpha, \beta)}{d\beta} = 0$$

с двумя неизвестными α и β . Отсюда и определяются искомые значения параметров α и β . Чтобы убедиться в том, что это действительно минимум, а не максимум, можно вычислить значение I при полученных значениях α и β , а затем при каких-нибудь соседних. Последние должны оказаться больше. Аналогично можно поступить и при выборе нескольких параметров по минимуму интегральной оценки.

Функция $I(\alpha, \beta)$ не всегда обладает минимумом по рассматриваемым параметрам. Тогда нужно выбирать их по наименьшему значению интегральной оценки I внутри области, назначаемой из других соображений.

Важно также иметь в виду, что выражение интегральной оценки через выбираемые параметры системы в буквенном виде может в ряде случаев оказаться сложным для исследования в общем виде. В таких случаях можно поступить иначе: задавать несколько числовых значений одного из выбираемых параметров (при жестко заданных всех остальных) и вычислять для каждого из них значения I (или I_K). В результате будет видно, при каких значениях данного параметра получается $I_{\min}$ (можно для наглядности построить график величины I в зависимости от выбираемого параметра). Аналогично нужно поступить и с другими выбираемыми параметрами системы.

В конкретных расчетах всегда надо учитывать, что одновременно с таким выбором параметров нужно, во-первых, обеспечить хорошие статические свойства системы и, во-вторых, проследить, чтобы оптимальная точка не оказалась слишком близкой к границе устойчивости, так как всегда надо иметь некоторый запас устойчивости.

Рассмотрим в качестве примера дифференциальное уравнение третьего порядка

$$(a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) y(t) = b_0 \psi(t), \quad (8.77)$$

где $\psi(t)$ — входное задающее или возмущающее воздействие. Пусть входное воздействие $\psi(t) = 1(t)$. Тогда изображение по Лапласу регулируемой величины будет

$$Y(p) = \frac{b_0}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3} \frac{1}{p}.$$

Установившееся значение регулируемой величины здесь будет $y(\infty) = C = \frac{b_0}{a_3}$.

Вычислим для этого случая интегральную оценку I . Так как $n = 3$, а $m = 0$, то в соответствии с формулой (8.61) имеем

$$I = \int_0^{\infty} x^2 dt = \frac{B_0 \Delta_0}{2a_3^2 \Delta}.$$

Далее по выражению (8.62) находим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_3 & -a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_0 \\ 0 & -a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3).$$

Для нахождения Δ_0 необходимо первый столбец определителя Δ заменить на (8.63):

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_2 & -a_1 & 0 \\ a_3 & a_2 & -a_0 \\ 0 & -a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \\ = a_2 (a_1 a_2 - a_0 a_3) + a_3 a_1^2.$$

По формуле (8.64) находим единственный коэффициент $B_0 = b_0^2$.

В результате получаем значение интегральной квадратичной оценки:

$$I = \frac{b_0^2}{2a_3^2} \left(\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_1^2}{a_1 a_2 - a_0 a_3} \right). \quad (8.78)$$

Это выражение и служит для выбора параметров системы, входящих в коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 , из условия минимума величины I .

Построим диаграмму квадратичной интегральной оценки на плоскости параметров Вышнеградского A и B . Согласно § 8.7

$$a_1 = A \sqrt[3]{a_0^2 a_3}, \quad a_2 = B \sqrt[3]{a_0 a_3^2}.$$

Подставив это выражение в (8.78), получим

$$I = \frac{b_0^2}{2a_3^2} \sqrt[3]{\frac{a_0}{a_3}} \left(B + \frac{A^2}{AB-1} \right).$$

Найдем безразмерную оценку I_0 в соответствии с формулой (8.57). Подставляя значение среднегеометрического корня $\Omega_0 = \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}$ и $C = \frac{b_0}{a_3}$, получаем

$$I_0 = \frac{1}{2} \left(B + \frac{A^2}{AB-1} \right). \quad (8.79)$$

При $I_0 = \text{const}$ это дает на плоскости параметров Вышнеградского кривую

$$A^2 + (AB-1)(B-2I_0) = 0. \quad (8.80)$$

Построенные по этому уравнению кривые постоянных значений оценки I_0 нанесены на диаграмме (рис. 8.23). Там же пунктиром нанесены кривые, взятые из диаграммы Вышнеградского (рис. 8.15), показывающие области колебательного (I), монотонного (II) и аperiodического (III) процессов. Минимум интегральной оценки находим, приравнявая нулю частные

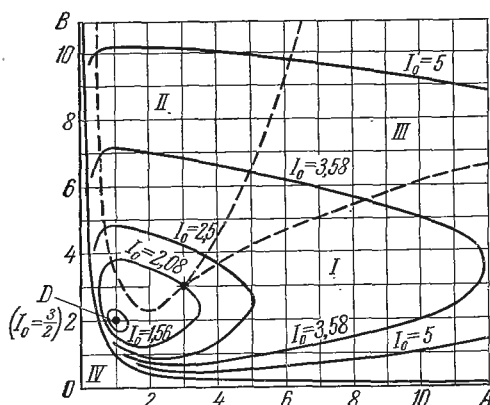


Рис. 8.23.

производные:

$$\frac{dI_0}{dA} = 0, \quad \frac{dI_0}{dB} = 0,$$

что дает

$$AB - 2 = 0, \quad (AB - 1)^2 - A^3 = 0,$$

откуда находим $A = 1$, $B = 2$. Следовательно, минимум квадратичной интегральной оценки $I_0 = 1,5$ имеет место в точке D (рис. 8.23). Эта точка лежит, однако, слишком близко к границе устойчивости, что может не обеспечить необходимого запаса устойчивости (см., например, рис. 8.18). Практически лучше брать параметры системы не точно в точке D , а несколько правее и выше.

Этот результат имеет смысл, однако, только в тех случаях, когда b_0 , a_3 , a_0 остаются постоянными, а выбираемые параметры системы входят только в коэффициенты a_1 и a_2 уравнения (8.77).

§ 8.9. Частотные критерии качества

Под частотными критериями качества будем понимать такие критерии, которые не рассматривают вида переходного процесса, а базируются на некоторых частотных свойствах системы. Частотные критерии качества особенно удобно применять при использовании частотных методов расчета, так как при этом получается наиболее простое решение задачи.

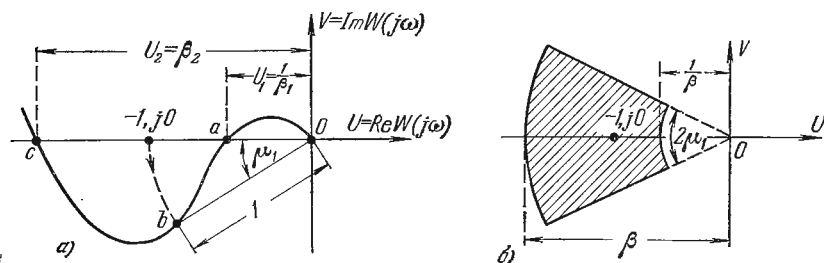


Рис. 8.24.

Частотные критерии наиболее разработаны в отношении оценки запаса устойчивости. Запас устойчивости можно определять по удалению амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы (рис. 8.24, а) от точки $(-1, j0)$. Для этой цели вводятся понятия *запаса устойчивости по амплитуде (модулю)* и *запаса устойчивости по фазе*.

Для общего случая условной устойчивости, изображенного на рис. 8.24, а, запас устойчивости по амплитуде определяется двумя точками a и c , и, соответственно, двумя величинами, выраженными обычно в децибелах:

$$L_1 = 20 \lg \beta_1 = 20 \lg \frac{1}{U_1}, \quad L_2 = 20 \lg \beta_2 = 20 \lg U_2.$$

Запас устойчивости по амплитуде тем больше, чем больше L_1 и L_2 . В хорошо демпфированных системах эти величины составляют примерно $6 \div 20$ дб, что соответствует $2 \div 10$ в линейном масштабе.

В случае абсолютной устойчивости смысл имеет только величина L_1 , так как $L_2 \rightarrow \infty$.

Запасом устойчивости по фазе называется запас по фазе $\mu = 180 + \psi$, где ψ — аргумент частотной передаточной функции разомкнутой системы,

соответствующий модулю, равному единице (точка b на рис. 8.24, a):

$$\mu_1 = 180^\circ + \psi_1;$$

сдвиг по фазе ψ_1 определяется условием

$$\psi_1 = \psi(\omega) |_{A(\omega)=1}.$$

В хорошо демпфированных системах запас по фазе составляет около $30-60^\circ$.

В некоторых случаях вместо задания дискретных точек, определяющих запас устойчивости системы регулирования (точки a , b и c на рис. 8.24, a), задают некоторую запретную область для амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы. Эта запретная область окружает точку $(-1, j0)$ и может быть построена по заданным значениям запаса устойчивости по фазе μ_1 и запаса устойчивости по модулю β (рис. 8.24, b).

Недостатком рассмотренного критерия является то, что для определения запаса устойчивости необходимо задать два числа: β и μ_1 . В этом отношении более удобно

определять запас устойчивости по *показателю колебательности*. Показателем колебательности называется максимальное значение ординаты $M_{\max}$ амплитудной характеристики замкнутой системы (см. рис. 8.25) при начальной ординате, равной единице, т. е. относительная высота резонансного пика. Физически эта характеристика представляет собой следующее. Если управляющий сигнал на входе системы регулирования меняется по закону $g = g_{\max} \sin \omega t$, то регулируемая величина в режиме установившихся вынужденных колебаний будет меняться по закону $y = y_{\max} \sin(\omega t + \psi)$. Отношение амплитуд $y_{\max}$ и $g_{\max}$ определяется модулем частотной передаточной функции замкнутой системы:

$$\frac{y_{\max}}{g_{\max}} = \text{mod } \Phi(j\omega) = \text{mod } \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)}, \quad (8.84)$$

где $W(j\omega)$ — частотная передаточная функция разомкнутой системы.

Максимальное значение этого модуля и представляет собой показатель колебательности (имеется в виду наибольший максимум)

$$M_{\max} = |\Phi(j\omega)|_{\max} = \left| \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} \right|_{\max}. \quad (8.82)$$

Как видно из этих рассуждений, показатель колебательности определяется посредством задания задающего воздействия $g = g_{\max} \sin \omega t$. В принципе возможно определение показателя колебательности системы посредством задания возмущающего воздействия $f = f_{\max} \sin \omega t$ и отыскания относительной величины резонансного пика.

Чем меньше запас устойчивости, тем больше склонность системы к колебаниям и тем выше резонансный пик. Допустимое значение показателя колебательности определяется на основании опыта эксплуатации систем регулирования. Считается, что в хорошо демпфированных системах регулирования показатель колебательности не должен превосходить значений $1,1 \div 1,5$, хотя в некоторых случаях можно допускать величины до $2 \div 2,5$.

Для отыскания показателя колебательности системы регулирования нет необходимости строить амплитудную частотную характеристику (рис. 8.25)

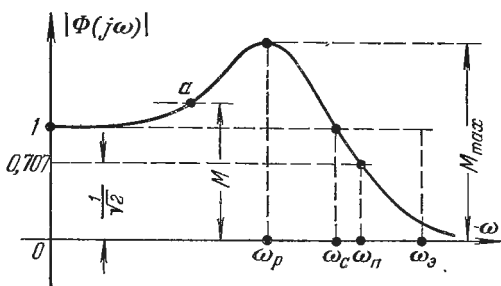


Рис. 8.25.

или отыскивать максимум (8.82). Существуют приемы, позволяющие найти показатель колебательности по виду амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы. Возьмем на амплитудной характеристике (рис. 8.25) некоторую точку a , которой соответствует ордината M , и отобразим эту точку на комплексную плоскость частотной передаточной функции разомкнутой системы. Для этого рассмотрим уравнение

$$\operatorname{mod} \Phi(j\omega) = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right| = M.$$

Сделаем подстановки $U = \operatorname{Re} W(j\omega)$ и $V = \operatorname{Im} W(j\omega)$ Тогда

$$\left| \frac{U+jV}{1+U+jV} \right| = \frac{\sqrt{U^2+V^2}}{\sqrt{(1+U)^2+V^2}} = M.$$

Возводя в квадрат правую и левую части и освобождаясь от знаменателя, после алгебраических преобразований получим

$$(U+C)^2 + V^2 = R^2, \quad (8.83)$$

где

$$C = \frac{M^2}{M^2-1}, \quad (8.84)$$

$$R = \frac{M}{M^2-1}. \quad (8.85)$$

Это есть уравнение окружности с радиусом R и с центром, смещенным влево от начала координат на величину C .

Задаваясь различными значениями M от 1 до ∞ , можно построить семейство таких окружностей (рис. 8.26). На каждой окружности написано значение ординаты амплитудной частотной характеристики. При $M=1$ окружность вырождается в прямую линию, параллельную оси ординат и проходящую слева от нее на расстоянии 0,5. При $M \rightarrow \infty$ окружность вырождается в точку, совпадающую с точкой $(-1, j0)$.

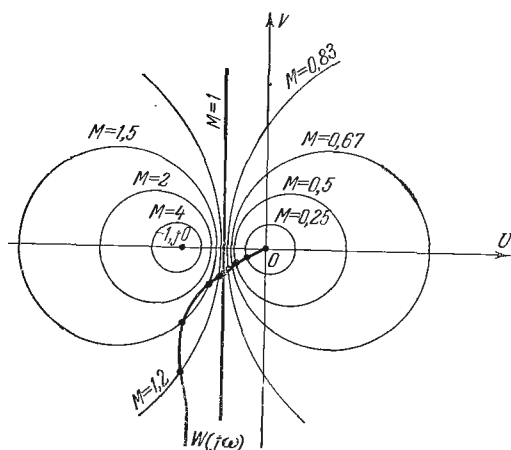


Рис. 8.26.

Для значений ординат амплитудной характеристики, лежащих в пределах $0 < M < 1$, получается семейство окружностей, расположенных справа от линии $M=1$, симметрично с первым семейством. При $M=0$ окружность вырождается в точку, совпадающую с началом координат.

Для построения амплитудной характеристики (рис. 8.25) достаточно в тех же координатах, где построены окружности $M = \text{const}$, нанести амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы. Точки пересечения этой характеристики с окружностями будут определять точки амплитудной характеристики с соответствующими значениями ординат, равными M . Для определения показателя колебательности можно не строить амплитудную характеристику, так как достаточно знать одно максимальное значение ординаты $M_{\max}$, определяемое по наименьшей окружности $M = \text{const}$, которой коснется амплитудно-фазовая характеристика.

Если при проектировании системы ставится условие, чтобы ее показатель колебательности был не больше некоторого заданного значения, например $M_{\max} = 1,5$, то для выполнения этого необходимо, чтобы амплитудно-фазовая характеристика не заходила внутрь окружности, соответствующей этому значению M (рис. 8.27). Амплитудно-фазовая характеристика может только коснуться этой окружности. В этом случае показатель колебательности будет как раз равен заданному значению $M_{\max}$.

Таким образом, окружность $M_{\max}$ является *запретной зоной* для амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы. Эта зона охватывает точку $(-1, j0)$ и обеспечивает получение заданного запаса устойчивости.

Величина показателя колебательности может быть определена и в случае использования логарифмических частотных характеристик. Для этого отобразим запретную зону (рис. 8.27) на логарифмическую сетку. Рассмотрим отдельно окружность заданного показателя колебательности (рис. 8.28).

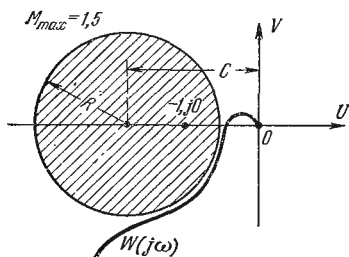


Рис. 8.27.

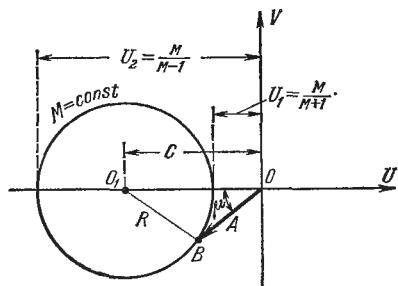


Рис. 8.28.

На окружности возьмем произвольную точку B и построим вектор, соединяющий эту точку с началом координат. Установим для этого вектора связь между его модулем A и запасом по фазе μ . Из треугольника OBO_1 по теореме косинусов находим

$$\cos \mu = \frac{A^2 + C^2 - R^2}{2AC}$$

Далее можно найти

$$C^2 - R^2 = \left(\frac{M^2}{M^2 - 1} \right)^2 - \left(\frac{M}{M^2 - 1} \right)^2 = \frac{M^2}{M^2 - 1} = C$$

и окончательно

$$\mu = \arccos \frac{A^2 + C}{2AC}. \quad (8.86)$$

Из рис. 8.28 нетрудно видеть, что зависимость (8.86) существует только для модулей, лежащих в пределах

$$\frac{M}{M+1} < A < \frac{M}{M-1}. \quad (8.87)$$

В случае, когда $A < \frac{M}{M+1}$ или $A > \frac{M}{M-1}$, запас по фазе может быть любым, так как в этом случае конец вектора не может попасть в запретную зону (рис. 8.28).

Задавая различные значения показателя $M = \text{const}$, а следовательно и $C = \text{const}$ (8.84), по выражению (8.86) можно построить графики $\mu = f(A)$, которые носят название μ -кривых. Эти графики строятся обычно таким образом, что модуль A откладывается в децибелах (рис. 8.29).

Из выражения (8.86) можно найти, в частности, максимальный запас по фазе обычным методом отыскания максимума:

$$\mu_{\max} = \arccos \frac{1}{\sqrt{C}} = \arccos \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M}. \quad (8.88)$$

Этот максимум получается, когда модуль $A = \sqrt{C}$. Если имеется построенная л. а. х. (рис. 8.30), то по имеющимся μ -кривым и при заданном значении

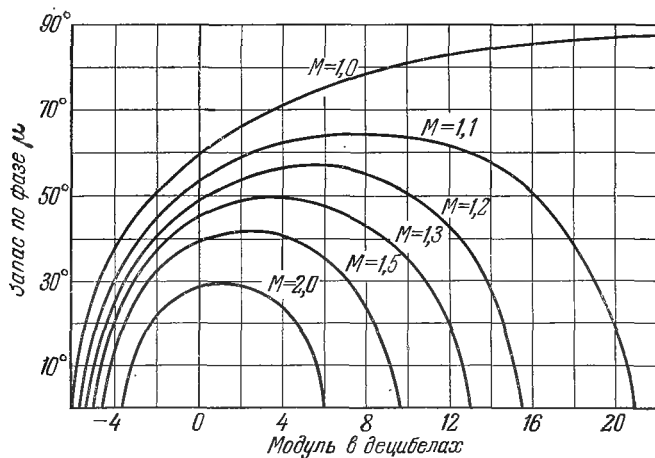


Рис. 8.29.

M можно построить требуемое значение запаса по фазе для каждого значения модуля. Это построение должно делаться для модулей, лежащих в пределах (8.87). В результате будет

получена запретная область для фазовой характеристики. Чтобы показатель колебательности был не больше заданного значения, фазовая характеристика не должна заходить в эту область. Нетрудно видеть, что определение качественного показателя, характеризующего запас устойчивости, делается здесь одновременно с определением устойчивости.

Удобство показателя колебательности определяется также тем, что запас устойчивости характеризуется здесь одним числом, имеющим для достаточно

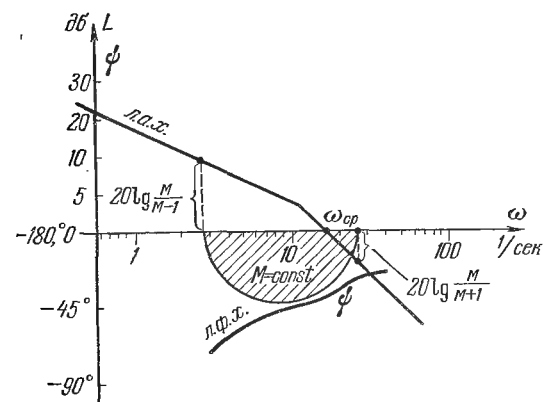


Рис. 8.30.

широкого класса систем регулирования сравнительно узкие пределы (1,1 ÷ 1,5).

Оценка быстродействия может производиться по частотным характеристикам замкнутой и разомкнутой системы. При рассмотрении замкнутой системы обычно используется амплитудная частотная характеристика (рис. 8.25) или вещественная характеристика (рис. 8.6). Использование вещественной характеристики было рассмотрено выше (см. § 8.5).

Для оценки быстродействия по амплитудной частотной характеристике (рис. 8.25) могут использоваться следующие величины:

- ω_p — резонансная частота, соответствующая пику а. ч. х.;
- ω_n — частота, соответствующая полосе пропускания замкнутой системы и определяемая из условия $A(\omega_n) = 0,707$;
- ω_c — частота среза, соответствующая условию $A(\omega_c) = 1$;
- ω_0 — эквивалентная полоса пропускания замкнутой системы, определяемая по выражению

$$\omega_0 = \int_0^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega, \quad (8.89)$$

где $|\Phi(j\omega)| = A(\omega)$.

Эквивалентная полоса пропускания представляет собой основание прямоугольника (рис. 8.25), высота которого равна единице, а площадь равна площади под кривой квадратов модуля $\Phi(j\omega)$. Понятие эквивалентной полосы пропускания тесно связано с вопросом пропускания системой помех, что будет рассмотрено в главе 11.

В отличие от показателя колебательности, который является некоторой безразмерной характеристикой и лежит в сравнительно узких пределах, приведенные выше характерные частоты, определяющие быстродействие системы, имеют размерность и их допустимые значения могут сильно меняться в зависимости от типа и назначения системы регулирования. Здесь наблюдается полная аналогия с критериями качества, основанными на рассмотрении кривых переходного процесса. Допустимое значение перерегулирования $\sigma\%$ (рис. 8.3) лежит в сравнительно узких пределах для систем самого различного назначения, а допустимое время переходного процесса t_n может меняться от долей секунды до нескольких часов и более.

Допустимые для данной системы регулирования значения ω_p , ω_n , ω_c или ω_0 должны устанавливаться для каждой конкретной системы на основе изучения условий ее эксплуатации. При этом характеризовать быстродействие системы может как вся совокупность указанных выше величин, так и каждая из них в отдельности.

При определении быстродействия по частотной передаточной функции $W(j\omega)$ разомкнутой системы может использоваться частота среза ω_{cr} , которая определяется из условия равенства модуля единице $\text{mod } W(j\omega_{cr}) = 1$ или $L(\omega_{cr}) = 0$. Эта частота показана, например, на рис. 8.2 и 8.30.

Определение частоты среза разомкнутой системы может быть сделано на диаграмме, изображенной на рис. 8.26, по точке пересечения а. ф. х. с окружностью единичного радиуса, центр которой расположен в начале координат.

Резонансная частота замкнутой системы ω_p близка к частоте колебаний системы в переходном процессе. Значение ω_p может быть приближенно определено по точке а. ф. х. (рис. 8.26), которая ближе всего расположена к точке $(-1, j0)$.

Частота среза ω_{cr} во многих случаях близка к резонансной частоте системы ω_p .

Удобной и наглядной мерой быстродействия системы является также частота ω_k (рис. 8.2), при которой задающее воздействие вида $g = g_{\max} \sin \omega_k t$ отрабатывается системой с амплитудой ошибки не более $x_{\max}$.

Хотя приведенные выше частотные критерии запаса устойчивости и быстродействия могут рассматриваться независимо от свойств системы регулирования во временной области, представляется полезным провести некоторое приближенное сопоставление частотных и временных характеристик.

Если показатель колебательности $M > 1$, то замкнутую систему регулирования можно аппроксимировать колебательным звеном (см. § 4.5). Тогда

передаточная функция замкнутой системы может быть представлена в виде

$$\Phi(p) = \frac{1}{1 + 2\zeta T p + T^2 p^2}. \quad (8.90)$$

Для этой передаточной функции сравнительно просто найти, как зависят величины, которые определяют запас устойчивости: перерегулирование $\sigma\%$, показатель колебательности M и запас устойчивости по фазе μ_1 , от параметра

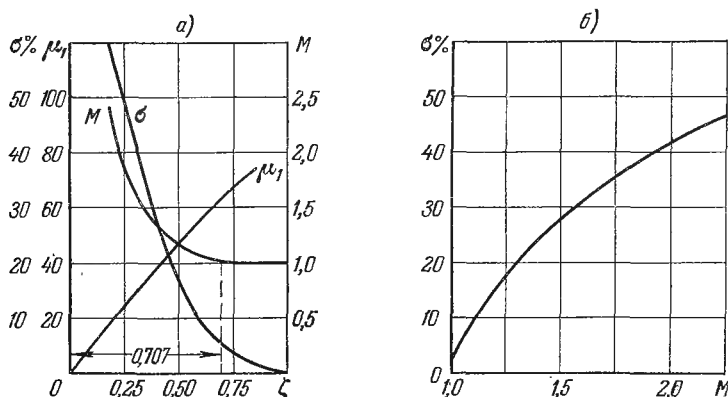


Рис. 8.31.

затухания ζ . Соответствующие кривые приведены на рис. 8.31, а. На рис. 8.31, б дается зависимость между перерегулированием $\sigma\%$ и показателем колебательности M для той же передаточной функции (8.90).

Кривые, приведенные на рис. 8.31, в некоторой мере характеризуют связь между показателями качества и в более сложных случаях, чем выражение (8.90).

Так как резонансная частота ω_p приблизительно соответствует частоте колебаний замкнутой системы в переходном процессе, то время достижения первого максимума t_m на переходной характеристике (рис. 8.3) может быть определено по приближенной зависимости

$$t_m \approx \frac{\pi}{\omega_p} \approx \frac{\pi}{\omega_{cp}}. \quad (8.91)$$

Если переходный процесс в системе заканчивается за 1—2 колебания, то время переходного процесса можно определить по приближенной зависимости

$$t_n \approx (1 \div 2) \frac{2\pi}{\omega_p} \approx (1 \div 2) \frac{2\pi}{\omega_{cp}}. \quad (8.92)$$

Сравнение формул (8.71) и (8.89) показывает, что эквивалентная полоса пропускания ω_Φ совпадает с точностью до постоянного множителя с интегральной квадратичной оценкой I' , определяемой формулами (8.67) и (8.68). Совпадение будет полным, если рассматривать всю эквивалентную полосу пропускания от $-\omega_\Phi = -2\pi f_\Phi$ до $+\omega_\Phi = 2\pi f_\Phi$ и измерять ее в герцах. Тогда получаем

$$\Delta f_\Phi = 2f_\Phi = \frac{2\omega_\Phi}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |\Phi(j\omega)|^2 d\omega = I'. \quad (8.93)$$

§ 8.10. Чувствительность систем регулирования

Действительные значения параметров системы регулирования практически всегда отличаются от расчетных. Это может вызываться неточностью изготовления отдельных элементов, изменением параметров в процессе хранения и эксплуатации, изменением внешних условий и т. д.

Изменение параметров может привести к изменению статических и динамических свойств системы регулирования. Это обстоятельство желательно учесть заранее в процессе проектирования и настройки системы.

Степень влияния изменения отдельных параметров на различные характеристики системы оценивается посредством чувствительности. *Чувствительностью* называется некоторый показатель, характеризующий свойство системы изменять режим работы при отклонении того или иного ее параметра от номинального, или исходного, значения. В качестве оценки чувствительности используются так называемые *функции чувствительности*, представляющие собой частные производные i -й координаты системы по вариации j -го параметра,

$$u_{ij} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right)^0, \quad (8.94)$$

или частные производные от используемого критерия качества I по j -му параметру,

$$U_j = \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha_j} \right)^0. \quad (8.95)$$

Нулевым индексом сверху отмечено то обстоятельство, что частные производные должны приниматься равными значениям, соответствующим номинальным (расчетным) параметрам.

Функции чувствительности временных характеристик. Посредством этих функций чувствительности оценивается влияние малых отклонений параметров системы от расчетных значений на временные характеристики системы (переходную функцию, функцию веса и др.).

Исходной системой называют систему, у которой все параметры равны расчетным значениям и не имеют вариаций. Этой системе соответствует так называемое *основное движение*.

Варьированной системой называют такую систему, у которой произошли вариации параметров. Движение ее называют *варьированным движением*.

Дополнительным движением называют разность между варьированным и основным движением.

Пусть исходная система описывается совокупностью нелинейных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8.96)$$

Рассмотрим мгновенные вариации параметров $\Delta \alpha_j$ ($j = 1, \dots, m$), так что параметры приняли значения $\alpha_j + \Delta \alpha_j$. Если изменения параметров не вызывают изменения порядка дифференциального уравнения, то варьированное движение будет описываться совокупностью уравнений

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \tilde{F}_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \alpha_1 + \Delta \alpha_1, \dots, \alpha_m + \Delta \alpha_m) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8.97)$$

Для дополнительного движения можно записать

$$\Delta x_i(t) = \tilde{x}_i(t) - x_i(t). \quad (8.98)$$

При условии дифференцируемости $\tilde{x}_i(t)$ и $x_i(t)$ по параметрам α_j ($j = 1, \dots, m$) дополнительное движение можно разложить в ряд Тейлора.

Для малых вариаций параметров допустимо ограничиться линейными членами разложения. Тогда получим уравнения первого приближения для дополнительного движения

$$\Delta x_i(t, \Delta \alpha_1, \dots, \Delta \alpha_m) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right)^0 \Delta \alpha_j = \sum_{j=1}^m u_{ij} \Delta \alpha_j. \quad (8.99)$$

Частные производные, находящиеся в скобках, должны быть равны их значениям при $\Delta \alpha_j = 0$.

Таким образом, первое приближение для дополнительного движения может быть найдено при известных функциях чувствительности. Заметим, что использование функций чувствительности удобнее для нахождения дополнительного движения по сравнению с прямой формулой (8.98), так как последняя во многих случаях может дать большие ошибки вследствие необходимости вычитать две близкие величины.

При значительных вариациях $\Delta \alpha_j$ может оказаться необходимым использование второго приближения с удерживанием в ряде Тейлора, кроме линейных, также и квадратичных членов.

Дифференцирование исходных уравнений (8.96) по α_j приводит к так называемым *уравнениям чувствительности*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right) = \frac{du_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_k} u_{kj} + \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_j} \quad (i=1, 2, \dots, n; \quad j=1, 2, \dots, m). \quad (8.100)$$

Решение этих уравнений дает функции чувствительности u_{ij} . Однако уравнения (8.100) оказываются сложными и решение их затруднительно. Более целесообразен путь структурного построения модели, используемой для нахождения функций чувствительности [21, 53, 111].

Обратимся теперь к линейным системам. Не снижая общности рассуждений, можно рассматривать случай изменения одного j -го параметра.

В некоторых случаях функции чувствительности получаются дифференцированием известной функции времени на выходе системы. Так, если передаточная функция системы соответствует аperiodическому звену второго порядка, то (см. табл. 4.2)

$$y(t) = \frac{1}{(1+T_3 p)(1+T_4 p)} \cdot g(t).$$

При поступлении на вход ступенчатой функции $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$ на выходе будет

$$y(t) = g_0 \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \cdot 1(t).$$

Пусть, например, вариацию претерпевает постоянная времени T_3 . Тогда дифференцирование последнего выражения по T_3 даст функцию чувствительности по этому параметру

$$u(t) = \frac{\partial y(t)}{\partial T_3} = \frac{[(T_3 - T_4) t - T_3 T_4] e^{-\frac{t}{T_3}} - T_3 T_4 e^{-\frac{t}{T_4}}}{T_3 (T_3 - T_4)^2} \cdot g_0 \cdot 1(t).$$

Дополнительное движение при этом будет $\Delta y(t) = u(t) \Delta T_3$, где ΔT_3 — вариация постоянной времени T_3 .

Пусть рассматриваемая система описывается совокупностью уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{q=1}^l b_{iq} f_q(t) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (8.101)$$

где a_{ih} и b_{iq} — постоянные коэффициенты, x_i — фазовые координаты, а $f_q(t)$ — внешние воздействия. Начальные условия в системе: при $t = 0$ $x_i = x_i^0$ ($i = 1, \dots, n$). Уравнения чувствительности получаются из (8.101) дифференцированием по варьируемому параметру α_j , от которого могут зависеть коэффициенты a_{ih} и b_{iq} :

$$\frac{du_{ij}}{dt} = \sum_{h=1}^n a_{ih} u_{hj} + \sum_{h=1}^n c_{ih} x_h + \sum_{q=1}^l d_{iq} f_q(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (8.102)$$

где $c_{ih} = \frac{\partial a_{ih}}{\partial \alpha_j}$ и $d_{iq} = \frac{\partial b_{iq}}{\partial \alpha_j}$ — частные производные от коэффициентов системы уравнений (8.101) по варьируемому параметру α_j . Уравнениям (8.102) соответствуют начальные условия $u_{ij}^0 = \frac{\partial x_i^0}{\partial \alpha_j}$ ($i = 1, \dots, n$). Если начальные условия x_i^0 не зависят от параметра α_j , то уравнениям (8.102) соответствуют нулевые начальные условия.

Для решения (8.102) необходимо предварительно решить совокупность уравнений (8.101) и определить исходное движение $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$).

Для нахождения функций чувствительности и дополнительного движения удобно использовать передаточные функции системы. Пусть, например, регулируемая величина $y(t, \alpha_j)$ связана с задающим воздействием зависимостью

$$y(t, \alpha_j) = L^{-1} [Y(p, \alpha_j)] = L^{-1} [\Phi(p, \alpha_j) G(p)], \quad (8.103)$$

где $G(p)$ — изображение задающего воздействия.

Функция чувствительности может быть получена из (8.103) дифференцированием по параметру α_j :

$$\begin{aligned} u_j(t) &= \frac{\partial y(t, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} = L^{-1} \left[\frac{\partial Y(p, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \right] = \\ &= L^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(p, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} G(p) \right] = L^{-1} [S_j(p) G(p)]. \end{aligned} \quad (8.104)$$

Здесь введена функция чувствительности передаточной функции

$$S_j(p) = \left[\frac{\partial \Phi(p, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \right]^0, \quad (8.105)$$

которая определяет первое приближение дополнительной передаточной функции, равной разности варьируемой и исходной передаточных функций при вариации параметра α_j :

$$\Delta \Phi_j(p, \alpha_j) = \tilde{\Phi}(p, \alpha_j) - \Phi(p, \alpha_j) = S_j(p) \Delta \alpha_j. \quad (8.106)$$

Эти зависимости справедливы в том случае, когда вариация параметра α_j не меняет порядка характеристического уравнения системы.

Может также использоваться так называемая *логарифмическая функция чувствительности*

$$\sigma_j^L(p) = \frac{\partial \Phi(p, \alpha_j)}{\Phi(p, \alpha_j)} \cdot \frac{\partial \alpha_j}{\alpha_j} = \frac{\partial \ln \Phi(p, \alpha_j)}{\partial \ln \alpha_j} = \frac{\alpha_j}{\Phi(p, \alpha_j)} S_j(p). \quad (8.107)$$

Формула (8.107), строго говоря, может использоваться в тех случаях, когда $\Phi(p, \alpha_j)$ и α_j представляют собой безразмерные величины. Если эти величины размерны, то их логарифмирование возможно, если использовать прием, указанный в § 4.4.

Найдем дополнительную передаточную функцию для случая, когда исходная передаточная функция может быть представлена в виде отношения

двух полиномов:

$$\Delta\Phi_j(p) = S_j(p) \Delta\alpha_j = \frac{\partial\Phi(p, \alpha_j)}{\partial\alpha_j} \Delta\alpha_j = \frac{\partial}{\partial\alpha_j} \frac{R(p, \alpha_j)}{D(p, \alpha_j)} \Delta\alpha_j = \frac{1}{D(p, \alpha_j)} [\Delta R(p) - \Phi(p, \alpha_j) \Delta D(p)], \quad (8.108)$$

где $\Delta R(p)$ и $\Delta D(p)$ — вариации полиномов числителя и знаменателя передаточной функции.

Формула (8.108) позволяет составить структурную схему модели чувствительности в виде, изображенном на рис. 8.32. Эта схема может быть использована для нахождения функции дополнительного движения $\Delta y(t)$ или функции чувствительности $u(t) = \Delta y(t) : \Delta\alpha_j$ расчетным путем или моделированием на ЭВМ.

Составим, например, модель чувствительности для передаточной функции замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{K(1+\tau p)}{K+K\tau p+p^2} \quad (8.109)$$

Рис. 8.32.

при вариации параметра τ . В соответствии с изложенным находим $\Delta R(p) = \Delta D(p) = Kp \Delta\tau$. Равенство приращений числителя и знаменателя $\Phi(p)$ позволяет упростить схему модели. Она изображена на рис. 8.33, а в исходном, а на рис. 8.33, б — в преобразованном виде.

В общем случае, когда передаточная функция зависит от ряда варьируемых параметров, дополнительная передаточная функция

$$\Delta\Phi(p, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \approx \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial\Phi(p, \alpha_1, \dots, \alpha_m)}{\partial\alpha_j} \right] \Delta\alpha_j = \sum_{j=1}^m S_j(p) \Delta\alpha_j. \quad (8.110)$$

Если к системе приложено несколько внешних воздействий $[g(t), f_1(t), \dots, f_l(t)]$, то следует найти дополнительные передаточные функции для всех исходных передаточных функций, определенных для каждого внешнего воздействия.

Функции чувствительности критериев качества. Если в системе произошли изменения ряда параметров $\Delta\alpha_j$ ($j = 1, \dots, m$), то результирующее изменение некоторой используемой оценки качества

$$\Delta I = \tilde{I} - I, \quad (8.114)$$

где $\tilde{I}$ — варьированное значение оценки качества, а I — ее исходное значение, можно подсчитать по формуле полного дифференциала

$$\Delta I \approx \sum_{j=1}^m U_j \Delta\alpha_j. \quad (8.112)$$

Так как в большинстве случаев известны только вероятностные оценки вариаций $\Delta\alpha_j$, то целесообразно использование вероятностных методов. Так, если известны максимальные возможные отклонения $\Delta\alpha_{j\max}$, то при их независимости друг от друга можно найти среднеквадратичный максимум

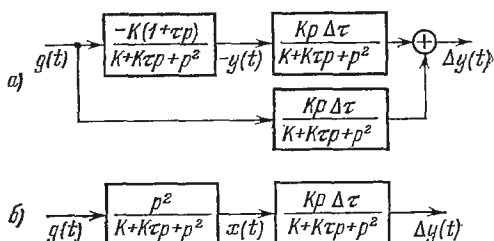


Рис. 8.33.

отклонения оценки качества

$$\Delta I_{\max} = \sqrt{\sum_{j=1}^m (U_j \Delta \alpha_{j\max})^2} \quad (8.113)$$

и среднеквадратичный относительный максимум

$$\Delta_{\max} = \frac{\Delta I_{\max}}{I}. \quad (8.114)$$

Если заданы дисперсии отклонений параметров $D_j = M[(\Delta \alpha_j)^2]$ и отклонения независимы, то можно найти дисперсию оценки качества

$$D_I = \sum_{j=1}^m U_j^2 D_j. \quad (8.115)$$

В качестве критериев оценки качества системы могут использоваться, например, максимум ошибки, коэффициенты ошибок, оценки запаса устойчивости и быстродействия, интегральные оценки и т. п.

П р и м е р. Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}.$$

Требуется определить среднеквадратичный максимум отклонения показателя колебательности, если $K = 100 \pm 10 \text{ сек}^{-1}$ и $T = 0,03 \pm 0,01 \text{ сек}$, причем изменения параметров независимы.

Определим вначале исходное значение показателя колебательности. Для этого необходимо найти максимум модуля частотной передаточной функции замкнутой системы

$$M = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|_{\max} = \frac{K}{|K+j\omega+T(j\omega)^2|}.$$

Исследование на максимум дает: при $KT \leq 2$ показатель колебательности $M = 1$, при $KT > 2$ показатель колебательности

$$M = \frac{2KT}{\sqrt{4KT-1}} = \frac{2 \cdot 100 \cdot 0,03}{\sqrt{4 \cdot 100 \cdot 0,03 - 1}} = 1,8.$$

Функции чувствительности, если $\alpha_1 = K$ и $\alpha_2 = T$,

$$U_1 = \left(\frac{\partial M}{\partial K} \right)^0 = \left[\frac{2T(2KT-1)}{(4KT-1)^{3/2}} \right]^0 = 0,005 \text{ сек},$$

$$U_2 = \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)^0 = \left[\frac{2K(2KT-1)}{(4KT-1)^{3/2}} \right]^0 = 16,7 \text{ сек}^{-1}.$$

Среднеквадратичный максимум отклонения (8.113)

$$\Delta M_{\max} = \sqrt{(0,005 \cdot 10)^2 + (16,7 \cdot 0,01)^2} = 0,175.$$

Таким образом, в рассматриваемой системе показатель колебательности $M = 1,8 \pm 0,175$.

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 9.1. Общие методы

К числу общих методов повышения точности систем автоматического регулирования относятся:

- 1) увеличение коэффициента усиления разомкнутой цепи;
- 2) повышение степени астатизма;
- 3) применение регулирования по производным от ошибки.

Увеличение общего коэффициента усиления разомкнутой цепи является наиболее универсальным и эффективным методом. Увеличить общий коэффициент усиления можно обычно за счет введения в систему регулирования усилителей. Однако в некоторых случаях удастся достичь этого увеличения за счет повышения коэффициентов передачи отдельных звеньев, например чувствительных элементов, редукторов и т. д.

Увеличение общего коэффициента усиления благоприятно сказывается в смысле уменьшения ошибок практически во всех типовых режимах. Это вытекает, в частности, из того, что общий коэффициент усиления разомкнутой цепи входит в качестве делителя во все коэффициенты ошибок (см. пример, рассмотренный в § 8.3).

Однако увеличение общего коэффициента усиления ограничивается устойчивостью системы регулирования. При повышении коэффициента усиления, как правило, система приближается к колебательной границе устойчивости. При некотором предельном его значении в системе возникают незатухающие колебания. В этом сказывается противоречие между требованиями к точности и требованиями к устойчивости системы регулирования.

В связи с этим повышение общего коэффициента усиления до значения, при котором обеспечивается выполнение требований к точности, обычно может производиться только при одновременном повышении запаса устойчивости системы, что осуществляется при помощи так называемых корректирующих средств, рассматриваемых в следующей главе.

Повышение порядка астатизма. Повышение порядка астатизма используется для устранения установившихся ошибок в различных типовых режимах: в неподвижном положении, при движении с постоянной скоростью, при движении с постоянным ускорением и т. д. Формально это сводится к тому, чтобы сделать равными нулю первые коэффициенты ошибки системы, например, $c_0 = 0$ при астатизме первого порядка, или $c_0 = c_1 = 0$ при астатизме второго порядка, или $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ при астатизме третьего порядка и т. д. Физически повышение порядка астатизма осуществляется за счет введения в канал регулирования интегрирующих звеньев. В качестве таких звеньев могут, например, использоваться звенья, изображенные на рис. 4.21. Структурная схема системы регулирования с введенным инте-

грирующим звеном изображена на рис. 9.1. Передаточная функция интегрирующего звена

$$W_{\text{и}}(p) = \frac{k_{\text{и}}}{p},$$

где $k_{\text{и}} \left[\frac{1}{\text{сек}} \right]$ — коэффициент передачи интегрирующего звена. $W(p)$ представляет собой передаточную функцию разомкнутой системы регулирования до введения интегрирующего звена.

Результирующая передаточная функция разомкнутой системы будет иметь дополнительный множитель p в знаменателе:

$$W_{\text{в}}(p) = \frac{k_{\text{и}} W(p)}{p}.$$

Повышение порядка астатизма неблагоприятно сказывается на устойчивости системы. Поэтому одновременно с повышением порядка астатизма в системе автоматического регулирования приходится использовать корректирующие звенья, повышающие запас устойчивости (см. главу 10).

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим систему, изображенную на рис. 6.4. Для нее была получена передаточная функция разомкнутой системы в виде

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_{\text{yp}}p)(1+T_{\text{мп}}p)}, \quad (9.1)$$

которая соответствует астатизму первого порядка.

В соответствии с примером, рассмотренным в § 8.3, первые коэффициенты ошибки можно записать следующим образом (если положить $T_{\text{y}} = T_1$, $T_{\text{м}} = T_2$ и $K = K_v$):

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= 0, \\ c_1 &= \frac{1}{K}, \\ \frac{c_2}{2} &= \frac{T_{\text{y}} + T_{\text{м}}}{K} - \frac{1}{K^2}, \\ \frac{c_3}{6} &= \frac{T_{\text{y}} T_{\text{м}}}{K} - 2 \frac{T_{\text{y}} + T_{\text{м}}}{K^2} + \frac{1}{K^3}. \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Введем в систему интегрирующее звено, например интегрирующий привод. Соответствующая этому случаю электромеханическая схема изображена на рис. 9.2. В этой схеме приняты следующие условные обозначения: СКВТ — синусно-косинусные вращающиеся трансформаторы, ЛВТ — линейный вращающийся трансформатор, Д — двигатели, Р — редукторы, ТГ — тахогенератор. Передаточная функция исходной системы без интегрирующего звена (9.1) была выведена в § 6.2. Передаточная функция разомкнутой системы, изображенной на рис. 9.2, будет отличаться от (9.1) наличием дополнительного множителя $k_{\text{и}}/p$, который дает интегрирующее звено. В результате получим передаточную функцию разомкнутой системы в виде

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_{\text{yp}}p)(1+T_{\text{мп}}p)} \frac{k_{\text{и}}}{p} = \frac{K_{\text{е}}}{p^2(1+T_{\text{yp}}p)(1+T_{\text{мп}}p)}, \quad (9.3)$$

где $K_{\text{е}} = k_{\text{и}} K \left[\frac{1}{\text{сек}^2} \right]$ — добротность системы по ускорению.

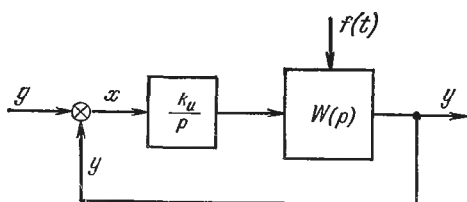


Рис. 9.1.

Эта передаточная функция соответствует уже астатизму второго порядка. Передаточная функция системы по ошибке

$$\Phi_{\Phi}(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{p^2(1+T_y p)(1+T_m p)}{p^2(1+T_y p)(1+T_m p) + K_e}. \quad (9.4)$$

Раскладывая эту функцию в ряд делением числителя на знаменатель, получаем вместо (9.2) следующие равенства для коэффициентов ошибок:

$$c_0 = c_1 = 0, \quad \frac{c_2}{2} = \frac{1}{K_e}, \quad \frac{c_3}{6} = \frac{T_y + T_m}{K_e}. \quad (9.5)$$

Сравнивая (9.5) с (9.2), можно заметить, что в результате введения интегрирующего звена вследствие повышения порядка астатизма получено условие $c_1 = 0$, и, следовательно, будет равна нулю скоростная составляющая ошибки.

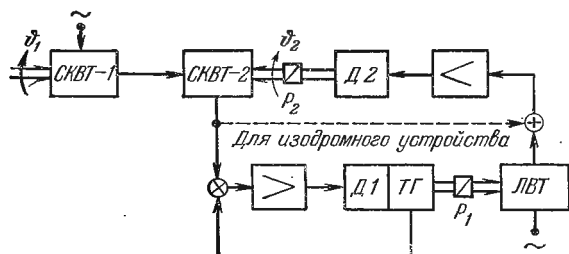


Рис. 9.2.

Однако, если проверить теперь систему на устойчивость, можно убедиться, что система вообще не может работать, так как получить устойчивую работу нельзя ни при каком значении общего коэффициента усиления K_e .

Это называется структурной неустойчивостью. Действительно, передаточной функции (9.3) соответствует характеристическое уравнение

$$T_y T_m p^4 + (T_y + T_m) p^3 + p^2 + K_e = 0,$$

в котором отсутствует член, содержащий оператор в первой степени. Пропуск одного из членов в характеристическом уравнении всегда соответствует неустойчивости в соответствии с § 6.1.

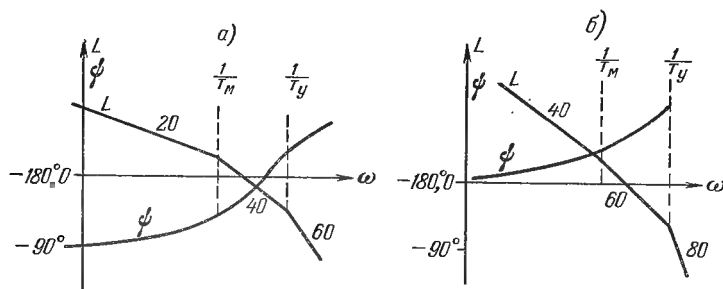


Рис. 9.3.

Появление неустойчивости в рассматриваемой системе при повышении порядка астатизма можно проиллюстрировать на логарифмических характеристиках. Логарифмические характеристики для передаточной функции (9.4) построены на рис. 9.3 по выражениям:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K_{\Omega}}{\omega \sqrt{1+\omega^2 T_y^2} \sqrt{1+\omega^2 T_m^2}}, \quad (9.6)$$

$$\psi = -90^\circ - \arctg \omega T_y - \arctg \omega T_m. \quad (9.7)$$

Логарифмические характеристики для передаточной функции (9.3) построены на рис. 9.3 по выражениям:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K_{\text{сг}}}{\omega^2 \sqrt{1 + \omega^2 T_y^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_m^2}}, \quad (9.8)$$

$$\varphi(\omega) = -180^\circ - \arctg \omega T_y - \arctg \omega T_m. \quad (9.9)$$

Сравнение рис. 9.3, а и 9.3, б, а также формул (9.7) и (9.9) показывает, что введение интегрирующего элемента дает дополнительный фазовый сдвиг (-90°), в результате чего в рассматриваемой схеме нельзя добиться устойчивой работы ни при каком значении общего коэффициента усиления. Однако это не означает, что схема является вообще неработоспособной. Введение в нее корректирующих средств (см. главу 10) позволяет не только достичь устойчивости, но и обеспечить определенный запас устойчивости, т. е. выполнить требования к качеству процесса регулирования.

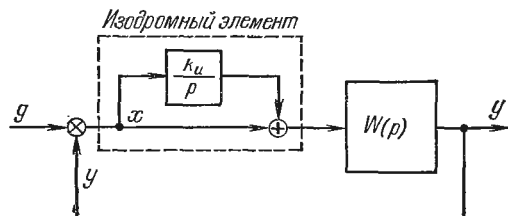


Рис. 9.4.

Применение изодромных устройств. Существует путь повышения порядка астатизма системы регулирования без заметного или недопустимого ухудшения ее запаса устойчивости. Этот путь заключается в применении изодромных устройств, например таких, как изображенные на рис. 4.22. Структурная схема системы регулирования при введении изодромного устройства изображена на рис. 9.4. Передаточная функция изодромного устройства может быть представлена в виде

$$W_{\text{из}}(p) = 1 + \frac{k_{\text{из}}}{p} = \frac{k_{\text{из}}(1 + T_{\text{из}}p)}{p}, \quad (9.10)$$

где $T_{\text{из}} = \frac{1}{k_{\text{из}}}$ — постоянная времени изодромного устройства.

Пример введения изодромного устройства показан на рис. 9.5. На рис. 9.5, а изображен чувствительный элемент регулятора давления

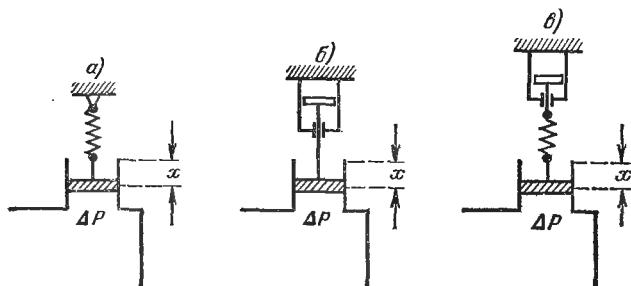


Рис. 9.5.

с противодействующей пружиной. Если не учитывать массу движущихся частей, то перемещение чувствительного элемента будет пропорциональным отклонению давления от заданного значения:

$$x = k_1 \Delta P, \quad (9.11)$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности, определяемый жесткостью пружины.

На рис. 9.5, б изображен тот же элемент, но с противодействующим демпфером. Так как сила, развиваемая демпфером, пропорциональна скорости перемещения его поршня, то в этом случае будет иметь место соотношение $p x = k_2 \Delta P$. Вместо (5.11) получим

$$x = \frac{k_2}{p} \Delta P, \quad (9.12)$$

где k_2 — коэффициент, определяемый скоростным сопротивлением демпфера.

Равенство (9.12) соответствует введению интеграла в закон регулирования.

Наконец, в случае, изображенном на рис. 9.5, в, перемещение чувствительного элемента будет складываться из деформации пружины и перемещения поршня демпфера:

$$x = \left(k_1 + \frac{k_2}{p} \right) \Delta P = \frac{k_2 (1 + T_{\text{и}} p)}{p} \Delta P, \quad (9.13)$$

где $T_{\text{и}} = \frac{k_1}{k_2}$ — постоянная времени изодромного устройства.

В качестве второго примера рассмотрим приведенную выше схему следящей системы (рис. 9.2). Переход от введения дополнительного интеграла к введению изодромного устройства может быть сделан добавлением связи, показанной пунктиром. Передаточная функция разомкнутой системы может быть получена умножением (9.1) на передаточную функцию изодромного устройства.

В результате для рассматриваемой схемы получим:

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_{\text{у}}p)(1+T_{\text{м}}p)} \frac{k_{\text{и}}(1+T_{\text{и}}p)}{p} = \frac{K_{\text{е}}(1+T_{\text{и}}p)}{p^2(1+T_{\text{у}}p)(1+T_{\text{м}}p)}, \quad (9.14)$$

где $K_{\text{е}} = k_{\text{и}}K [1/\text{сек}^2]$ — добротность системы по ускорению.

Коэффициенты ошибки определяются равенствами:

$$c_0 = c_1 = 0, \quad \frac{c_2}{2} = \frac{1}{K_{\text{е}}}, \quad \frac{c_3}{6} = \frac{[T_{\text{у}} + T_{\text{м}} - T_{\text{и}}]}{K_{\text{е}}}. \quad (9.15)$$

Рассматривая характеристическое уравнение системы

$$T_{\text{у}} T_{\text{м}} p^4 + (T_{\text{у}} + T_{\text{м}}) p^3 + p^2 + K_{\text{е}} T_{\text{и}} p + K_{\text{е}} = 0,$$

можно убедиться, что в системе возможно получение устойчивости при выполнении условия

$$K_{\text{е}} < \frac{T_{\text{и}}(T_{\text{у}} + T_{\text{м}}) - (T_{\text{у}} + T_{\text{м}})^2}{T_{\text{у}} T_{\text{м}} T_{\text{и}}^2} \quad (9.16)$$

или, в ином виде,

$$K = K_{\text{е}} T_{\text{и}} < \frac{[T_{\text{у}} + T_{\text{м}} - \frac{(T_{\text{у}} + T_{\text{м}})^2}{T_{\text{и}}}]}{T_{\text{у}} T_{\text{м}}}. \quad (9.17)$$

Нетрудно видеть, что при $T_{\text{и}} \rightarrow \infty$ (это будет при отсутствии интегрирующего привода в изодромном механизме) условие устойчивости переходит в неравенство

$$K < \frac{1}{T_{\text{у}}} + \frac{1}{T_{\text{м}}}, \quad (9.18)$$

которое справедливо для исходной схемы, изображенной на рис. 6.4. При достаточно больших значениях постоянной времени изодромного механизма $T_{\text{и}}$, что соответствует малому передаточному коэффициенту интегрирующего привода $k_{\text{и}} = \frac{1}{T_{\text{и}}}$, условия устойчивости (9.16) и (9.17) будут мало отличаться от условия устойчивости (9.18) исходной схемы. Таким образом, введение изодромного механизма с относительно большой постоянной времени $T_{\text{и}}$ дает повышение порядка астатизма на единицу при возможности практически сохранить условия устойчивости в системе, куда этот механизм вводится.

Это обстоятельство можно проиллюстрировать также на логарифмических частотных характеристиках (рис. 9.6). В соответствии с выражением для передаточной функции разомкнутой системы (9.14) можно записать:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 T_y^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_M^2}} \frac{k_{\text{и}} \sqrt{1 + \omega^2 T_{\text{и}}^2}}{\omega}, \quad (9.19)$$

$$\psi(\omega) = (-90^\circ - \arctg \omega T_y - \arctg \omega T_M) - 90^\circ + \arctg \omega T_{\text{и}}. \quad (9.20)$$

Сравнивая эти выражения с формулами (9.6) и (9.7) справедливыми для исходной схемы, можно заметить, что при относительно большом значении постоянной времени $T_{\text{и}}$ логарифмические характеристики системы с изодромным устройством будут иметь отличие только в низкочастотной области при $\omega < \frac{1}{T_{\text{и}}}$. Для частот $\omega > \frac{1}{T_{\text{и}}}$ дополнительный множитель в (9.19) обращается в единицу, а дополнительный фазовый сдвиг в (9.20) равен нулю. Таким образом, при $\omega > \frac{1}{T_{\text{и}}}$ логарифмические частотные характеристики системы с изодромным устройством практически не отличаются от логарифмических характеристик исходной схемы. В частности, в районе нуля децибел для л. а. х. можно получить одинаковый вид амплитудной и фазовой характеристик для обеих схем, что будет соответствовать одинаковому запасу устойчивости.

На рис. 9.6 сплошными линиями показаны л. а. х. и л. ф. х. для исходной схемы, а пунктирными — изменения, даваемые введением изодромного устройства с относительно большой постоянной времени.

Следует заметить, что введение изодромного устройства с большой постоянной времени образует систему, динамические качества которой могут оказаться сравнительно низкими. Это объясняется тем, что введение такого устройства улучшает вид амплитудной характеристики только в низкочастотной области (рис. 9.6). В результате коэффициенты ошибки, следующие за тем коэффициентом, который обращается в нуль, могут не только не уменьшиться, но даже возрасти.

В рассмотренном выше примере при введении изодромного устройства обратился в нуль коэффициент c_1 (9.15). Однако в следующие коэффициенты в качестве делителя входит добротность по ускорению $K_e = \frac{K}{T_{\text{и}}}$. При большом значении постоянной времени $T_{\text{и}}$ добротность системы по ускорению K_e получается малой и коэффициенты ошибок $c_2, c_3, \dots$ сильно возрастают.

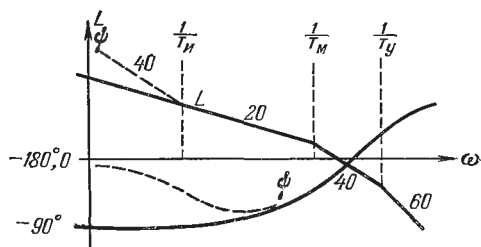


Рис. 9.6.

Для дальнейшего повышения порядка астатизма системы регулирования могут применяться не один, а два, три и т. д. изодромных устройства. В этом случае можно получить повышение порядка астатизма на один, два, три и т. д. в зависимости от необходимости. На рис. 9.7 в качестве примера приведена структурная схема системы с тремя изодромными устройствами, т. е. схема с тройным изодромиранием. Если исходная система имеет,

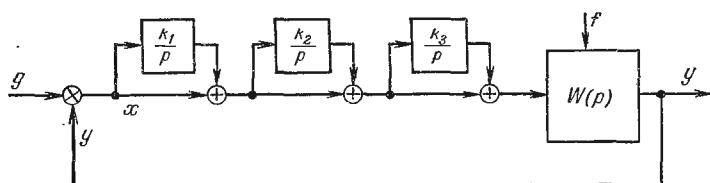


Рис. 9.7.

например, астатизм первого порядка, то система рис. 9.7 с изодромными устройствами будет обладать астатизмом четвертого порядка. В этом случае для коэффициентов ошибок будет иметь место равенство $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Как и ранее, при соответствующем выборе постоянных времени изодромных устройств $T_{и1} = \frac{1}{k_1}$, $T_{и2} = \frac{1}{k_2}$ и $T_{и3} = \frac{1}{k_3}$ можно сохранить практически те же условия устойчивости, что и в исходной системе.

Регулирование по производным от ошибки. В большинстве случаев регулирование по производным от ошибки имеет целью повысить запас

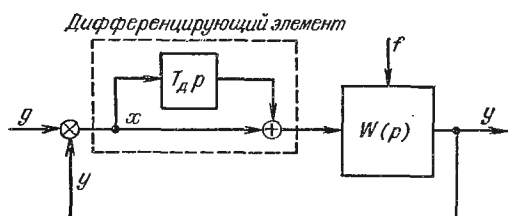


Рис. 9.8.

устойчивости системы, что позволяет увеличить общий коэффициент усиления системы и тем самым улучшить точность регулирования. Это будет рассмотрено более подробно в главе 10.

Однако регулирование по производным от ошибки может самостоятельно повышать точность системы регулирования даже в том случае, когда сохраняется неиз-

менным общий коэффициент усиления в системе. Физика этого явления заключается в том, что при введении регулирования по производным система начинает чувствовать не только наличие ошибки, но и тенденцию к изменению ее величины. В результате система регулирования более быстро реагирует на появление задающих и возмущающих воздействий, что снижает ошибку регулирования.

Структурная схема введения производной по ошибке изображена на рис. 9.8. Передаточная функция части прямого канала вместе с включенным дифференцирующим элементом может быть представлена приближенно (в предположении, что дифференцирующий элемент является идеальным) в виде

$$W_{\pi}(p) = 1 + T_{\pi}p, \quad (9.21)$$

где T_{π} — постоянная времени дифференцирующей цепи.

В качестве дифференцирующих элементов могут, например, применяться устройства, изображенные на рис. 4.23 и 4.24.

Рассмотрим в качестве примера ту же следящую систему (рис. 6.4). При введении производной от ошибки при помощи тахогенераторов, установленных на командной и исполнительных осях, электромеханическая схема

элементов, включенных друг за другом в соответствии с рис. 9.8, будет равна произведению двух передаточных функций типа (9.24):

$$W_n(p) = (1 + T_{n1}p)(1 + T_{n2}p) = 1 + \tau_1 p + \tau_2 p^2, \quad (9.25)$$

где $\tau_1 = T_{n1} + T_{n2}$ представляет собой отношение коэффициентов передачи по первой производной и по ошибке, а $\tau_2 = T_{n1}T_{n2}$ — отношение коэффициентов передачи по второй производной и по ошибке.

Как видно из рассмотренного, в отличие от случая введения изодромного устройства (см. рис. 9.4), когда обращается в нуль первый, ранее отличный от нуля коэффициент ошибки, введение дифференцирующего элемента (рис. 9.8) не влияет на этот коэффициент ошибки, но зато уменьшает последующие коэффициенты. В связи с этим наиболее эффективное снижение ошибки системы регулирования может быть достигнуто при одновременном использовании изодромных устройств и дифференцирующих элементов.

Так как дифференцирование эквивалентно дополнительному усилению верхних частот, то использование более чем двух дифференцирующих элементов оказывается затруднительным вследствие возрастания влияния высокочастотных помех. Число же изодромных устройств ограничивается только получающимся усложнением системы регулирования. Однако и оно обычно не превышает трех.

§ 9.2. Теория инвариантности и комбинированное управление

Одним из способов, позволяющих получить высокую точность в системах автоматического регулирования, является использование методов так называемой *теории инвариантности* [74, 129]. Система автоматического регулирования является *инвариантной по отношению к возмущающему воздействию*, если после завершения переходного процесса, определяемого начальными условиями, регулируемая величина и ошибка системы не зависят от этого воздействия. Система автоматического регулирования является *инвариантной по отношению к задающему воздействию*, если после завершения переходного процесса, определяемого начальными условиями, ошибка системы не зависит от этого воздействия.

Оба этих понятия имеют общую математическую трактовку. Рассмотрим эту трактовку для случая, когда на систему действует одно входное воздействие — задающее $g(t)$ или возмущающее $f(t)$. Пусть для ошибки системы регулирования имеет место дифференциальное уравнение

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) x(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) \psi(t), \quad (9.26)$$

где $\psi(t)$ — задающее или возмущающее воздействие, а $p = \frac{d}{dt}$.

Решение этого уравнения имеет две составляющие — переходную $x_n(t)$ и вынужденную $x_p(t)$. Переходная составляющая определяется общим решением уравнения (9.26) без правой части, а вынужденная — частным решением уравнения (9.26) с правой частью.

Изображение ошибки $x(t)$ при нулевых начальных условиях можно представить в следующем виде:

$$\bar{x}(p) = \frac{\bar{Q}(p)}{D(p)} \Psi(p) = \frac{\bar{Q}(p)}{D(p)} \frac{\bar{A}(p)}{\bar{B}(p)}, \quad (9.27)$$

где

$$\begin{aligned} Q(p) &= b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m, \\ D(p) &= a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n. \end{aligned}$$

Здесь введено также изображение функции времени $\psi(t)$, представляющее собой дробно-рациональную функцию комплексной величины $p = c + j\omega$

$$\Psi(p) = \frac{A(p)}{B(p)}. \quad (9.28)$$

В соответствии с теоремой разложения (см. § 7.4) оригинал (7.27) в случае отсутствия кратных корней может быть представлен в виде

$$x(t) = x_n(t) + \bar{x}_b(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t} + \sum_{i=1}^l E_i e^{p_i t}, \quad (9.29)$$

где p_k — полюсы передаточной функции, т. е. корни уравнения $D(p) = 0$, а p_i — полюсы входного воздействия, т. е. корни уравнения $B(p) = 0$.

Вынужденная составляющая $x_b(t)$ будет тождественно равна нулю в следующих случаях.

1. Если $A(p) = 0$, то $x_b(t) \equiv 0$. Этот случай является тривиальным, так как соответствует отсутствию входного воздействия, и он не представляет интереса.

2. Если $Q(p) = 0$, то также $x_b(t) \equiv 0$. Этот случай соответствует абсолютной инвариантности системы по отношению к входному воздействию $\psi(t)$, которое может быть любой функцией времени, т. е. меняться по произвольному закону.

В следящих системах при рассмотрении задающего воздействия условие $Q(p) = 0$ означает, что равна нулю передаточная функция по ошибке: $\Phi_x(p) = 0$. В иной записи это означает равенство единице передаточной функции замкнутой системы: $\Phi(p) = 1 - \Phi_x(p) = 1$. Это условие приводит к тому, что следящая система должна иметь бесконечную полосу пропускания, так как частотная передаточная функция замкнутой системы $\Phi(j\omega) = 1$ при всех частотах $0 < \omega < \infty$. В реальных системах реализовать бесконечную полосу пропускания невозможно, поэтому реализация абсолютной инвариантности по задающему воздействию сталкивается с принципиальными трудностями.

Заметим, что в случае, когда следящая система должна воспроизводить задающее воздействие в некотором масштабе k , условие абсолютной инвариантности запишется в виде $\Phi(p) = k$. Однако это не меняет существа дела.

При рассмотрении возмущающего воздействия условие $Q(p) = 0$ означает равенство нулю передаточной функции по возмущающему воздействию: $\Phi_F(p) = 0$. Здесь в принципе возможно получение абсолютной инвариантности по данному возмущению, однако в большинстве случаев приходится иметь дело со значительными техническими трудностями.

3. Равенство нулю вынужденной составляющей будет наблюдаться для таких входных функций, изображения которых имеют все полюсы, т. е. все корни уравнения $B(p) = 0$, совпадающие с нулями передаточной функции, т. е. с корнями уравнения $Q(p) = 0$. В этом случае после разложения на множители полиномов $B(p)$ и $Q(p)$ можно сократить одинаковые сомножители вида $(p - p_i)$ в числителе и знаменателе изображения (9.27). В результате второе слагаемое в выражении (9.29) обращается в нуль и $x_b(t) \equiv 0$.

Этот случай соответствует частичной инвариантности. Система будет инвариантна к входным воздействиям определенного вида, например к воздействиям, которые могут быть представлены в виде степенной функции времени с положительными и ограниченными степенями, в виде суммы экспонент с заданными постоянными времени и т. п.

Вводится также понятие инвариантности системы по отношению к какому-либо входному воздействию с точностью до ε . Здесь имеется в виду не тождественное равенство нулю вынужденной составляющей ошибки $x_b(t)$, а приближенное равенство, мерой выполнения которого является

некоторая величина ε . Для оценки выполнения инвариантности до ε существуют различные критерии, сливающиеся практически с критериями точности систем регулирования, рассмотренными в главе 8.

Основным методом, используемым при построении инвариантных систем, является применение так называемого комбинированного управления.

Комбинированное управление. Под комбинированным управлением или регулированием понимается такой метод построения замкнутых автоматических систем, когда, наряду с регулированием по отклонению или ошибке,

используется регулирование по задающему или возмущающему воздействию. Таким образом, в системе комбинированного управления осуществляется регулирование по замкнутому и разомкнутому циклам.

Рассмотрим вначале случай, когда дополнительно к регулированию по отклонению $x(t)$ используется регулирование по задающему воздействию $g(t)$. Структурная схема такой системы изображена на рис. 9.10, а.

В случае отсутствия регулирования по задающему воздействию, т. е. при

$\varphi(p) = 0$, регулируемая величина y связана с задающим воздействием g через передаточную функцию замкнутой системы:

$$y = \Phi(p) g = \frac{W(p)}{1 + W(p)} g, \quad (9.30)$$

где $W(p)$ — передаточная функция разомкнутой системы.

При введении регулирования по задающему воздействию регулируемая величина определяется выражением

$$y = \frac{W(p)}{1 + W(p)} [1 + \varphi(p)] g = \Phi_0(p) g. \quad (9.31)$$

Эквивалентная передаточная функция замкнутой системы с учетом регулирования по задающему воздействию

$$\Phi_0(p) = \frac{W(p) [1 + \varphi(p)]}{1 + W(p)}. \quad (9.32)$$

Из последнего выражения видно, в частности, что введение регулирования по задающему воздействию не меняет характеристического уравнения системы, работающей по отклонению, так как знаменатель передаточной функции замкнутой системы одинаков в (9.30) и (9.32). Это обстоятельство является замечательным свойством систем комбинированного регулирования.

Введение дополнительного регулирования по задающему воздействию не меняет левой части дифференциального уравнения. Это означает, что не будут нарушаться не только условия устойчивости, но сохранятся оценки качества переходного процесса, базирующиеся на использовании корней характеристического уравнения.

Из выражения (9.32) по известным соотношениям (5.19) и (5.26) могут быть найдены эквивалентная (т. е. с учетом регулирования по задающему воздействию) передаточная функция по ошибке

$$\Phi_{\text{сз}}(p) = 1 - \Phi_0(p) = \frac{1 - \varphi(p) W(p)}{1 + W(p)} \quad (9.33)$$

и передаточная функция разомкнутой системы

$$W_0(p) = \frac{\Phi_0(p)}{1 - \Phi_0(p)} = \frac{W(p) [1 + \varphi(p)]}{1 - \varphi(p) W(p)}. \quad (9.34)$$

Переход к эквивалентной передаточной функции разомкнутой системы $W_B(p)$ позволяет заменить структурную схему системы комбинированного управления эквивалентной ей обычной схемой системы регулирования, работающей по отклонению (рис. 9.10, б).

Из формулы (9.33) для передаточной функции по ошибке можно найти условие *полной инвариантности* системы регулирования. Положив $\Phi_{\Sigma}(p) = 0$, получаем

$$\Phi(p) = \frac{1}{W(p)}. \quad (9.35)$$

Разложив последнее выражение в ряд по возрастающим степеням оператора, получим необходимый вид функции, определяющей вводимый сигнал от управляющего воздействия:

$$\varphi(p) = a_0 + \tau_1 p + \tau_2^2 p^2 + \tau_3^3 p^3 + \dots, \quad (9.36)$$

где a_0 — безразмерное число.

Этот ряд может быть конечным и бесконечным. Первое слагаемое (9.36) в астатических системах и в большинстве статических систем (см. следующий параграф) оказывается равным нулю. Это не распространяется на случай использования комбинированного управления по возмущающему воздействию, где практически всегда получается $a_0 \neq 0$.

Таким образом, при введении регулирования по задающему воздействию для получения полной инвариантности необходимо вводить первую и высшие производные от задающего воздействия.

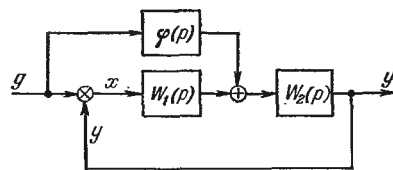


Рис. 9.11.

Обычно точно можно ввести только в некоторых случаях первую производную, а все последующие производные могут быть получены приближенно при помощи использования известных дифференцирующих звеньев (см., например, рис. 4.23 и 4.24). Поэтому практически может быть получена не полная, а *частичная инвариантность*. Это соответствует введению ограниченного числа первых членов разложения (9.36).

Так, например, введением первой производной от задающего воздействия в системе с астатизмом первого порядка можно получить равной нулю скоростную ошибку, т. е. повысить степень астатизма относительно задающего воздействия на единицу. Вводя первую и вторую производные (даже приближенно), можно повысить степень астатизма на два и т. д. Это дает обращение в нуль соответствующих коэффициентов ошибки (8.20).

В некоторых случаях сигнал по задающему воздействию может вводиться не непосредственно на вход системы, как это показано на рис. 9.10, а в некоторую точку внутри канала регулирования (рис. 9.11).

В этом более общем случае эквивалентная передаточная функция замкнутой системы будет иметь вид

$$\Phi_{\Sigma}(p) = \frac{W(p) \left[1 + \frac{\varphi(p)}{W_1(p)} \right]}{1 + W(p)}. \quad (9.37)$$

Эквивалентная передаточная функция по ошибке

$$\Phi_{\Sigma\Sigma}(p) = \frac{1 - \varphi(p) W_2(p)}{1 + W(p)}. \quad (9.38)$$

Эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы

$$W_0(p) = \frac{W(p) \left[1 + \frac{\Phi(p)}{W_1(p)} \right]}{1 - \Phi(p) W_2(p)}. \quad (9.39)$$

Условие полной инвариантности

$$\Phi(p) = \frac{1}{W_2(p)}. \quad (9.40)$$

В качестве примера рассмотрим следующую систему (см. рис. 6.4) при введении регулирования по первой производной от угла поворота командной

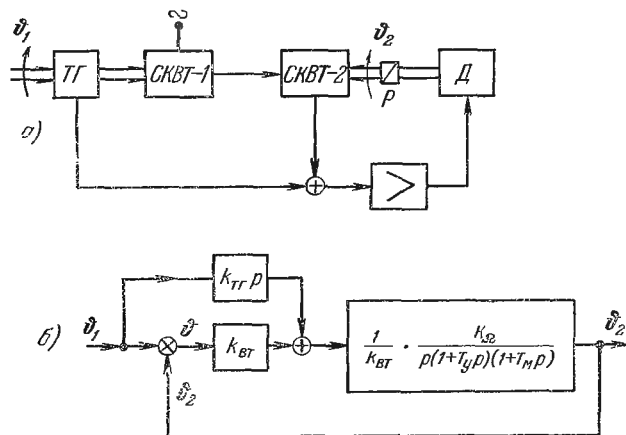


Рис. 9.12.

оси, которое осуществляется при помощи тахогенератора. Электромеханическая и структурная схемы для этого случая изображены на рис. 9.12.

В соответствии с общим случаем, изображенным на рис. 9.11, имеем:

$$\Phi(p) = k_{TG} p, \quad W_1(p) = k_{BT}, \quad W_2(p) = \frac{1}{k_{BT}} \frac{K}{p(1+T_y p)(1+T_M p)}.$$

Эквивалентная передаточная функция замкнутой системы (9.37)

$$\Phi_0(p) = \frac{K(1+\tau_1 p)}{T_y T_M p^3 + (T_y + T_M) p^2 + p + K},$$

где $\tau_1 = \frac{k_{TG}}{k_{BT}}$ — постоянная времени цепи первой производной от угла поворота командной оси.

Эквивалентная передаточная функция по ошибке (9.38)

$$\Phi_{\infty}(p) = \frac{T_y T_M p^3 + (T_y + T_M) p^2 + 1(1 - \tau_1 K) p}{T_y T_M p^3 + (T_y + T_M) p^2 + p + K}.$$

Скоростная ошибка будет равна нулю в том случае, когда в числителе последнего выражения будет равен нулю коэффициент при операторе в первой степени. Отсюда получаем условие частичной инвариантности (ликвидация скоростной ошибки):

$$\tau_1 = \frac{1}{K}. \quad (9.41)$$

Из (9.39) можно найти эквивалентную передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W_0(p) = \frac{K(1 + \tau_1 p)}{p(1 + T_y p)(1 + T_m p) - \tau_1 K p}.$$

При выполнении условия (9.41) эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы будет соответствовать астатизму второго порядка:

$$W_0(p) = \frac{K(1 + \tau_1 p)}{(T_y + T_m)p^2 + T_y T_m p^3} = \frac{K_e(1 + \tau_1 p)}{p^2(1 + T_0 p)},$$

где $K_e = \frac{K}{T_y + T_m}$ — добротность системы по ускорению, $T_0 = \frac{T_y T_m}{T_y + T_m}$ — эквивалентная постоянная времени.

В качестве второго примера рассмотрим инерциальную вертикаль (рис. 9.13, а). Принцип работы ее заключается в том, что акселерометр А воспринимает ускорение перемещения подвижного объекта, на котором установлена стабилизированная платформа (СП), и составляющую ускорения силы тяжести, возникающую при наклоне этой платформы на некоторый угол α (ошибка вертикали). Таким образом, акселерометр определяет ускорение

$$a = g\alpha + Rp^2\sigma_1, \quad (9.42)$$

где g — ускорение силы тяжести, R — радиус Земли, σ_1 — путь, пройденный объектом по Земле, в дуговых единицах.

Это ускорение дважды интегрируется и поступает на стабилизированную платформу, которая поворачивается на угол

$$\sigma_2 = \frac{k_1 k_2}{p^2} a, \quad (9.43)$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты передачи первого и второго интеграторов.

К этим двум уравнениям необходимо добавить связь между ошибкой вертикали α , пройденным путем в дуговых единицах σ_1 и углом поворота стабилизированной платформы σ_2 :

$$\alpha = \sigma_1 - \sigma_2 \quad (9.44)$$

Для рассмотренных уравнений (9.42) — (9.44) инерциальной вертикали изобразим структурную схему (рис. 9.13, б). Сравнивая ее с рис. 9.11, можем записать:

$$\varphi(p) = Rp^2, \quad (9.45)$$

$$W_1(p) = g, \quad (9.46)$$

$$W_2(p) = \frac{k_1 k_2}{p^2}. \quad (9.47)$$

Условие полной инвариантности (9.40)

$$\varphi(p) = \frac{1}{W_2(p)},$$

откуда следует, что должно быть выполнено равенство $k_1 k_2 = \frac{1}{R}$. Тогда передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = W_1(p) W_2(p) = \frac{g}{Rp^2}, \quad (9.48)$$

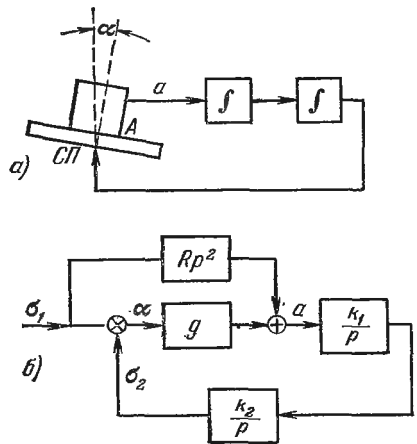


Рис. 9.13.

а передаточная функция по ошибке будет тождественно равна нулю: $\Phi_{\text{хв}}(p) = 0$. Следовательно, при любых движениях объекта, на котором установлена инерциальная вертикаль, ошибка вертикали будет равна нулю. Это будет справедливым в том случае, если выполнены нулевые начальные условия, т. е. отсутствует свободное движение вертикали под действием начальных условий, и в случае, когда можно считать, что достаточно точно выполняется требуемое условие $k_1 k_2 = \frac{1}{R}$.

Заметим, что в рассмотренном случае особенно важно иметь нулевые начальные условия вследствие того, что передаточной функции (9.48) соответствует характеристическое уравнение

$$p^2 + \frac{g}{R} = 0. \quad (9.49)$$

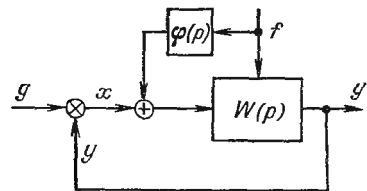


Рис. 9.14.

Оно имеет чисто мнимые корни

$$p_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{g}{R}} = \pm j\Omega_0, \quad (9.50)$$

где Ω_0 — частота незатухающих колебаний инерциальной вертикали, которой соответствует период $T_0 \approx 84,6$ мин, называемый

периодом Шулера. При наличии ненулевых начальных условий в системе будут устанавливаться незатухающие колебания с частотой Ω_0 , что будет нарушать работу вертикали.

Комбинированное управление может быть использовано также для снижения ошибки от возмущающего воздействия (рис. 9.14). В этом случае наряду с регулированием по отклонению $x(t)$ используется регулирование по возмущающему воздействию $f(t)$. Передаточная функция по возмущению здесь будет иметь вид

$$\Phi_F(p) = \frac{W_F(p) - \Phi(p)W(p)}{1 + W(p)}, \quad (9.51)$$

где $W_F(p)$ — передаточная функция по данному возмущению в разомкнутой системе, $W(p)$ — передаточная функция разомкнутой системы.

Условие полной инвариантности может быть получено, если положить $\Phi_F(p) = 0$. Тогда

$$\Phi(p) = \frac{W_F(p)}{W(p)}. \quad (9.52)$$

Эта функция также может быть представлена в виде ряда, аналогично формуле (9.36):

$$\Phi(p) = k_F(a_0 + \tau_1 p + \tau_2^2 p^2 + \tau_3^3 p^3 + \dots), \quad (9.53)$$

где a_0 — безразмерное число (1 или 0), а k_F — некоторый коэффициент, размерность которого совпадает с размерностью передаточной функции $W_F(p)$.

Как и в случае использования регулирования по задающему воздействию, получение полной инвариантности затрудняется необходимостью вводить первую и более высокие производные от возмущения $f(t)$. Поэтому используется, как правило, частичная инвариантность, получающаяся при реализации в системе регулирования первых членов разложения (9.53). Это в свою очередь дает обращение в нуль соответствующих первых коэффициентов ошибки по возмущению (c_0, c_1, c_2 и т. д.).

В заключение заметим, что возможно использование комбинированных систем с введением регулирования по нескольким возмущающим воздействиям и получением полной или частичной инвариантности по каждому из них. Однако это приводит, конечно, к усложнению схемы.

§ 9.3. Неединичные обратные связи

Неединичные обратные связи применяются для уменьшения ошибки, вызванной задающим воздействием в замкнутой системе регулирования.

Рассмотрим структурную схему, изображенную на рис. 9.15. В отличие от обычной схемы регулируемая величина $y(t)$ поступает на сравнение в чувствительный элемент по главной обратной связи с передаточной функцией, не равной единице, т. е. $\psi(p) \neq 1$.

В этом случае регулируемая величина в функции задающего воздействия будет определяться выражением

$$y(t) = \frac{W(p)}{1 + \psi(p)W(p)} g(t) = \Phi_g(p) g(t). \quad (9.54)$$

Для получения полной инвариантности необходимо выполнить условие $\Phi_g(p) = 1$. Отсюда можно найти требуемую передаточную функцию главной обратной связи:

$$\psi(p) = \frac{W(p) - 1}{W(p)}. \quad (9.55)$$

При разложении этого выражения в степенной ряд получаем

$$\psi(p) = a_0 - (\tau_1 p + \tau_2^2 p^2 + \tau_3^3 p^3 + \dots). \quad (9.56)$$

Отсюда видно, что для получения полной инвариантности необходимо использовать главную обратную связь с коэффициентом передачи, в общем случае отличным от единицы: $a_0 \neq 1$ (в астатических системах $a_0 = 1$), и дополнительно ввести положительные обратные связи по производным от регулируемой величины.

Реализация полной инвариантности, т. е. реализация условия (9.55), практически невозможна. Это определяется, во-первых, невозможностью точного введения высших производных (9.56), а во-вторых, тем, что при выполнении условия (9.55) система будет находиться на границе устойчивости. Поэтому неединичные обратные связи используются лишь как средство повышения точности замкнутой системы регулирования.

Аналогично тому, как это делалось для систем комбинированного управления, структурную схему с неединичной обратной связью (рис. 9.15, а) можно заменить эквивалентной схемой с единичной главной обратной связью, но с некоторой эквивалентной передаточной функцией разомкнутой системы $W_g(p)$. Последняя может быть определена из равенства передаточных функций замкнутой системы двух схем (рис. 9.15, а и 9.15, б):

$$\Phi_g(p) = \frac{W(p)}{1 + \psi(p)W(p)} = \frac{W_g(p)}{1 + W_g(p)}. \quad (9.57)$$

Отсюда находим

$$W_g(p) = \frac{W(p)}{1 - [1 - \psi(p)]W(p)}. \quad (9.58)$$

Наиболее эффективным действие неединичной обратной связи оказывается в статической системе. Здесь простым изменением коэффициента передачи жесткой главной обратной связи можно получить астатизм относительно задающего воздействия.

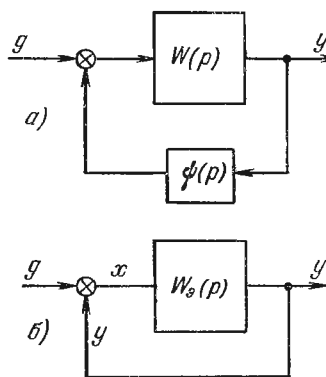


Рис. 9.15.

Для того чтобы показать это, рассмотрим передаточную функцию разомкнутой статической системы (5.36):

$$W(p) = \frac{K(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{1 + C_{n-1}p + \dots + C_0p^n}.$$

Будем считать, что главная обратная связь жесткая, т. е. $\psi(p) = a_0$. Тогда эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы (9.58) будет

$$W_3(p) = \frac{K(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{(1 + C_{n-1}p + \dots + C_0p^n) - (1 - a_0)K(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}. \quad (9.59)$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условия

$$(1 - a_0)K = 1 \quad (9.60)$$

или

$$a_0 = \frac{K-1}{K} = 1 - \frac{1}{K} \quad (9.61)$$

в знаменателе (9.59) пропадает член с оператором в нулевой степени. В этом случае эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы будет соответствовать астатизму первого порядка:

$$W_3(p) = \frac{K(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{(C_{n-1} - B_{m-1})p + (C_{n-2} - B_{m-2})p^2 + \dots + C_0p^n}. \quad (9.62)$$

Эта система будет обладать добротностью по скорости

$$K_v = \frac{K}{C_{n-1} - B_{m-1}} \left[\frac{1}{\text{сек}} \right]. \quad (9.63)$$

Таким образом, при помощи совершенно элементарного приема — уменьшения коэффициента передачи главной обратной связи на незначительную

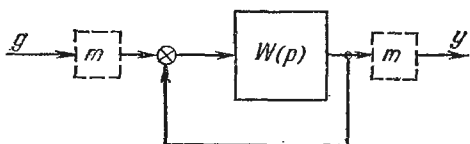


Рис. 9.16.

величину по сравнению с единицей — можно получить в системе астатизм первого порядка относительно задающего воздействия, что будет означать отсутствие статической ошибки и равенство нулю первого коэффициента ошибки: $c_0 = 0$.

Следует заметить, что аналогичные результаты, т. е. уничтожение статической ошибки от задающего воздействия в статической системе, можно получить не менее простым способом масштабирования входной или выходной величины системы регулирования (рис. 9.16).

Если на входе или выходе системы включить масштабирующее устройство с коэффициентом передачи

$$m = \frac{K+1}{K},$$

то регулируемая величина $y(t)$ будет связана с задающим воздействием $g(t)$ соотношением

$$y(t) = \frac{W(p)}{1+W} \frac{K+1}{K} g(t). \quad (9.64)$$

В установившемся режиме при статическом регулировании $W(0) = K$. Поэтому для установившегося режима при $g(t) = g_0 = \text{const}$

$$y_{\text{уст}} = \frac{K}{1+K} \frac{K+1}{K} g_0 = g_0, \quad (9.65)$$

что соответствует отсутствию статической ошибки. Такое масштабирование делается практически во всех статических системах регулирования, что позволяет рассматривать их по отношению к задающему воздействию как астатические и считать для них коэффициент ошибки $c_0 = 0$.

Однако равенство нулю первого коэффициента ошибки в статических системах может быть достигнуто при выполнении условия $K = \text{const}$, что следует из приведенных выше формул. Если общий коэффициент усиления нестабилен, то нетрудно показать, что в системе появится статическая ошибка

$$x_{\text{уст}} = \frac{\Delta K}{K} \frac{g_0}{K}, \quad (9.66)$$

где $\frac{\Delta K}{K}$ — относительное изменение коэффициента усиления по сравнению с расчетным значением. Следовательно, первый коэффициент ошибки в этом случае будет равен $c_0 = \frac{\Delta K}{K^2}$.

УЛУЧШЕНИЕ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 10.1. О корректирующих средствах

Под улучшением качества процесса регулирования, помимо повышения точности в типовых режимах, понимается изменение динамических свойств системы регулирования с целью получения необходимого запаса устойчивости и быстродействия. В этой проблеме основное значение имеет обеспечение запаса устойчивости. Это объясняется тем, что стремление снизить ошибки системы регулирования приводит, как правило, к необходимости использовать такие значения общего коэффициента усиления, при которых без принятия специальных мер система вообще оказывается неустойчивой.

При решении задачи повышения запаса устойчивости проектируемой системы регулирования прежде всего необходимо попытаться рациональным образом изменить ее параметры (коэффициенты передачи отдельных звеньев, постоянные времени и т. п.) так, чтобы удовлетворить требованиям качества регулирования, которые определяются критериями качества. При невозможности решить эту задачу в рамках имеющейся системы приходится идти на изменение ее структуры. Для этой цели обычно используется введение в систему регулирования так называемых корректирующих средств, которые должны изменить динамику всей системы в нужном направлении. К корректирующим средствам относятся, в частности, корректирующие звенья, представляющие собой динамические звенья с определенными передаточными функциями.

В тех случаях, когда корректирующие звенья используются именно для получения устойчивости системы регулирования или для повышения ее запаса устойчивости, они называются иногда демпфирующими или стабилизирующими звеньями. При этом имеется в виду, что звенья демпфируют колебания, которые возникают в системе регулирования. Термин «корректирующие звенья» является более широким и используется для звеньев, которые вводятся в систему для изменения статических и динамических свойств с различными целями.

Получение требуемого быстродействия обычно обеспечивается при проектировании системы регулирования посредством выбора соответствующих элементов цепи регулирования (исполнительных органов, усилителей, серводвигателей и т. п.). Однако возможно улучшение быстродействия системы посредством использования корректирующих средств.

Заметим также, что проблема получения в системе регулирования требуемых качественных показателей — точности в типовых режимах, запаса устойчивости и быстродействия — является единой и ни один из входящих в нее вопросов не может решаться в отрыве от других. Это делает всю проблему весьма сложной, что заставляет в некоторых случаях получать требуемое решение посредством последовательного приближения и рассмотрения многих вариантов.

Корректирующие звенья могут вводиться в систему регулирования различными способами.

На рис. 10.1, а представлена схема введения в цепь регулирования корректирующего устройства *последовательного типа*. Здесь $W_c(p)$ представляет собой передаточную функцию части цепи регулирования, $W_{пз}(p)$ — передаточную функцию последовательного корректирующего звена.

Результирующая передаточная функция может быть найдена из выражения

$$W_{ск}(p) = \frac{x_3}{x_1} = \frac{x_2}{x_1} \frac{x_3}{x_2} = W_c(p) W_{пз}(p). \quad (10.1)$$

На рис. 10.1, б представлена схема введения в цепь регулирования корректирующего устройства *параллельного типа*, имеющего передаточную функцию $W_{п}(p)$. Результирующая передаточная функция

$$W_{ск}(p) = \frac{x_4}{x_1} = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_1} = W_c(p) + W_{п}(p). \quad (10.2)$$

На рис. 10.1, в изображено корректирующее устройство, выполненное в виде *местной обратной связи*. Результирующая передаточная функция находится следующим образом.

На вход звена с передаточной функцией $W_c(p)$ поступает сигнал x_2 , равный сумме или разности входного сигнала x_1 и сигнала x_4 , поступающего по цепи обратной связи:

$$x_2 = x_1 \pm x_4.$$

Знак плюс соответствует положительной обратной связи, а знак минус — отрицательной обратной связи.

Сигнал обратной связи $x_4 = W_{ос}(p) x_3$.

В результате получим

$$x_3 = W_c(p) x_2 = W_c(p) [x_1 \pm W_{ос}(p) x_3]$$

или

$$x_3 [1 \mp W_c(p) W_{ос}(p)] = W_c(p) x_1.$$

Отсюда можно найти результирующую передаточную функцию:

$$W_{ск}(p) = \frac{x_3}{x_1} = \frac{W_c(p)}{1 \mp W_c(p) W_{ос}(p)}. \quad (10.3)$$

В этом выражении знак минус соответствует положительной обратной связи, а знак плюс — отрицательной.

В качестве корректирующих устройств обычно применяют отрицательные обратные связи, хотя не исключена возможность использования и положительных обратных связей. Поэтому в дальнейшем будем использовать формулу (10.3) со знаком плюс, считая, что она записана для отрицательной обратной связи:

$$W_{ск}(p) = \frac{W_c(p)}{1 + W_c(p) W_{ос}(p)}. \quad (10.3')$$

Использование того или иного типа корректирующих устройств, т. е. последовательных звеньев, параллельных звеньев или обратных связей, определяется удобством технического осуществления.

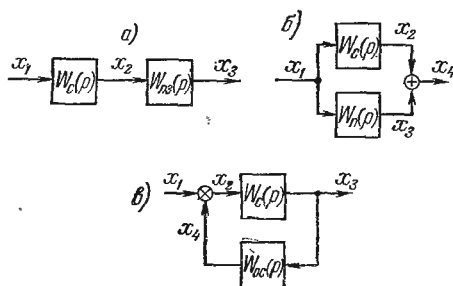


Рис. 10.1.

В линейных системах динамические свойства их при введении корректирующих устройств различного типа могут быть сделаны одинаковыми, и для корректирующего устройства одного типа можно подобрать эквивалентное корректирующее устройство другого типа. Эквивалентность означает, что присоединение к системе регулирования одного или другого корректирующего устройства образует полностью подобные в динамическом отношении системы.

Для получения формул перехода от корректирующего устройства одного типа к корректирующему устройству другого типа необходимо приравнять результирующие передаточные функции (10.1) — (10.3). В результате имеем

$$W_c(p) W_{\pi\pi}(p) = W_c(p) + W_{\pi}(p) = \frac{W_c(p)}{1 + W_c(p) W_{oc}(p)}. \quad (10.4)$$

Отсюда можно получить шесть формул перехода от передаточной функции звена одного типа к передаточной функции звена другого типа:

$$W_{\pi\pi}(p) = \frac{1}{1 + W_c(p) W_{oc}(p)}, \quad (10.5)$$

$$W_{oc}(p) = \frac{1 - W_{\pi\pi}(p)}{W_c(p) W_{\pi\pi}(p)}, \quad (10.6)$$

$$W_{\pi\pi}(p) = \frac{W_c(p) + W_{\pi}(p)}{W_c(p)}, \quad (10.7)$$

$$W_{\pi}(p) = W_c(p) [W_{\pi\pi}(p) - 1], \quad (10.8)$$

$$W_{oc}(p) = -\frac{W_{\pi}(p)}{W_c^2(p) + W_c(p) W_{\pi}(p)}, \quad (10.9)$$

$$W_{\pi}(p) = -\frac{W_c^2(p) W_{oc}(p)}{1 + W_c(p) W_{oc}(p)}. \quad (10.10)$$

Звенья последовательного типа особенно удобно применять в тех случаях, когда в системе регулирования используется электрический сигнал в виде напряжения постоянного тока, величина которого функционально связана с сигналом ошибки $u = f(x)$, например, линейной зависимостью $u = kx$. Тогда корректирующее звено может быть осуществлено при помощи R -, C - и L -элементов.

Эти звенья оказываются значительно менее удобными, если сигнал представляет собой модулированное напряжение переменного тока. В этом случае имеется принципиальная возможность построения звеньев на тех же R -, C - и L -элементах, воздействующих на огибающую модулированного сигнала, но ввиду их сложности и недостатков они пока почти не находят применения. При наличии модулированного сигнала и при необходимости использования звеньев последовательного типа приходится устанавливать в канале переменного тока фазочувствительный демодулятор. После выпрямления и фильтрации сигнала от высших гармоник в этом случае появляется возможность ввести звено последовательного типа. Схема введения звена последовательного типа изображена для этого случая на рис. 10.2. Модулированный сигнал переменного тока поступает на фазочувствительный демодулятор $\Phi Д$, затем после выпрямления на фильтр Φ и далее на последовательное корректирующее звено $\Pi З$. В случае необходимости вести дальнейшее усиление на переменном токе после последовательного звена устанавливается модулятор $М$. Однако такой путь часто связан с серьезным ухудшением динамических свойств системы вследствие влияния дополнительных постоянных времени фильтра, устанавливаемого на выходе демодулятора.

Звенья параллельного типа удобно применять в тех случаях, когда необходимо осуществить сложный закон регулирования с введением интегра-

лов и производных от сигнала ошибки. Примером этому может служить рассмотренный в предыдущей главе случай использования изодромных устройств.

Обратные связи находят наиболее широкое применение вследствие простоты технической реализации. Это объясняется тем обстоятельством, что на вход обратной связи поступает сигнал сравнительно высокого уровня, часто даже непосредственно с выхода системы регулирования, промежуточного серводвигателя или выходного каскада усилителя. Другое не менее важное обстоятельство заключается в том, что корректирующие устройства различного типа оказывают различное влияние на содержащиеся в системе

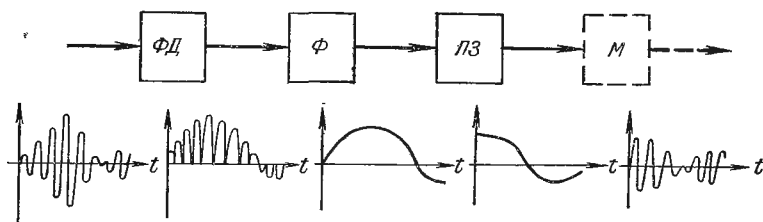


Рис. 10.2.

нелинейности. Если обратная связь охватывает участок канала регулирования, содержащий какую-либо нелинейность, например силы трения, люфт, зону нечувствительности и т. п., то влияние этой нелинейности на протекание процессов в системе регулирования меняется существенным образом. Отрицательные обратные связи имеют свойство уменьшать влияние нелинейностей тех участков цепи регулирования, которые ими охватываются. Так как практически все системы регулирования содержат те или иные нелинейности, ухудшающие качество регулирования, то использование корректирующих устройств в виде отрицательных обратных связей, как правило, дает возможность добиться лучших результатов по сравнению с другими типами корректирующих устройств.

Аналогичным образом отрицательные обратные связи дают значительно лучший эффект в тех случаях, когда вследствие воздействия внешних факторов (время, температура и т. п.) меняется коэффициент усиления какой-либо части цепи регулирования, охватываемой отрицательной обратной связью.

§ 10.2. Последовательные корректирующие звенья

Корректирующие звенья последовательного типа могут составляться из различных по своей физической природе элементов — электрических, механических, гидравлических и т. д. Наиболее просто такие звенья могут быть составлены из электрических R -, C - и L -элементов. Электрические последовательные звенья имеют самое широкое распространение в системах автоматического регулирования, поэтому в дальнейшем они будут рассмотрены в первую очередь.

Последовательные звенья из R -, C - и L -элементов часто называют пассивными последовательными корректирующими устройствами, так как они не содержат источников электродвижущих сил.

Существует весьма большое количество пассивных последовательных звеньев. В некоторых книгах и справочниках приводятся таблицы, содержащие схемы десятков и даже сотен звеньев различного вида.

Обычно пассивные последовательные звенья могут быть представлены в виде обобщенной схемы, изображенной на рис. 10.3.

Функции $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ представляют собой сопротивления участков цепи, записанные в операторной форме. Влияние предыдущего и последующего звеньев на работу последовательного корректирующего звена может быть учтено введением сопротивления выхода источника сигнала $R_{\text{и}}$ и сопротивления входа $R_{\text{в}}$.

С учетом введенных сопротивлений передаточная функция последовательного звена будет

$$W_{\text{пз}}(p) = \frac{U_2(p)}{E(p)} = \frac{\frac{R_{\text{в}}Z_2(p)}{R_{\text{в}} + Z_2(p)}}{R_{\text{и}} + Z_1(p) + \frac{R_{\text{в}}Z_2(p)}{R_{\text{в}} + Z_2(p)}}. \quad (10.11)$$

В идеализированном случае, когда $R_{\text{и}} \rightarrow 0$, а $R_{\text{в}} \rightarrow \infty$, формула (10.11) приобретает вид

$$W_{\text{пз}}(p) = \frac{U_2(p)}{E(p)} \approx \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}. \quad (10.12)$$

Передаточная функция (10.11), как правило, соответствует звеньям с более плохими корректирующими свойствами по сравнению с (10.12).

В табл. 10.1 приведены основные типы последовательных пассивных электрических корректирующих звеньев в соответствии с формулами (10.11) и (10.12).

Пассивные дифференцирующие звенья подавляют низкие частоты и вносят положительный фазовый сдвиг. Подавление низких частот обычно недопустимо, так как снижает результирующий общий коэффициент усиления и увеличивает ошибки системы регулирования. Если восстановить на низких частотах прежний коэффициент усиления введением дополнительного усиления $k_{\text{доп}} = G_0^{-1}$, то передаточная функция звена совместно с дополнительным усилителем будет

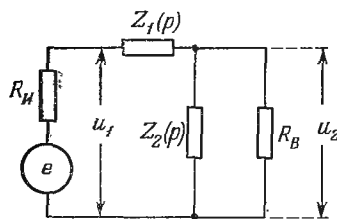


Рис. 10.3.

$$W_{\text{пз}}(p) = k_{\text{доп}} G_0^{-1} \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p} = \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}. \quad (10.13)$$

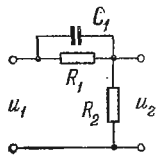
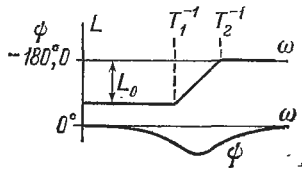
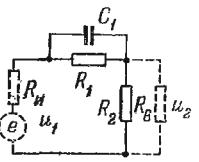
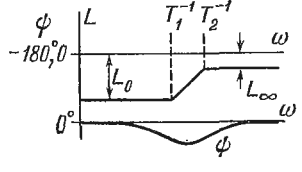
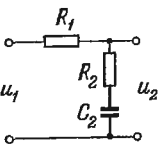
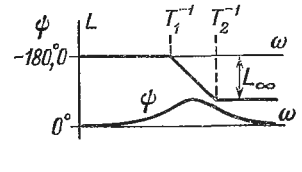
Такое звено обладает свойством усиливать высокие частоты в T_1/T_2 раз. Асимптотическая л. а. х. этого звена может быть получена из л. а. х., изображенной в табл. 10.1, поднятием ее параллельно самой себе до совпадения левой горизонтальной асимптоты с осью абсцисс. Л. ф. х. остается без изменений.

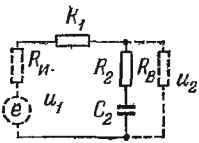
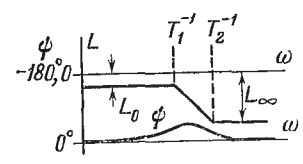
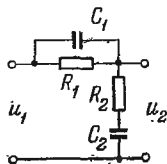
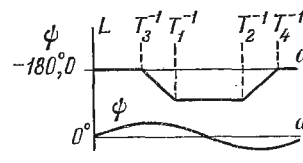
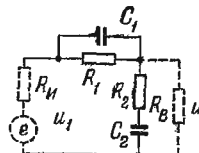
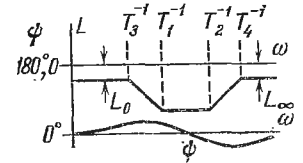
Пассивные интегрирующие звенья подавляют усиление на высоких частотах и вносят в некотором интервале частот отрицательный фазовый сдвиг.

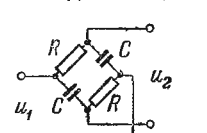
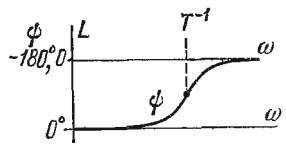
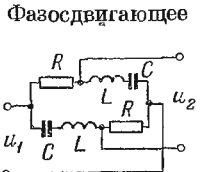
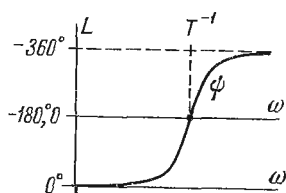
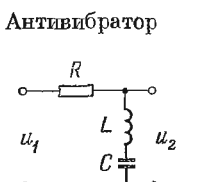
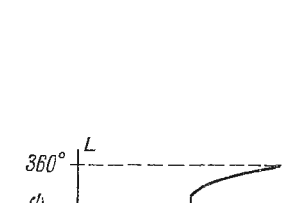
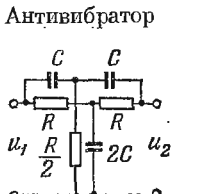
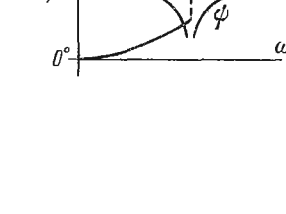
Интегро-дифференцирующие звенья подавляют усиление в некотором интервале «средних» частот, а вносимый фазовый сдвиг вначале отрицателен, затем с ростом частоты становится нулевым на частоте $\omega_c = (T_1 T_2)^{-0.5} = (T_3 T_4)^{-0.5}$. При дальнейшем росте частоты фазовый сдвиг становится положительным. Подавление усиления в области средних частот происходит в соответствии с относительным значением модуля $W_{\text{пз}}(j\omega)$ на «средней» частоте:

$$|W_{\text{пз}}(j\omega)| = \left| \frac{(1 + j\omega_c T_1)(1 + j\omega_c T_2)}{(1 + j\omega_c T_3)(1 + j\omega_c T_4)} \right| = \frac{T_1 + T_2}{T_3 + T_4} \approx \frac{T_1}{T_3} = \frac{T_4}{T_2}. \quad (10.14)$$

Фазосдвигающие звенья вносят отрицательный фазовый сдвиг при равенстве единице модуля частотной передаточной функции, $|W_{\text{пз}}(j\omega)| = 1$, что соответствует прохождению гармонического сигнала любой частоты без изменения его амплитуды.

№ п.п.	Название и схема пассивного звена	Передаточная функция	Частотные характеристики	Параметры	Л. а. х. и л. ф. х.
1	Дифференцирующее 	$G_0 \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}$	$A = \frac{G_0 \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}};$ $\psi = \operatorname{arctg} \omega T_1 - \operatorname{arctg} \omega T_2$	$T_1 = R_1 C_1;$ $T_2 = \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot T_1;$ $G_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{T_2}{T_1};$ $L_0 = 20 \lg G_0$	
2	Дифференцирующее 	$G_0 \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}$	$A = \frac{G_0 \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}};$ $\psi = \operatorname{arctg} \omega T_1 - \operatorname{arctg} \omega T_2$	$T_1 = R_1 C_1;$ $T_2 = \frac{R_1 + R_0}{R_1 + R_0 + R_1} \cdot T_1;$ $R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2};$ $G_0 = \frac{R_0}{R_1 + R_0 + R_1};$ $G_\infty = \frac{R_0}{R_1 + R_0};$ $L_0 = 20 \lg G_0; L_\infty = 20 \lg G_\infty$	
3	Интегрирующее 	$\frac{1 + T_2 p}{1 + T_1 p}$	$A = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}};$ $\psi = \operatorname{arctg} \omega T_2 - \operatorname{arctg} \omega T_1$	$T_1 = (R_1 + R_2) C_2;$ $T_2 = R_2 C_2;$ $G_\infty = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{T_2}{T_1};$ $L_\infty = 20 \lg G_\infty$	

№ п.п.	Название и схема пассивного звена	Передаточная функция	Частотные характеристики	Параметры	Л. а. х. и л. ф. х.
4	Интегрирующее 	$G_0 \frac{1+T_2 p}{1+T_1 p}$	$A = \frac{G_0 \sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}};$ $\psi = \text{arctg } \omega T_2 - \text{arctg } \omega T_1$	$T_1 = \left[R_2 + \frac{R_B (R_{\text{И}} + R_1)}{R_{\text{И}} + R_1 + R_B} \right] C_2;$ $T_2 = R_2 C_2; G_0 = \frac{R_B}{R_B + R_1 + R_{\text{И}}};$ $G_{\infty} = \frac{R_B R_2}{R_B (R_1 + R_{\text{И}}) + R_2 (R_B + R_1 + R_{\text{И}})}$	
5	Интегро-дифференцирующее 	$\frac{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{(1+T_3 p)(1+T_4 p)}$	$A = \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2} \sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}{\sqrt{1+\omega^2 T_3^2} \sqrt{1+\omega^2 T_4^2}};$ $\psi = \text{arctg } \omega T_1 + \text{arctg } \omega T_2 - \text{arctg } \omega T_3 - \text{arctg } \omega T_4$	$T_1 = R_1 C_1; T_2 = R_2 C_2;$ $a = \frac{R_1 + R_2}{R_2};$ $T_{3,4} = \frac{T_1 + a T_2}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 T_1 T_2}{(T_1 + a T_2)^2}} \right)$	
6	Интегро-дифференцирующее 	$G_0 \frac{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{(1+T_3 p)(1+T_4 p)}$	$A = G_0 \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2} \sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}{\sqrt{1+\omega^2 T_3^2} \sqrt{1+\omega^2 T_4^2}};$ $\psi = \text{arctg } \omega T_1 + \text{arctg } \omega T_2 - \text{arctg } \omega T_3 - \text{arctg } \omega T_4$	$T_1 = R_1 C_1; T_2 = R_2 C_2;$ $T_3 \approx \left[R_2 + \frac{R_B (R_{\text{И}} + R_2)}{R_{\text{И}} + R_1 + R_B} \right] C_2;$ $T_4 \approx \frac{T_1 T_2}{T_3}; G_0 = \frac{R_B}{R_B + R_1 + R_{\text{И}}};$ $G_{\infty} = \frac{R_B R_2}{R_B R_{\text{И}} + R_2 (R_1 + R_{\text{И}})}$	

7	Фазосдвигающее 	$\frac{1 - Tp}{1 + Tp}$ $A(\omega) = 1;$ $\psi = -2 \operatorname{arctg} \omega T$	$T = RC$	
8	Фазосдвигающее 	$\frac{1 - 2\zeta Tp + T^2 p^2}{1 + 2\zeta Tp + T^2 p^2}$ $A(\omega) = 1;$ $\psi = -2 \operatorname{arctg} \frac{2\zeta T\omega}{1 - \omega^2 T^2}$	$T = \sqrt{LC}; \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$	
9	Антивибратор 	$A = \frac{ 1 - \omega^2 T^2 }{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}};$ $\psi = -\operatorname{arctg} \frac{2\zeta \omega T}{1 - \omega^2 T^2} \left(\omega < \frac{1}{T} \right);$ $\psi = \pm 180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{2\zeta \omega T}{1 - \omega^2 T^2} \left(\omega > \frac{1}{T} \right)$	$T = \sqrt{LC}; \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$	
10	Антивибратор 	$A = \frac{ 1 - \omega^2 T^2 }{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}};$ $\frac{1 + T^2 p^2}{1 + 4Tp + T^2 p^2} = \psi = -\operatorname{arctg} \frac{4T\omega}{1 - \omega^2 T^2} \left(\omega < \frac{1}{T} \right);$ $\frac{1 + T^2 p^2}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} \psi = \pm 180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{4T\omega}{1 - \omega^2 T^2} \left(\omega > \frac{1}{T} \right)$	$T = RC;$ $T_1 = T(2 + \sqrt{3});$ $T_2 = T(2 - \sqrt{3})$	

Антивибраторы по своим свойствам противоположны консервативному звену и на некоторой частоте (частоте настройки) имеют модуль коэффициента передачи, равный нулю.

Для *модулированного сигнала* в настоящее время находят некоторое применение только пассивные последовательные дифференцирующие звенья. Как следует из § 4.9, такие звенья должны иметь амплитудную частотную характеристику, симметричную относительно несущей частоты. При этом звено должно подавлять несущую частоту (см. рис. 4.30).

Отличие пассивного последовательного дифференцирующего звена заключается в том, что на несущей частоте коэффициент передачи должен быть отличным от нуля подобно тому, как для частотной характеристики аналогичного звена постоянного тока отличен от нуля коэффициент

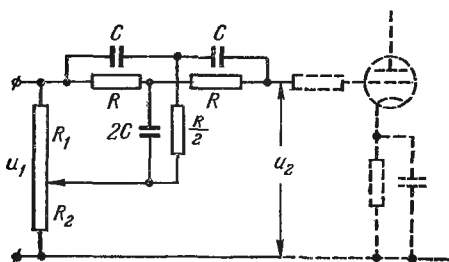


Рис. 10.4.

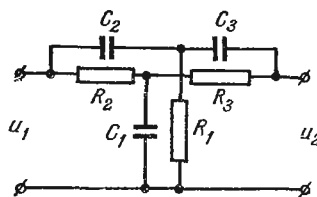


Рис. 10.5.

передачи на нулевой частоте (см. табл. 10.1). Для этой цели амплитудная частотная характеристика обычного дифференцирующего звена на несущей частоте (см. рис. 4.30) должна быть смещена параллельно самой себе вверх.

В этом случае для модулированного сигнала

$$u_1 = U_{\text{imax}} \sin \omega t \cos \omega_0 t, \quad (10.15)$$

где ω_0 — несущая частота, ω — частота огибающей; частотная передаточная функция для огибающей имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{T_2}{T_1} \frac{1+j\omega T_1}{1+j\omega T_2} = G_0 \frac{1+j\omega T_1}{1+j\omega T_2}, \quad (10.16)$$

где $G_0 = \frac{T_2}{T_1}$ — коэффициент передачи звена на несущей частоте ($\omega = 0$).

Подобное смещение амплитудной частотной характеристики может быть получено при помощи схемы суммирования (рис. 10.4). Для этой цели может применяться также расстройка в двойном Т-образном контуре. Схема контура для этого случая изображена на рис. 10.5.

Таблица 10.2

$\omega_0 T_1$	2,5	5	7,5	10	15	20	30	40	50	60	∞
G_0	0,226	0,110	0,077	0,052	0,034	0,025	0,016	0,012	0,010	0,008	0
a	0,753	0,553	0,486	0,453	0,420	0,403	0,386	0,378	0,374	0,370	0,353

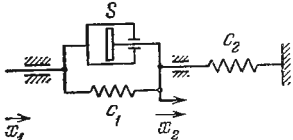
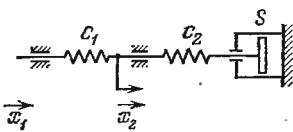
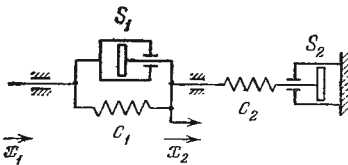
Параметры Т-образного контура для случая равенства емкостей всех конденсаторов ($C_1 = C_2 = C_3 = C$) могут подбираться в соответствии с табл. 10.2. Сопротивления, входящие в двойной Т-образный контур, вычисляются по формулам

$$R_1 = \frac{a}{\omega_0 C}, \quad R_2 = \frac{1}{2a\omega_0 C}, \quad R_3 = \frac{1}{\sqrt{2}\omega_0 C}. \quad (10.17)$$

Подробнее расчет пассивных дифференцирующих звеньев на несущей частоте приведен в [27, 38].

Последовательные корректирующие звенья могут быть также построены на механических элементах. В табл. 10.3 изображены три основных пассивных звена: дифференцирующее, интегрирующее и интегро-дифференцирующее. Эти звенья построены на пружинах и демпферах. В качестве входной величины используется перемещение x_1 и выходной — перемещение x_2 .

Таблица 10.3

Название и схема звена	Передаточная функция	Параметры
Дифференцирующее 	$G_0 \frac{1+T_1 p}{1+T_2 p}$	$T_1 = \frac{S}{C_1}, \quad T_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} T_1,$ $G_0 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$
Интегрирующее 	$\frac{1+T_2 p}{1+T_1 p}$	$T_1 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) S, \quad T_2 = \frac{S}{C_2},$ $G_\infty = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$
Интегро-дифференцирующее 	$\frac{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{(1+T_3 p)(1+T_4 p)}$	$T_1 = \frac{S_1}{C_1}, \quad T_2 = \frac{S_2}{C_2},$ $a = \frac{C_1 + C_2}{C_1},$ $T_{3,4} = \frac{T_1 + a T_2}{2} \times$ $\times \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 T_1 T_2}{(T_1 + a T_2)^2}} \right)$

Передаточные функции этих звеньев полностью совпадают с передаточными функциями соответствующих звеньев, приведенных в табл. 10.1, для идеализированного случая ($R_n \rightarrow 0$ и $R_b \rightarrow \infty$). Параметры элементов можно получить из приведенных в табл. 10.1 формул для электрических звеньев заменой емкостей конденсаторов (C) на коэффициенты сопротивления демпферов (S) и электрического сопротивления ($\bar{R}$) на величину, обратную жесткости пружины (c).

§ 10.3. Параллельные корректирующие звенья

Как уже отмечалось, параллельные корректирующие звенья удобно применять при использовании сложных законов управления, когда наряду с основным сигналом вводятся его производные или интегралы.

Введение интегралов преследует цель снижения установившейся ошибки. Этот вопрос был рассмотрен в главе 9 в связи с повышением точности систем

автоматического регулирования посредством использования изодромных устройств.

Введение производных преследует обычно цель обеспечения устойчивости. В этом случае используются звенья дифференцирующего типа, включаемые параллельно основной цепи.

Варианты параллельного включения дифференцирующих звеньев показаны на рис. 10.6. Получение производной второго порядка при помощи одного звена является затруднительным. Поэтому схема, изображенная

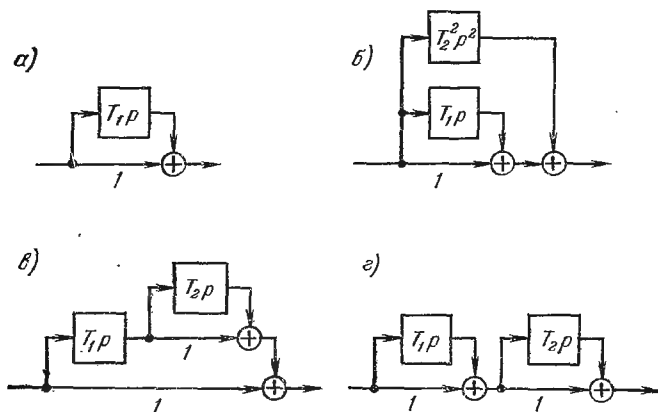


Рис. 10.6.

на рис. 10.6, б используется редко. Введение второй производной дополнительно к первой производной осуществляется обычно по каскадным схемам, изображенным на рис. 10.6, в и 10.6, г. Для первой из них (рис. 10.6, в) результирующая передаточная функция будет

$$W(p) = 1 + T_1 p + T_1 T_2 p^2, \quad (10.18)$$

а для второй (рис. 10.6, г)

$$W(p) = 1 + (T_1 + T_2) p + T_1 T_2 p^2. \quad (10.19)$$

На рис. 10.6 дифференциаторы изображены идеальными. Более вероятно, что они будут представлять собой дифференцирующие звенья с замедлением (рис. 4.24).

Заметим, что введение параллельных корректирующих звеньев, представляющих собой интеграторы, соответствует поднятию нижних частот. Это хорошо видно на рис. 9.6. Введение параллельных корректирующих звеньев, представляющих собой дифференциаторы, соответствует поднятию верхних частот. Это можно видеть из формул (10.18) и (10.19).

В качестве примера на рис. 10.7, а изображен случай введения дополнительно к основному сигналу, пропорциональному углу поворота вала, сигналов, пропорциональных первой и второй производным угла поворота. Первый сигнал вырабатывается датчиком угла — потенциометром, второй — тахогенератором и третий — дифференцирующим трансформатором, на вход которого поступает напряжение тахогенератора.

На рис. 10.7, б приведена структурная схема рассматриваемого устройства. На ней обозначено: k_1 — коэффициент передачи потенциометра, k_2 —

коэффициент передачи тахогенератора, k_3 и T — коэффициент передачи и постоянная времени дифференцирующего трансформатора.

Результирующая передаточная функция

$$W(p) = k_1 + k_2 p + \frac{k_2 k_3 p^2}{1 + T p}. \quad (10.20)$$

Структурная схема может быть приведена к виду, изображенному на рис. 10.7, в, если в выражении (10.20) вынести за скобки множитель k_1 :

$$W(p) = k_1 \left(1 + T_1 p + \frac{k_3 T_1 p^2}{1 + T p} \right), \quad (10.21)$$

где $T_1 = \frac{k_2}{k_1}$.

Структурная схема для этого случая приведена на рис. 10.7, в.

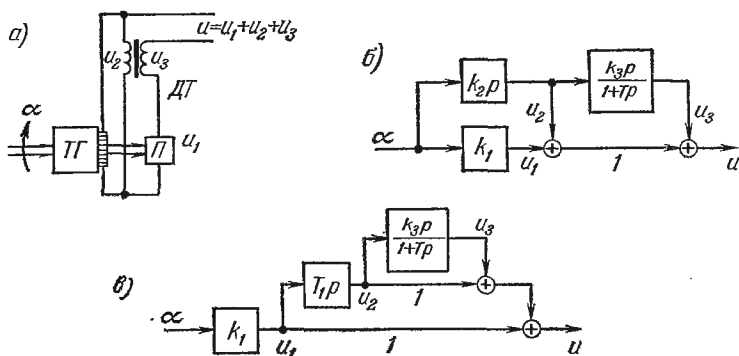


Рис. 10.7.

На рис. 10.8 приведен пример параллельного соединения гироскопических чувствительных элементов. Трехстепенный гироскоп $\Gamma-1$ сохраняет заданное положение в пространстве.

Поэтому при наклоне основания на выходе потенциометра $\Pi-1$ будет возникать напряжение, пропорциональное этому углу наклона: $u_1 = k_1 \alpha$. Двухстепенный гироскоп $\Gamma-2$ работает в режиме гиротаксометра. При наклонах основания угол прецессии его можно приближенно считать пропорциональным скорости наклона. На выходе потенциометра $\Pi-2$ будет поэтому напряжение $u_2 = k_2 p \alpha$. Сумма напряжений $u = u_1 + u_2$ определит результирующую передаточную функцию

$$W(p) = \frac{u}{\alpha} = k_1 + k_2 p = k_1 (1 + T p), \quad (10.22)$$

где $T = \frac{k_2}{k_1}$.

Этой передаточной функции соответствует структурная схема 10.6, а.

§ 10.4. Обратные связи

Как уже отмечалось выше, обратные связи (см. рис. 10.4, в) могут быть положительными и отрицательными. Кроме того, обратные связи могут быть жесткими и гибкими. Для уяснения последнего рассмотрим передаточную функцию (10.3), записанную для случая отрицательной обратной связи. Из этого выражения найдем передаточную функцию для установившегося

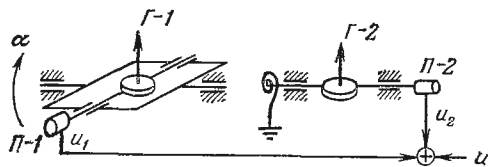


Рис. 10.8.

режима, для чего в (10.3) необходимо положить $p = 0$:

$$W_{\text{ср}}(0) = \frac{W_{\text{с}}(0)}{1 + W_{\text{с}}(0) W_{\text{ос}}(0)}. \quad (10.23)$$

Здесь может быть два случая. Если выполняется условие $W_{\text{ос}}(0) = 0$, что будет при использовании в цепи обратной связи дифференцирующих элементов, то в установившемся режиме $W_{\text{ср}}(0) = W_{\text{с}}(0)$. Это означает, что в этом режиме передаточная функция цепи, охваченной обратной связью, будет равна передаточной функции исходной цепи. Такая обратная связь

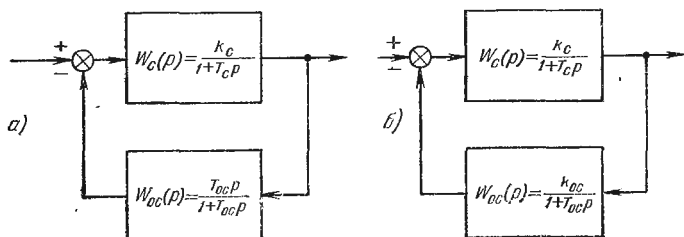


Рис. 10.9.

называется гибкой. Нетрудно видеть, что гибкая обратная связь действует только в переходных режимах, а в установившемся режиме она как бы отключается.

Если $W_{\text{ос}}(0) \neq 0$, то обратная связь действует не только в переходном, но и в установившемся режиме. В этом случае обратная связь называется жесткой.

Заметим, что случай, когда звено, охватываемое обратной связью, относится к числу интегрирующих звеньев и $W_{\text{с}}(0) \rightarrow \infty$ не вносит особенностей. Здесь по-прежнему условие $W_{\text{ос}}(0) = 0$ будет соответствовать случаю гибкой обратной связи, так как числитель (10.23) будет стремиться к бесконечности быстрее, чем знаменатель, и результирующая передаточная функция $W_{\text{ср}}(0) \rightarrow \infty$ так же, как и передаточная функция исходной цепи. Заметим также, что понятие гибкой или жесткой обратной связи связано с той величиной, которая принимается в качестве выходной в исходном звене. Так, например, обратная связь может быть гибкой по отношению к углу поворота вала двигателя и жесткой по отношению к скорости его вращения, которая является первой производной от угла поворота.

На рис. 10.9, а и 10.9, б изображены примеры гибкой и жесткой отрицательных обратных связей. Обратной связью замыкается апериодическое звено с передаточной функцией

$$W_{\text{с}}(p) = \frac{k_{\text{с}}}{1 + T_{\text{с}} p}.$$

В первом случае (рис. 10.9, а) обратная связь представляет собой дифференцирующее звено с замедлением (например, дифференцирующий конденсатор) с передаточной функцией

$$W_{\text{ос}}(p) = \frac{T_{\text{ос}} p}{1 + T_{\text{ос}} p}.$$

Результирующая передаточная функция

$$W_{\text{ср}}(p) = \frac{W_{\text{с}}(p)}{1 + W_{\text{с}}(p) W_{\text{ос}}(p)} = \frac{k_{\text{с}} (1 + T_{\text{ос}} p)}{1 + (T_{\text{с}} + T_{\text{ос}} + k_{\text{с}} T_{\text{ос}}) p + T_{\text{с}} T_{\text{ос}} p^2}.$$

Результирующий коэффициент передачи в установившемся состоянии равен k_c , так же как и в исходном апериодическом звене. Таким образом, эта обратная связь является гибкой. Наличие дифференцирующего элемента в цепи обратной связи и привело к получению гибкой обратной связи.

Во втором случае (рис. 10.9, б) обратная связь представляет собой апериодическое звено с передаточной функцией

$$W_{oc}(p) = \frac{k_{oc}}{1 + T_{oc}p}$$

Результирующая передаточная функция

$$\begin{aligned} W_{ск}(p) &= \frac{W_c(p)}{1 + W_c(p)W_{oc}(p)} = \frac{k_c(1 + T_{oc}p)}{1 + k_ck_{oc} + (T_c + T_{oc})p + T_cT_{oc}p^2} = \\ &= \frac{k_{ск}(1 + T_{oc}p)}{1 + \frac{T_c + T_{oc}}{1 + k_ck_{oc}}p + \frac{T_cT_{oc}}{1 + k_ck_{oc}}p^2}, \end{aligned}$$

где

$$k_{ск} = \frac{k_c}{1 + k_ck_{oc}}$$

представляет собой новое значение коэффициента передачи звена, замкнутого обратной связью. В рассмотренном случае обратная связь является жесткой, так как она изменяет коэффициент передачи звена в установившемся состоянии.

Весьма важным является случай, когда цепь обратной связи представляет собой идеальное безынерционное звено с передаточной функцией $W_{oc}(p) = k_{oc}$. Этот случай легко получить из последних равенств, положив в них $T_{oc} = 0$. В результате для апериодического звена, замкнутого такой отрицательной обратной связью, получим

$$W_{ск}(p) = \frac{k_c}{1 + k_ck_{oc}} \frac{1}{1 + \frac{T_cp}{1 + k_ck_{oc}}} = \frac{k_{ск}}{1 + T_{ск}p},$$

где

$$k_{ск} = \frac{k_c}{1 + k_ck_{oc}} \quad \text{и} \quad T_{ск} = \frac{T_c}{1 + k_ck_{oc}}.$$

Из этих выражений видно, что подобная отрицательная обратная связь уменьшает коэффициент передачи и постоянную времени апериодического звена в $1 + k_ck_{oc}$ раз, где k_ck_{oc} представляет собой коэффициент передачи по петле обратной связи.

На первый взгляд здесь имеет место полная аналогия со случаем уменьшения постоянной времени и коэффициента передачи звена в одинаковое число раз при помощи пассивного дифференцирующего звена (см. § 10.2). Однако это не так. Если рассмотреть случай двух апериодических звеньев первого порядка с одинаковыми постоянными времени $T'_0 = T''_0 = T_0$, включенных последовательно, то, как нетрудно показать, для уменьшения суммы постоянных времени $T'_0 + T''_0 = 2T_0$ в n раз при помощи пассивных дифференцирующих звеньев необходимо подавить результирующий коэффициент передачи в n^2 раз. При решении этой же задачи посредством использования жесткой обратной связи, охватывающей сразу оба звена, получение снижения суммы постоянных времени звеньев, входящих в систему регулирования, встречается в практике довольно часто. Это делает применение обратных связей обычно более предпочтительным.

В динамическом отношении отрицательные обратные связи могут оказывать самое различное действие. Однако, подобно тому как это было сделано

для последовательных корректирующих устройств, можно наметить три основных вида отрицательных обратных связей:

1) обратные связи, подавляющие высокие частоты (аналоги пассивного последовательного интегрирующего звена);

2) обратные связи, подавляющие низкие частоты (аналоги пассивного последовательного дифференцирующего звена).

3) обратные связи, подавляющие средние частоты (аналоги пассивного последовательного интегро-дифференцирующего звена);

Установить аналогю обратной связи с тем или иным последовательным корректирующим звеном можно при помощи формул перехода (10.5) и (10.6). Особенно важно иметь возможность перехода от последовательного корректирующего звена к эквивалентной обратной связи. Это определяется тем, что расчетным путем наиболее просто определить параметры последовательного корректирующего звена, а с точки зрения технического осуществления наиболее удобны обратные связи.

В табл. 10.4 приведены наиболее распространенные случаи перехода от электрических последовательных корректирующих звеньев к электрическим обратным связям. Эта таблица может быть использована также для перехода от последовательных звеньев к обратным связям любого типа (неэлектрическим), так как она позволяет по передаточной функции последовательного звена определить передаточную функцию эквивалентной отрицательной обратной связи.

Отрицательные обратные связи. Отрицательные корректирующие обратные связи очень часто используются для охвата исполнительных двигателей и серводвигателей (вспомогательных двигателей). В связи с этим рассмотрим наиболее важные случаи.

На рис. 10.10 изображено несколько случаев охвата электродвигателя отрицательной обратной

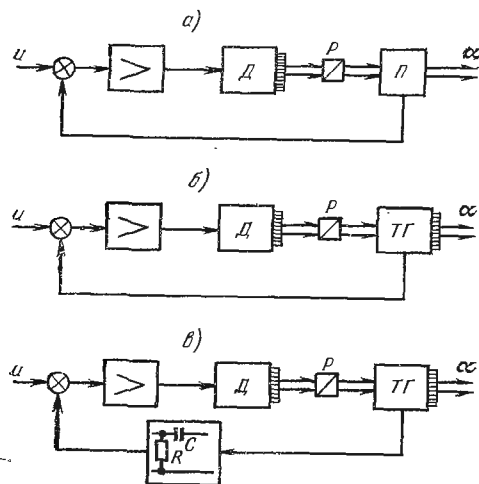


Рис. 10.10.

связью. Схема на рис. 10.10, а соответствует использованию линейного потенциометра Π , сцепленного через редуктор P с валом двигателя D . Напряжение, снимаемое с потенциометра, поступает на вход усилителя, от которого управляется двигатель. Пусть передаточная функция двигателя совместно с усилителем соответствует интегрирующему звену с замедлением:

$$W_c(p) = \frac{\alpha}{u} = \frac{k}{p(1 + T_M p)}, \quad (10.24)$$

где T_M — электромеханическая постоянная времени.

Передаточная функция цепи обратной связи $W_{oc}(p) = k_{\Pi}$ равна коэффициенту передачи потенциометра. Результирующая передаточная функция в соответствии с формулой (10.3) будет:

$$W_{ск}(p) = \frac{k}{T_M p^2 + p + k k_{\Pi}} = \frac{1}{k_{oc}} \frac{1}{1 + 2\zeta T_p p + T^2 p^2}, \quad (10.25)$$

где

$$T^2 = \frac{T_M}{k k_{\Pi}}, \quad \zeta = \frac{1}{2 \sqrt{k k_{\Pi} T_M}}, \quad \frac{1}{k_{oc}} = \frac{k}{k k_{\Pi}} = \frac{1}{k_{\Pi}}.$$

В этом случае имеется жесткая обратная связь, так как $W_{oc}(0) = k_{\pi} \neq 0$, которая превращает интегрирующее звено с замедлением, передаточная функция которого имеет вид (10.24), в колебательное звено с передаточной функцией (10.25). Чем больше коэффициент усиления по петле обратной связи kk_{π} , тем выше будет частота недемпфированных колебаний звена $q = T^{-1}$ и тем меньше параметр затухания ζ .

Аналогичный результат можно получить, если вместо обратной связи установить на выходном валу пружину, развивающую момент, пропорциональный углу поворота вала.

Схема на рис. 10.10, б соответствует использованию в цепи обратной связи тахогенератора $TГ$. В этом случае $W_{oc}(p) = k_{\tau}p$, где k_{τ} — коэффициент передачи тахогенератора.

Резльтирующая передаточная функция в соответствии с (10.3) будет

$$W_{ск}(p) = \frac{k}{T_M p^2 + (1 + kk_{\tau})p} = \frac{k'}{p(1 + T'_M p)}, \quad (10.26)$$

где

$$k' = \frac{k}{1 + kk_{\tau}} \quad \text{и} \quad T'_M = \frac{T_M}{1 + kk_{\tau}}.$$

Передаточная функция (10.26) отличается от исходной передаточной функции (10.24) только уменьшением в $1 + kk_{\tau}$ раз коэффициента передачи и постоянной времени. Если в соответствии с (10.24) в качестве выходной величины рассматривать угол поворота вала двигателя α , то эта обратная связь является гибкой, так как $W_{oc}(0) = 0$.

Для схемы, изображенной на рис. 10.10, б, в качестве выходной величины можно рассматривать скорость вращения двигателя. Тогда обратная связь по напряжению тахогенератора оказывается жесткой, и в этом случае $W_{oc}(0) = k_{\tau} \neq 0$.

В соответствии с табл. 10.4 (№ 5) этот случай аналогичен включению последовательного пассивного дифференцирующего звена. Аналогичный результат может быть получен при установке на валу двигателя демпфера, развивающего момент сопротивления, пропорциональный скорости вращения (скоростное трение). В этом случае коэффициент передачи и постоянная времени двигателя уменьшатся в одинаковое число раз.

На рис. 10.10, в изображено введение обратной связи по ускорению. В этом случае передаточная функция цепи обратной связи будет

$$W_{oc}(p) = k_{\tau} p \frac{T_K p}{1 + T_K p}$$

где $T_K = LC$ — постоянная времени дифференцирующего конденсатора, а k_{τ} — коэффициент передачи тахогенератора.

Резльтирующая передаточная функция для этого случая, в соответствии с формулой (10.3), будет

$$W_{ск}(p) = \frac{k(1 + T_K p)}{p[1 + (T_M + T_K + kk_{\tau}T_K)p + T_M T_K p^2]} \quad (10.27)$$

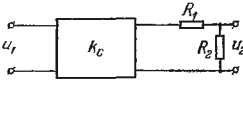
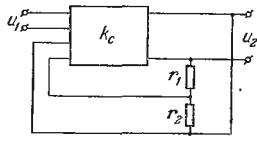
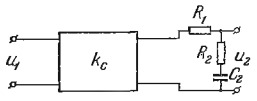
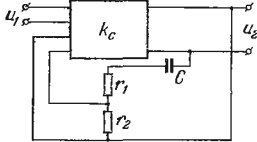
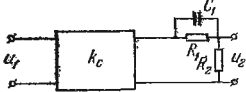
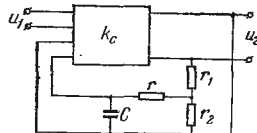
В соответствии с табл. 10.4 (№ 6) этот случай аналогичен включению последовательного интегро-дифференцирующего звена.

Представляет интерес рассмотрение частного случая, когда можно приближенно считать дифференциатор идеальным (рис. 10.10, в). Тогда передаточная функция цепи обратной связи будет $W_{oc}(p) = k_{\tau} T_K p^2$, а результирующая передаточная функция двигателя совместно с обратной связью примет вид

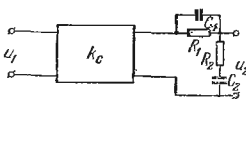
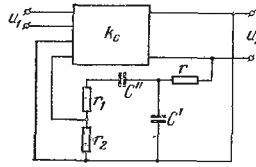
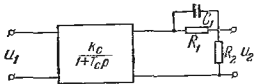
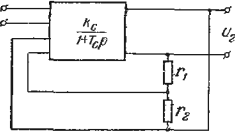
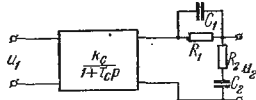
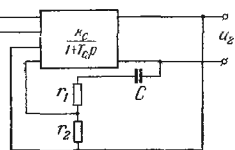
$$W_{ск}(p) = \frac{k}{p[1 + (T_M + kk_{\tau}T_K)p]} = \frac{k}{p(1 + T'_M p)}, \quad (10.28)$$

Таблица 10.4

Эквивалентные корректирующие устройства

№ п.п.	Основное звено	Звено последовательного типа	Отрицательная обратная связь	Свойства
1	Безынерционный усилитель $W_c(p) = k_c$	Делитель напряжения  $W_{пв}(p) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = k_{пв}$	Делитель напряжения  $W_{oc}(p) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} = k_{oc},$ $\frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{1 - k_{пв}}{k_c k_{пв}}$	Подавления усиление
2	То же	Интегрирующее пассивное звено  $W_{пв}(p) = \frac{1 + T_2 p}{1 + T_1 p} \quad (T_1 > T_2),$ $T_1 = (R_1 + R_2) C_2, \quad T_2 = R_2 C_2$	Дифференцирующее звено  $W_{oc}(p) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \frac{T_2 p}{1 + T_2 p},$ $(r_1 + r_2) C = T_2,$ $\frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{T_1 - T_2}{k_c T_2}$	Подавление верхних частот
3	То же	Дифференцирующее пассивное звено  $W_{пв}(p) = \frac{T_2}{T_1} \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p},$ $(T_1 > T_2),$ $T_1 = R_1 C_1,$ $T_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_1$	Апериодическое звено  $W_{oc}(p) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \frac{1}{1 + T_1 p},$ $\frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{T_1 - T_2}{k_c T_2},$ $\left(r + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) C = T_1$	Подавление низких частот

Продолжение табл. 10.4

№ п.п.	Основное звено	Звено последовательного типа	Отрицательная обратная связь	Свойства
4	Безынерционный усилитель	Интегро-дифференцирующее звено  $W_{\text{пз}}(p) = \frac{(1+T_1p)(1+T_2p)}{(1+T_3p)(1+T_4p)},$ $T_1 = R_1C_1, \quad T_2 = R_2C_2, \quad T_3T_4 = T_1T_2,$ $T_3 + T_4 = T_1 + \frac{R_1 + R_2}{R_2} T_2$	Апериодическое и дифференцирующее звенья  $W_{\text{ос}}(p) = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \frac{T_2p}{(1+T_1p)(1+T_2p)},$ $rC' \approx T_1, \quad (r_1 + r_2)C'' \approx T_2,$ $r_2/(r_1 + r_2) = R_1/k_c R_2$	Подавление средних частот
5	Инерционный усилитель	Пассивное дифференцирующее звено (частный случай, когда $T_1 = T_c$)  $W_{\text{пз}}(p) = \frac{T_2}{T_1} \frac{1+T_1p}{1+T_2p} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1+T_1p}{1+T_2p} (T_1 > T_2),$ $T_1 = R_1C_1 = T_c, \quad T_2 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} C_1$	Делитель напряжения  $k_{\text{ос}} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{T_1 - T_2}{k_c T_2} = \frac{R_1}{k_c R_2}$	Подавление низких частот
6	То же	Интегро-дифференцирующее звено (частный случай, когда $T_1 = T_c$)  $W_{\text{пз}}(p) = \frac{(1+T_1p)(1+T_2p)}{(1+T_3p)(1+T_4p)},$ $T_1 = R_1C_1 = T_c, \quad T_2 = R_2C_2, \quad T_3T_4 = T_1T_2,$ $T_3 + T_4 = T_1 + \frac{R_1 + R_2}{R_2} T_2$	Дифференцирующее звено  $W_{\text{ос}}(p) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \frac{T_2p}{(1+T_2p)},$ $(r_1 + r_2)C = T_2,$ $\frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{R_1}{k_c R_2}$	Подавление средних частот

где $T'_m = T_m + kk_T T_k$ — результирующая электромеханическая постоянная времени двигателя.

Из формулы (10.28) видно, что обратная связь по ускорению эквивалентна установке на валу двигателя дополнительного маховика, увеличивающего электромеханическую постоянную времени двигателя.

На рис. 10.11 показано введение обратной связи в гидравлическом серводвигателе. Случай, изображенный на рис. 10.11, а, соответствует жесткой отрицательной обратной связи или так называемому серводвигателю с выключением

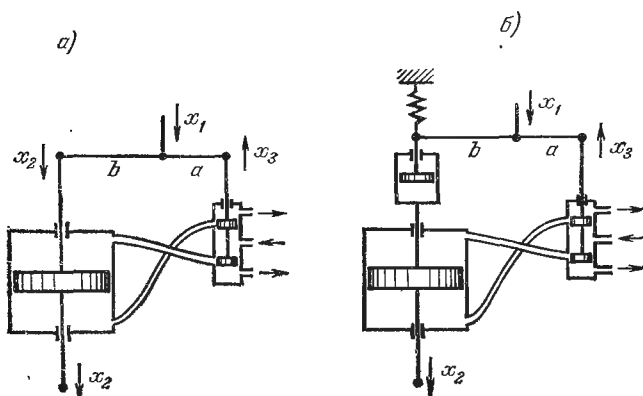


Рис. 10.11.

чателем. Передаточная функция серводвигателя без обратной связи, определяемая по отношению перемещений x_1 и x_2 , соответствует (10.24). Передаточная функция цепи обратной связи $W_{oc}(p) = \frac{x_3}{x_2} = \frac{a}{b} = k_n = \text{const}$, где a и b — плечи рычага. В результате этот случай сводится к рассмотренной выше схеме, изображенной на рис. 10.10, а. Результирующая передаточная функция будет совпадать с (10.25).

Рис. 10.11, б соответствует гибкой обратной связи, передаточная функция которой

$$W_{oc}(p) = \frac{x_3}{x_2} = \frac{a}{b} \frac{T_d p}{1 + T_d p} = \frac{k_n T_d p}{1 + T_d p},$$

где T_d — постоянная времени дифференцирующего устройства, состоящего из демфера и пружины (см. рис. 4.24, з).

Результирующая передаточная функция в соответствии с формулой (10.3) будет

$$W_{ск}(p) = \frac{k(1 + T_d p)}{p[1 + kk_n T_d + (T_m + T_d)p + T_m T_d p^2]} = \frac{k'(1 + T_d p)}{p(1 + 2\zeta T_d p + T_d^2 p^2)}, \quad (10.29)$$

где

$$k' = \frac{k}{1 + kk_n T_d}, \quad T^2 = \frac{T_m T_d}{1 + kk_n T_d}, \quad \zeta = \frac{T_m + T_d}{2 \sqrt{(1 + kk_n T_d) T_m T_d}}.$$

Из формулы (10.29) видно, что подобная гибкая обратная связь сохраняет интегрирующие свойства серводвигателя, уменьшает его коэффициент передачи, вводит производную в соответствии с членом $(1 + T_d p)$ и образует колебательное звено с частотой недемпфированных колебаний $q = T^{-1}$

и параметром затухания ζ . Если частота q достаточно велика, то выражение (10.29) можно приближенно записать в виде

$$W_{\text{ск}}(p) \approx \frac{k'(1+T_{\text{д}}p)}{p} \quad (10.30)$$

Передаточная функция (10.30) совпадает с передаточной функцией изодромного устройства (9.10). В связи с этим гибкую обратную связь, изображенную на рис. 10.24, б, называют иногда изодромной обратной связью.

Положительные обратные связи. Положительные обратные связи находят значительно меньшее распространение в качестве корректирующих средств по сравнению с отрицательными. Встречается применение положительных обратных связей в качестве так называемых корректоров ошибки (рис. 10.12). Прямая цепь представляет собой безынерционное звено с передаточной функцией

$W_c(p) = k_c$, а в цепи обратной связи установлено апериодическое звено первого порядка с передаточной функцией $W_{\text{ос}}(p) = \frac{k}{1+Tp}$. Результирующая передаточная функция в соответствии с (10.3) будет

$$W_{\text{ск}}(p) = \frac{k_c(1+Tp)}{1-k_ck+Tp}. \quad (10.31)$$

При выполнении условия $k_ck = 1$ формула (10.31) будет соответствовать передаточной функции изодромного устройства (9.10). Это позволяет построить изодромное устройство, повышающее астатизм системы, на базе апериодического звена, а не интегратора, как показано на рис. 9.4. Отсутствие интегратора упрощает схему, но точное выполнение требования $k_ck = 1$ затрудняется необходимостью тщательного масштабирования.

Положительные обратные связи находят также применение в магнитных усилителях с целью уменьшения постоянных времени последних при сохранении коэффициента усиления по мощности. Это делается следующим образом. Предположим, что усилитель имеет передаточную функцию, соответствующую апериодическому звену,

$$W_y(p) = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{k_y}{1+T_y p},$$

где T_y — постоянная времени усилителя, k_y — коэффициент усиления (коэффициент передачи) по напряжению.

При замыкании усилителя положительной жесткой обратной связью с передаточной функцией $W_{\text{ос}}(p) = k_{\text{ос}}$ в соответствии с (10.3) имеем результирующую передаточную функцию

$$W_{\text{ук}}(p) = \frac{W_y(p)}{1 - W_y(p)W_{\text{ос}}(p)} = \frac{k_y}{1 - k_y k_{\text{ос}} + T_y p}.$$

Эта передаточная функция может быть также представлена в следующем виде:

$$W_{\text{ук}}(p) = \frac{k_y}{1 - k_y k_{\text{ос}}} \frac{1}{1 + \frac{T}{1 - k_y k_{\text{ос}}}} = \frac{k'_y}{1 + T'_y p},$$

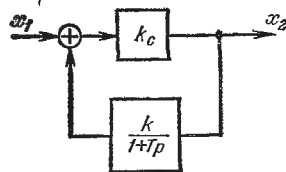


Рис. 10.12.

где

$$k'_y = \frac{k_y}{1 - k_y k_{oc}} \quad \text{и} \quad T'_y = \frac{T_y}{1 - k_y k_{oc}}$$

— новые значения коэффициента усиления по напряжению и постоянной времени усилителя. Нетрудно видеть, что при помощи жесткой положительной обратной связи можно в одинаковое число раз увеличить коэффициент усиления по напряжению и постоянную времени усилителя.

Коэффициент усиления усилителя по мощности равен отношению выходной и входной мощностей в установившемся режиме:

$$k_P = \frac{P_{\text{ВЫХ}}}{P_{\text{ВХ}}} = \frac{R_{\text{ВХ}} U_{\text{ВЫХ}}^2}{R_{\text{Н}} U_{\text{ВХ}}^2} = \frac{R_{\text{ВХ}}}{R_{\text{Н}}} k_y^2,$$

где $R_{\text{Н}}$ и $R_{\text{ВХ}}$ — сопротивление нагрузки и входное сопротивление усилителя.

Качество усилителя может характеризоваться отношением коэффициента усиления по мощности к постоянной времени:

$$\frac{k_P}{T'_y} = \frac{R_{\text{ВХ}}}{R_{\text{Н}} T_y} k_y^2.$$

При введении положительной обратной связи необходимо взять новое значение коэффициента усиления по мощности ($R_{\text{ВХ}}$ и $R_{\text{Н}}$ считаются постоянными)

$$k'_P = \frac{R_{\text{ВХ}}}{R_{\text{Н}}} (k'_y)^2$$

и новые значения коэффициента усиления по напряжению k'_y и постоянной времени T'_y . В результате получаем

$$\frac{k'_P}{T'_y} = \frac{R_{\text{ВХ}} (k'_y)^2}{R_{\text{Н}} T'_y} = \frac{R_{\text{ВХ}}}{R_{\text{Н}}} \frac{k_y^2}{T_y (1 - k_y k_{oc})} = \frac{k_P}{T_y (1 - k_y k_{oc})}.$$

Таким образом, введение положительной обратной связи позволяет увеличить отношение коэффициента усиления по мощности к постоянной времени усилителя. При заданном значении коэффициента усиления по мощности усилитель с положительной обратной связью будет иметь меньшее значение результирующей постоянной времени.

§ 10.5. Методы повышения запаса устойчивости

Повышение запаса устойчивости, или *демпфирование*, системы регулирования сводится в конечном счете к рациональному перераспределению полюсов и нулей передаточной функции замкнутой системы для задающего или возмущающего воздействия. Передаточная функция замкнутой системы связана с передаточной функцией разомкнутой системы жестким соотношением. Поэтому под демпфированием можно понимать также рациональное перераспределение полюсов и нулей передаточной функции разомкнутой системы.

Ответить на вопрос, каким образом необходимо перераспределить полюсы и нули передаточной функции замкнутой или разомкнутой системы, можно на основании применения критериев устойчивости и критериев качества. Наиболее полно этот вопрос решается при помощи синтеза корректирующих средств. Некоторые методы синтеза будут изложены в главе 12.

Здесь будут рассмотрены только основные идеи, которые используются при изменении динамических свойств системы с целью повышения запаса устойчивости. Рассмотрение может вестись на основании различных критериев качества. Здесь это будет сделано на наиболее наглядных примерах, использующих амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы.

На рис. 10.13 изображена ветвь амплитудно-фазовой характеристики при положительных частотах для системы регулирования с астатизмом первого порядка. Будем предполагать, что в разомкнутом состоянии система устойчива (не имеет полюсов в правой полуплоскости). Тогда по виду амплитудно-фазовой характеристики можно установить, что в замкнутом состоянии система будет неустойчивой. Это вытекает из того, что характеристика охватывает точку $(-1, j0)$. Задачей демпфирования является такая деформация амплитудно-фазовой характеристики, в результате которой характеристика не только не будет охватывать точку $(-1, j0)$, но будет достаточно удалена от этой точки. Величину требуемого удаления характеристики от точки $(-1, j0)$ можно установить, воспользовавшись каким-либо критерием качества. Здесь наиболее просто использовать показатель колебательности. Тогда амплитудно-фазовая характеристика не должна заходить в окружность, соответствующую заданному значению показателя колебательности $M = \text{const}$.

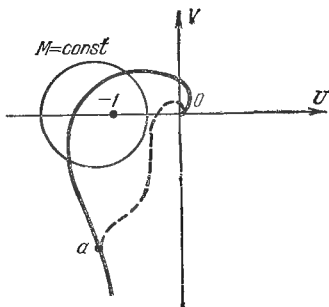


Рис. 10.13.

Деформация амплитудно-фазовой характеристики с целью получения устойчивости, а также запаса устойчивости может производиться посредством использования корректирующих звеньев различного типа: последовательных, параллельных и обратных связей. Так как в линейной системе для каждого звена какого-либо типа может быть найдено эквивалентное звено другого типа, то достаточно рассмотреть действие звеньев одного определенного типа. Наиболее наглядно может быть прослежено действие последовательных корректирующих звеньев, и для них наиболее просто могут быть вычислены требуемые параметры. Поэтому в дальнейшем в основном будут рассматриваться последовательные корректирующие звенья.

Деформация амплитудно-фазовой характеристики может быть произведена четырьмя основными способами, которые будут рассмотрены ниже в отдельности.

Демпфирование с подавлением высоких частот. Выведение амплитудно-фазовой характеристики из запретной зоны (рис. 10.13) может быть осуществлено посредством подавления пропускания разомкнутой системой всех частот, которые превышают частоту ω_a , соответствующую некоторой точке a на характеристике. Тогда амплитудно-фазовая характеристика примет вид, изображенный на рис. 10.13 пунктиром. Как видно из этого рисунка, деформированной характеристике будет соответствовать замкнутая система, которая является не только устойчивой, но и имеющей необходимый запас устойчивости.

Подавление усиления на высоких частотах всегда сопровождается появлением отрицательных фазовых сдвигов. Поэтому этот метод демпфирования может также называться демпфированием с внесением отрицательных фазовых сдвигов.

Подавление высоких частот может осуществляться различными способами. Наиболее просто это получается при введении последовательно в цепь регулирования апериодического звена первого порядка с относительно большой постоянной времени и коэффициентом передачи $k = 1$. Передаточная функция такого звена

$$W_k(p) = \frac{1}{1 + T_0 p}. \quad (10.32)$$

Легко показать, что подобное звено может всегда привести к получению желаемого запаса устойчивости в статических системах регулирования

с минимально-фазовыми звеньями. Пусть, например, передаточная функция разомкнутой статической системы регулирования имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) \dots (1+\tau_m p)}{(1+T_1 p)(1+T_2 p) \dots (1+T_n p)}, \quad (10.33)$$

где $\tau_1, \dots, \tau_m$ и $T_1, \dots, T_n$ — вещественные или комплексные постоянные времена с положительными вещественными частями, а K — общий коэффициент усиления, лежащий в пределах $0 < K < \infty$ ¹⁾.

Пусть л. а. х. и л. ф. х. соответствуют неустойчивой системе в замкнутом состоянии (рис. 10.14). Это определяется тем, что точка 2 лежит левее точки 1. Тогда, каковы бы ни были значения постоянных времени, входящих в (10.53), всегда можно отыскать такую частоту ω_n , что для всех частот $\omega < \omega_n$ л. а. х. будет сколь угодно мало отличаться от первой низкочастотной асимптоты $20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg K$, а фазовый сдвиг — от нулевого.

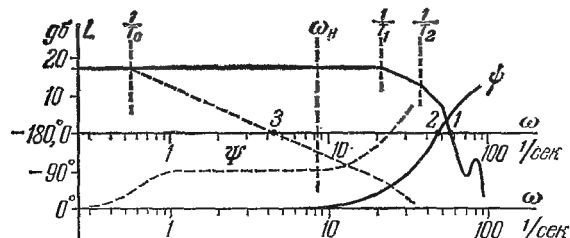


Рис. 10.14.

Если ввести теперь последовательно в цепь регулирования аperiodическое звено первого порядка с передаточной функцией (10.32) так, чтобы положительные ординаты л. а. х. располагались только в области частот $\omega < \omega_n$ (пунктирные характеристики на рис. 10.14), то в результате получится устойчивая система. Это вытекает из того, что левее частоты среза л. а. х. (точка 3 на рис. 10.14) передаточная функция разомкнутой системы со сколь угодно большой точностью может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{K}{1+T_0 p}. \quad (10.34)$$

Этой передаточной функции соответствует устойчивая в замкнутом состоянии система. Все остальные постоянные времена передаточной функции (10.33) не смогут нарушить устойчивости либо запаса устойчивости, так как соответствующие им сопрягающие частоты лежат значительно правее частоты среза л. а. х. и они могут деформировать только высокочастотные «хвосты» л. а. х. и л. ф. х. Получается, что введение большой постоянной времени T_0 делает все остальные постоянные времена относительно малыми, в результате чего и достигается эффект демпфирования.

Из рис. 10.14 видно, что этот результат может быть получен при любой положительной величине общего коэффициента усиления. Если зафиксировать положение точки 3, соответствующей частоте среза ω_c , то запас устойчивости в системе не будет нарушаться при сколь угодно большом увеличении K и одновременном увеличении T_0 . Для этого нужно только выполнить условие

$$\frac{K}{T_0} = \omega_c = \text{const.} \quad (10.35)$$

Демпфирование статических систем может быть осуществлено и более сложными корректирующими звеньями, вносящими подавление высоких частот и отрицательные фазовые сдвиги, например при помощи пассивного интегрирующего звена (табл. 10.1) или его аналогов (табл. 10.4).

1) Случай наличия консервативных звеньев здесь не рассматривается.

Также можно показать, что в астатических системах первого порядка, состоящих из минимально-фазовых звеньев, желаемый запас устойчивости может быть всегда получен при введении последовательного пассивного интегрирующего звена, имеющего передаточную функцию вида

$$W_{\Gamma}(p) = \frac{1 + T_2 p}{1 + T_1 p} \quad (T_1 > T_2). \quad (10.36)$$

Цель будет всегда достигнута при достаточно больших значениях постоянных времени T_1 и T_2 . Эффект демпфирования достигается здесь за счет того, что при увеличении T_1 и T_2 результирующая передаточная функция разомкнутой системы с любой степенью точности может быть представлена в виде произведения (10.36) и множителя K/p , а постоянные времени системы оказываются относительно малыми.

В астатических системах второго порядка требуемый запас устойчивости может быть получен при помощи подавления высоких частот только в некоторых случаях.

Достоинством демпфирования с подавлением высоких частот является то, что система регулирования оказывается менее подверженной действию высокочастотных помех, так как корректирующее звено представляет собой фильтр низких частот.

Недостатком демпфирования с подавлением высоких частот является то, что снижение полосы пропускания системы означает понижение быстродействия. Поэтому такой метод демпфирования может применяться в тех случаях, когда снижение быстродействия системы является допустимым.

Демпфирование с поднятием высоких частот. Выведение амплитудно-фазовой характеристики из запретной зоны может быть произведено поворотом ее высокочастотной части в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки. Это показано пунктиром на рис. 10.15.

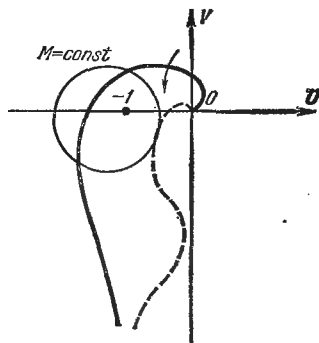


Рис. 10.15.

Положительный фазовый сдвиг (фазовое упреждение) может быть получен посредством включения в канал регулирования звеньев дифференцирующего типа.

Если параллельно части основного канала регулирования включить идеальное дифференцирующее звено (рис. 10.6), то результирующая передаточная функция будет иметь вид

$$W_{\kappa}(p) = 1 + T_1 p. \quad (10.37)$$

При введении такого звена будет получен дополнительный положительный фазовый сдвиг

$$\psi = \arctg \omega T_1. \quad (10.38)$$

В области высоких частот фазовый сдвиг близок к 90° . Это и вызывает «закручивание» амплитудно-фазовой характеристики в высокочастотной области (рис. 10.15).

Одновременно с положительным фазовым сдвигом звено увеличивает пропускание высоких частот, так как модуль его частотной передаточной функции

$$A(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \quad (10.39)$$

будет тем больше, чем выше частота.

В случае, если положительный фазовый сдвиг, вносимый дифференцирующим звеном, является недостаточным для выведения амплитудно-фазовой характеристики из запретной зоны, могут применяться два дифференцирующих звена, включенных последовательно, что соответствует введению первой и второй производных от сигнала ошибки. Для идеальных дифференцирующих звеньев передаточная функция будет иметь вид

$$W(p) = (1 + T_1 p)(1 + T_2 p) = 1 + ap + bp^2. \quad (10.40)$$

Дополнительный фазовый сдвиг в этом случае будет

$$\psi = \arctg \omega T_1 + \arctg \omega T_2. \quad (10.41)$$

Поднятие высоких частот будет здесь еще более заметным, так как модуль частотной передаточной функции этих звеньев

$$A(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}. \quad (10.42)$$

Реализация дифференцирующего звена, близкого к идеальному, может быть осуществлена, например, при использовании в следящей системе воспроизведения угла тахогенераторов. Этот случай будет описан ниже при рассмотрении конкретного примера. Хорошие результаты дает также применение гироскопов и дифференцирующих операционных усилителей.

В системах автоматического регулирования наиболее часто употребляются пассивные дифференцирующие звенья, подобные рассмотренным в § 10.2 (см. табл. 10.1). Однако из табл. 10.1 следует, что положительный фазовый сдвиг вносится этими звеньями не за счет поднятия высоких, а за счет подавления низких частот. Это вытекает из вида их передаточной функции:

$$W_K(p) = \frac{T_2}{T_1} \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p} = G_0 \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}. \quad (10.43)$$

В установившемся состоянии коэффициент передачи звена $G_0 < 1$. Поэтому введение такого звена в канал регулирования снижает общий коэффициент усиления разомкнутой цепи в G_0^{-1} раз.

С точки зрения выполнения требований по точности допустить такое снижение коэффициента усиления нельзя. Поэтому одновременно с включением в цепь пассивного дифференцирующего звена необходимо предусмотреть восстановление прежнего коэффициента усиления при помощи введения дополнительного усилителя или поднятия коэффициента усиления имеющегося усилителя. В результате общая передаточная функция пассивного дифференцирующего звена вместе с дополнительным усилителем будет иметь вид

$$W_K(p) = \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p} \quad (T_1 > T_2). \quad (10.44)$$

Дополнительный фазовый сдвиг

$$\psi = \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2 \geq 0. \quad (10.45)$$

Модуль частотной передаточной функции в этом случае

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}} \quad (10.46)$$

показывает на поднятие высоких частот. При $\omega = 0$ коэффициент передачи $A(0) = 1$, и при $\omega \rightarrow \infty$ имеем $A(\infty) = \frac{T_1}{T_2} > 1$.

Логарифмические частотные характеристики пассивного дифференцирующего звена совместно с дополнительным усилителем, компенсирующим затухание, вносимое звеном на низких частотах, изображены на рис. 10.16.

Здесь же пунктиром изображены характеристики идеального дифференцирующего звена, имеющего передаточную функцию вида (10.37). Как видно из сравнения этих характеристик, пассивное звено, в отличие от идеального, дает положительный фазовый сдвиг в ограниченной области частот при ограниченном поднятии высоких частот.

Аналогичный эффект дает применение отрицательных обратных связей, содержащих аperiодическое звено (табл. 10.4).

Характеристика, подобная изображенной на рис. 10.16, может быть получена также при использовании активного дифференцирующего звена, состоящего из операционного усилителя (в режиме дифференцирования), включенного параллельно основному каналу регулирования в соответствии со схемой, изображенной на рис. 10.6.

Демпфирование посредством поднятия высоких частот или, соответственно, введение упрещения по фазе является универсальным методом, так как позволяет получить требуемый результат практически при любых передаточных функциях исходной системы, в том числе и при наличии в канале регулирования неминимально-фазовых звеньев. Однако это не означает, что данный метод может быть рекомендован для использования во всех случаях. Поднятие верхних частот расширяет полосу пропускания системы, что приводит к увеличению ее быстродействия и одновременно усиливает влияние на систему высокочастотных помех. При большом уровне помех на входе или в канале регулирования поднятие верхних частот может привести к неприемлемым результатам. Поэтому данный метод демпфирования имеет ограниченную сферу применения. Она определяется, в основном, теми случаями, когда введение положительного фазового сдвига является принципиально необходимым для получения устойчивой работы, а также теми случаями, когда необходимо повысить быстродействие системы при допустимости возрастания влияния высокочастотных помех.

В некоторых случаях при поднятии верхних частот приходится предусматривать меры одновременного подавления высокочастотных помех путем введения специальных узко- или широкополосных фильтров. Иногда задача может оказаться вследствие этого весьма сложной.

Демпфирование с подавлением средних частот. Выведение амплитуднофазовой характеристики из запретной зоны (рис. 10.17) может быть произведено при помощи подавления усиления в области частот, соответствующей отрезку характеристики между точками *a* и *b*. В результате будет получена характеристика, изображенная на рис. 10.17 пунктиром.

Подавление средних частот может быть осуществлено включением в цепь регулирования последовательного интегро-дифференцирующего звена (табл. 10.4), имеющего л. а. х., изображенную там же. Из вида л. а. х.

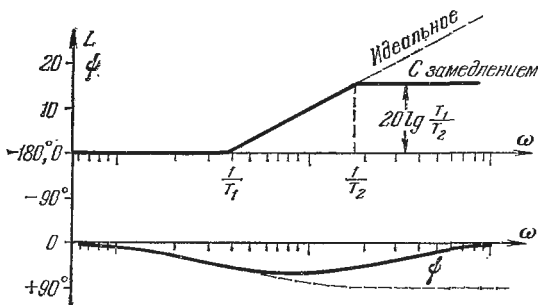


Рис. 10.16.

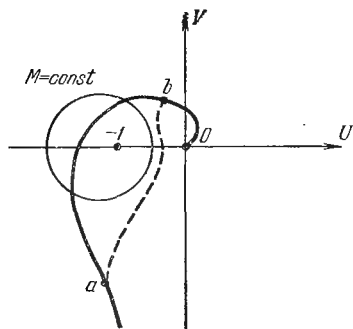


Рис. 10.17.

вытекает, что звено подавляет усиление в некоторой области «средних» частот. Вместо пассивного интегро-дифференцирующего звена могут применяться его эквиваленты, например гибкая отрицательная обратная связь, охватывающая инерционный усилитель (табл. 10.4).

По своим свойствам демпфирование с подавлением средних частот занимает промежуточное положение между двумя рассмотренными методами. При демпфировании с подавлением средних частот сохраняется быстродействие системы и сохраняется полоса пропускания. Этот вид демпфирования является наиболее распространенным.

Демпфирование с введением отрицательных фазовых сдвигов. Сущность этого метода можно уяснить, например, из рассмотрения рис. 6.22. На рис. 6.22, б изображен случай, когда из-за наличия в канале разомкнутой системы консервативного звена, имеющего чисто мнимые полюсы, замкнутая система будет неустойчивой. Добавление отрицательного фазового сдвига вызовет «закручивание» а. ф. х. по часовой стрелке. В результате система в замкнутом состоянии может быть сделана устойчивой (рис. 6.22, а).

Введение отрицательного фазового сдвига производится использованием последовательных корректирующих звеньев фазосдвигающего типа (табл. 10.1). Так как подобные звенья оказываются обычно неминимально-фазовыми, то такой метод демпфирования иногда называют в литературе методом демпфирования с использованием неминимально-фазовых звеньев.

Демпфирование с введением отрицательных фазовых сдвигов оказывается эффективным в случае наличия в канале разомкнутой системы консервативных, а также колебательных звеньев со слабым демпфированием. В первом случае это приводит к появлению в амплитудной частотной характеристике (или в л. а. х.) резонансных пиков бесконечной высоты, а во втором — к резонансным пикам конечной, но значительной высоты. Использование демпфирования других типов здесь оказывается затруднительным.

По своим свойствам этот метод демпфирования сходен со случаем подавления средних частот, так как фазосдвигающие звенья обычно не вносят изменений в амплитудную частотную характеристику и модуль их частотной передаточной функции $|W_{\text{пз}}(j\omega)| = 1$. В результате сохраняется быстродействие демпфируемой системы и сохраняется ее полоса пропускания.

Рассмотренные выше методы демпфирования систем регулирования являются основными, но лишь иллюстрируют те идеи, которые используются для повышения запаса устойчивости. В практике, в зависимости от конкретных условий, могут использоваться и более сложные изменения динамических свойств системы регулирования. Так, например, может осуществляться подавление средних частот с одновременным поднятием высоких, поднятие высоких частот с подавлением их некоторой области (фильтрация определенных частот) и т. п.

§ 10.6. Примеры

1. Система управления движущимся объектом. Рассмотрим систему управления, изображенную на рис. 10.18. Здесь обозначено: ГН — гироскоп

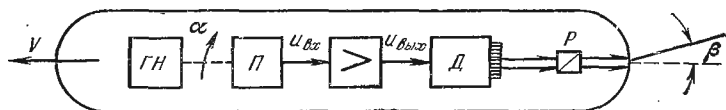


Рис. 10.18.

направления, показывающий отклонение движущегося объекта от заданного курса; П — потенциометр; Д — двигатель рулевого устройства и Р — редук-

тор. При отклонении объекта от заданного курса на угол α движок потенциометра отклоняется на тот же угол. В результате на усилитель поступает напряжение. Пройдя усилитель, это напряжение поступает на двигатель, и руль объекта начинает поворачиваться.

Составим передаточную функцию разомкнутой системы. Для этой цели отсоединим гироскоп направления от объекта и введем обозначения: α_1 — угол отклонения гироскопа и α_2 — угол поворота объекта (в замкнутой системе $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$).

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Найдем передаточные функции отдельных звеньев.

Потенциометр. Считая потенциометр безынерционным звеном, получаем

$$W_1(p) = \frac{u_{вх}}{\alpha_1} = k_1, \quad (10.47)$$

где k_1 — крутизна потенциометра $\left[\frac{e}{рад} \right]$.

Усилитель. При безынерционном усилителе

$$W_2(p) = \frac{u_{вых}}{u_{вх}} = k_2, \quad (10.48)$$

где k_2 — коэффициент усиления по напряжению.

Двигатель совместно с редуктором. Передаточная функция двигателя с редуктором в случае пренебрежения переходными процессами в обмотке управления имеет вид

$$W_3(p) = \frac{k_3}{p(1+T_{дp})}, \quad (10.49)$$

где k_3 — коэффициент передачи двигателя совместно с редуктором по скорости $\left[\frac{рад}{e \cdot сек} \right]$, а $T_{д}$ — электромеханическая постоянная времени.

Объект. Будем считать, что угловая скорость поворота объекта по курсу пропорциональна углу отклонения руля. Тогда угол поворота будет пропорционален интегралу от угла поворота руля по времени.

При учете инерционности объекта его передаточная функция будет иметь вид

$$W_4(p) = \frac{k_4}{p(1+T_0p)}, \quad (10.50)$$

где k_4 — коэффициент передачи объекта $\left[\frac{1}{сек} \right]$, T_0 — постоянная времени объекта.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = W_1(p) W_2(p) W_3(p) W_4(p) = \frac{K}{p^2(1+T_{дp})(1+T_0p)}, \quad (10.51)$$

где $K \left[\frac{1}{сек^2} \right]$ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы.

Найдем характеристическое уравнение системы

$$1 + W(p) = 0. \quad (10.52)$$

После подстановки получаем

$$T_{д}T_0p^4 + (T_{д} + T_0)p^3 + p^2 + K = 0. \quad (10.53)$$

Достаточно одного взгляда на это уравнение, чтобы убедиться в неустойчивости системы при любом коэффициенте усиления K . Это вытекает из того, что в характеристическом уравнении отсутствует член с оператором в первой степени. Такая неустойчивость называется структурной неустойчивостью, так как при данной структуре изменение параметров схемы любым образом не дает устойчивости.

На рис. 10.19 изображена амплитудно-фазовая характеристика, соответствующая передаточной функции разомкнутой системы (10.54). Из вида характеристики вытекает, что устойчивость может быть достигнута только при «закручивании» высокочастотной части годографа против часовой стрелки, что показано на рис. 10.19 пунктиром. Только в этом случае амплитудно-фазовая характеристика не будет охватывать точку $(-1, j0)$ и замкнутая

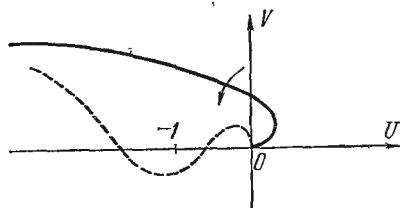


Рис. 10.19.

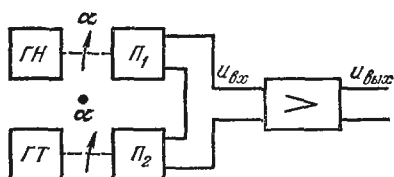


Рис. 10.20.

система окажется устойчивой. Для введения положительного фазового сдвига необходимо применить демпфирование с поднятием высоких частот, что достигается включением звеньев дифференцирующего типа.

На рис. 10.20 изображена схема использования в качестве чувствительного элемента кроме гироскопа направления $\Gamma\mathcal{H}$ дополнительного дифференцирующего гироскопа — гиротаксометра $\Gamma\mathcal{T}$. Угол поворота движка потенциометра Π_2 можно считать пропорциональным угловой скорости $\dot{\alpha}$ поворота гиротаксометра. В результате вместо (10.44) будем иметь

$$W_1(p) = \frac{u_{\text{вх}}}{\alpha_1} = k_1 + k_5 p = k_1 (1 + T_K p), \quad (10.54)$$

где постоянная времени $T_K = \frac{k_5}{k_1}$.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = W_1(p) W_2(p) W_3(p) W_4(p) = \frac{K(1 + T_K p)}{p^2(1 + T_d p)(1 + T_0 p)}. \quad (10.55)$$

Характеристическое уравнение системы (10.72) в этом случае уже не имеет пропусков членов:

$$T_d T_0 p^4 + (T_d + T_0) p^3 + p^2 + K T_K p + K = 0, \quad (10.56)$$

и при соответствующем выборе постоянной времени коррекции T_K и общего коэффициента усиления в системе может быть получена устойчивая работа.

2. Следящая система. Схема следящей системы без корректирующих средств изображена на рис. 6.4. В этом случае предельная добротность по скорости из условия устойчивости определяется неравенством, полученным в § 6.2:

$$K < \frac{1}{T_y} + \frac{1}{T_m}.$$

Рассмотрим случай демпфирования с поднятием верхних частот. Включим последовательно в канал усиления (рис. 10.21) пассивное дифференци-

рующее звено $\Pi\mathcal{Z}$ с передаточной функцией

$$W_{\Pi\mathcal{Z}}(p) = G_0 \frac{1+T_1 p}{1+T_2 p} = G_0 \frac{1+T_1 p}{1+G_0 T_1 p} \quad (T_1 > T_2), \quad (10.57)$$

где

$$G_0 = \frac{T_2}{T_1} < 1.$$

Будем считать, что затухание G_0 , вносимое звеном на низких частотах, компенсируется соответствующим увеличением коэффициента усиления

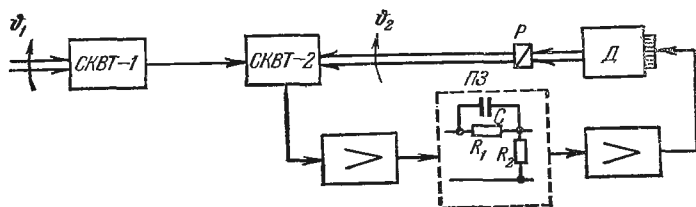


Рис. 10.21.

усилителя. Тогда передаточная функция разомкнутой системы, полученная в § 6.2:

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_y p)(1+T_m p)},$$

примет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_y p)(1+T_m p)} \frac{1+T_1 p}{1+G_0 T_1 p}. \quad (10.58)$$

Примем теперь, что в использованном пассивном звене выполнено условие $T_1 = T_m$. Тогда вместо (10.58) получим

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_y p)(1+G_0 T_m p)}. \quad (10.59)$$

Найдем характеристическое уравнение

$$1 + W(p) = 0.$$

Подстановка выражения для передаточной функции (10.59) приводит к уравнению

$$G_0 T_y T_m p^3 + (T_y + G_0 T_m) p^2 + p + K = 0. \quad (10.60)$$

Условие устойчивости

$$K < \frac{1}{T_y} + \frac{1}{G_0 T_m}. \quad (10.61)$$

Нетрудно видеть, что, уменьшая коэффициент G_0 , можно получить устойчивость при любом значении добротности следящей системы.

Рассмотрим теперь случай демпфирования с подавлением средних частот той же следящей системы (см. рис. 6.4). Для этой цели охватим часть усилителя, содержащую инерционность, гибкой отрицательной обратной связью (рис. 10.22, а). Согласно табл. 10.4 это эквивалентно включению последовательного интегро-дифференцирующего звена, обладающего свойством подавлять средние частоты.

Передаточная функция разомкнутой системы может быть получена из передаточной функции исходной системы делением ее на $1 + W_0(p)$, где

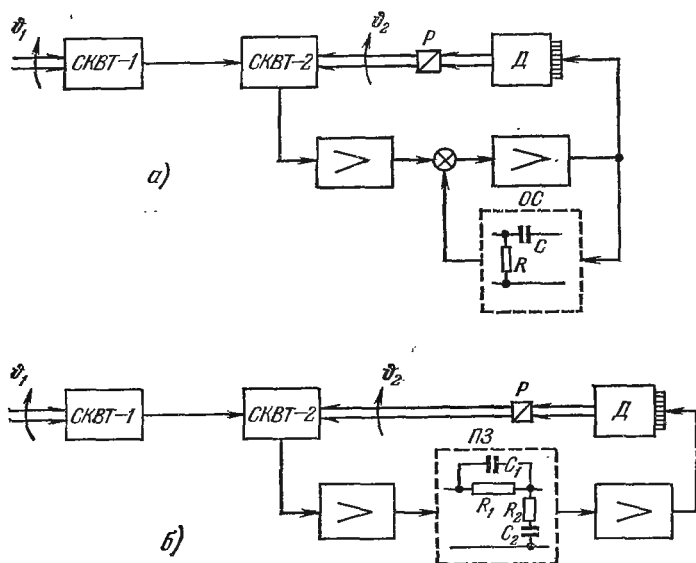


Рис. 10.22.

$W_0(p)$ представляет собой передаточную функцию по петле обратной местной связи

$$W_0(p) = W_c(p) W_{oc}(p) = \frac{k_c}{1 + T_y p} \frac{T_p}{1 + T_p}. \quad (10.62)$$

Здесь k_c — коэффициент усиления части усилителя, охваченной обратной связью, $T = RC$ — постоянная времени дифференцирующего конденсатора в цепи обратной связи.

В результате получим

$$W(p) = \frac{K}{1 + \frac{k_c}{1 + T_y p} \frac{T_p}{1 + T_p}} = \frac{K(1 + T_p)}{p(1 + T_{mp})[(1 + T_y p)(1 + T_p) + k_c T_p]}. \quad (10.63)$$

Положим теперь, что выполняется условие $T = T_m$. Это всегда легко сделать выбором параметров R и C . Тогда

$$W(p) = \frac{K}{p[1 + (T_y + T_m + k_c T_m)p + T_y T_{mp}^2]}, \quad (10.64)$$

характеристическое уравнение

$$T_y T_m p^3 + (T_y + T_m + k_c T_m) p^2 + p + K = 0, \quad (10.65)$$

условие устойчивости

$$K < \frac{1}{T_y} + \frac{1}{T_m} + \frac{k_c}{T_y}. \quad (10.66)$$

Из этого неравенства видно, что введение обратной связи позволяет повысить добротность системы K по сравнению со случаем $k_c = 0$.

Вместо включения гибкой отрицательной обратной связи аналогичный эффект может быть достигнут введением в прямую цепь эквивалентного пассивного интегро-дифференцирующего звена (рис. 10.22, б).

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 11.1. Вводные замечания

До сих пор поведение систем автоматического регулирования исследовалось при определенных, заданных во времени задающих и возмущающих воздействиях (ступенчатая функция, импульсная функция, гармоническое воздействие и т. д.)

Однако во многих случаях характер воздействия бывает таким, что его нельзя считать определенной функцией времени. Оно может принимать с течением времени самые разнообразные случайные значения. В таких случаях мы можем оценить только вероятность появления той или иной формы воздействия в тот или иной момент времени. Это происходит не потому, что оно неизвестно заранее, а потому, что сама природа реального задающего или возмущающего воздействия такова, что величина его в каждый момент времени и процесс его изменения с течением времени зависят от множества разнообразных величин, которые случайным образом могут комбинироваться друг с другом, появляться одновременно или с любым сдвигом во времени и т. д.

Возьмем, например, систему автоматического регулирования напряжения электрического генератора. Возмущающее воздействие здесь является результатом изменения нагрузки в сети, зависящей от включения, выключения и изменения режима работы множества потребителей электрической энергии.

Другой пример — автопилот. На него действуют обычно возмущающие воздействия случайного характера: порывы ветра и изменения других атмосферных факторов, изменение тяги, изменения напряжения питания усилителей и рулевых машинок и т. д.

Третий пример — следящие системы, на вход которых попадают вместе с полезным сигналом помехи. Например, в радиолокационной системе сопровождения отраженный от цели сигнал содержит в себе помехи в виде многочисленных флуктуаций, происходящих от вибраций и поворотов цели, замещения сигнала и т. п.

Аналогичные помехи случайной природы имеют место в других автоматических устройствах.

В следящих системах не только возмущающие воздействия и помехи являются случайными, но и сам полезный сигнал, который должен воспроизводиться (задающее воздействие), как правило, носит случайный характер.

Прежде чем рассматривать поведение автоматических систем при случайных воздействиях, напомним некоторые сведения о случайных величинах, случайных процессах и об их вероятностных характеристиках.

К категории *случайных событий* можно отнести такие, точное предсказание протекания которых в каждом отдельном случае оказывается невозможным.

Так, например, если бросать монету, то выпадение герба или цифры будет случайным событием. Если повторить этот эксперимент N раз, то можно зафиксировать определенное число выпадений герба m и число выпадений цифры $N - m$. Относительная величина $\frac{m}{N}$ называется частотой события выпадения герба, а величина $\frac{N-m}{N}$ — частотой события выпадения

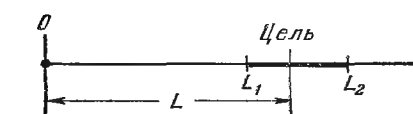


Рис. 11.1.

цифры. Если устремить число экспериментов $N \rightarrow \infty$, то частоты событий будут стремиться к некоторому пределу

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m}{N} = P, \quad (11.1)$$

называемому *вероятностью* данного события. В рассмотренном случае очевидно, что обе вероятности выпадения герба и цифры одинаковы и равны 0,5.

Вероятность каждого события лежит в интервале $0 \leq P \leq 1$.

Если событие является невозможным, вероятность его равна нулю; если событие является достоверным, его вероятность равна единице.

В примере с бросанием монеты рассматривалась дискретная случайная величина, которая могла принимать два фиксированных значения — выпадение герба и выпадение цифры. Существуют случайные величины, которые могут принимать непрерывные значения. Так, например, если рассмотреть стрельбу из орудия (рис. 11.1), то расстояние L от орудия до места падения снаряда будет случайной величиной, которая на определенном отрезке может принимать все возможные значения. В этом случае можно говорить о вероятности нахождения случайной величины L в некотором интервале от L_1 до L_2 .

Таблица 11.1

Вероятностные характеристики дискретных случайных величин. Чтобы полностью знать дискретную случайную величину, надо иметь следующие данные:

Значение случайной величины	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
Вероятность	P_1	P_2	P_3	$\dots$	P_n

а) все возможные значения, которые она может принимать при данных условиях задачи или опыта;
б) вероятность появления каждого из этих значений.

Так, например, если дискретная случайная величина может принимать конечное число значений $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ и вероятность каждого значения будет соответственно $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, то можно представить так называемый закон распределения случайной величины в виде таблицы 11.1.

При этом должно выполняться условие

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1. \quad (11.2)$$

Пусть, например, производится опыт бросания игральной кости. Очевидно, что при каждом бросании число выпавших очков, которое представляет собой случайную величину, может принимать одно из следующих значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Если кость совершенно симметрична, то вероятность выпадения каждой из этих цифр является одинаковой. Так как число различных значений, которое может принимать случайная величина, равно шести, то из (11.2) имеем

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = \frac{1}{6}.$$

Графически этот закон распределения изображен на рис. 11.2. Он представляет собой равновероятное распределение в некотором интервале (в рассматриваемом случае от 1 до 6).

В некоторых случаях закон распределения случайной величины может задаваться в аналитической форме.

Примером аналитического задания закона распределения дискретной случайной величины является часто используемый закон Пуассона. Он применим к дискретным случайным величинам, которые теоретически могут принимать все положительные значения от 0 до ∞ . Примерами таких величин могут служить число пассажиров вагона трамвая, число вызовов на телефонной станции в течение какого-либо определенного отрезка времени, число электронов, попадающих на анод электронной лампы за определенный промежуток времени, и т. п. Этот закон записывается следующим образом для целых значений числа x :

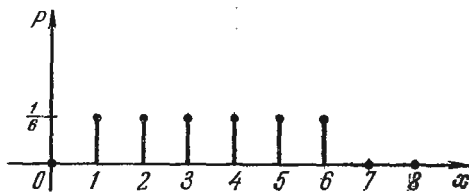


Рис. 11.2.

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad (11.3)$$

где $P(x)$ — вероятность появления значения x ; λ представляет собой среднее значение данной дискретной величины, полученное по результатам большого числа опытов.

Графически этот закон имеет вид, изображенный на рис. 11.3, причем место максимума зависит от величины λ .

В качестве одного из примеров рассмотрим функцию $y(t)$, которая может принимать одно из значений $+a$ или $-a$ (рис. 11.4).

Предположим, что среднее число перемен знака в единицу времени этой функции равно μ и что вероятность перемены знака на интервале $(t, t + \Delta t)$

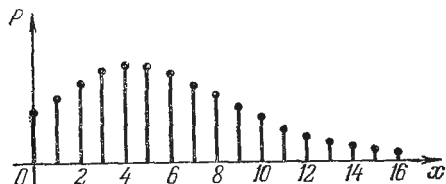


Рис. 11.3.

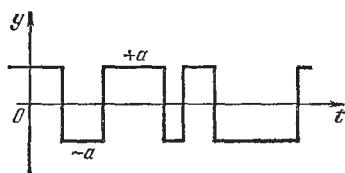


Рис. 11.4.

не зависит от того, что происходит в остальные моменты времени. Тогда вероятность перемены знака на интервале Δt составит $\mu \Delta t \ll 1$. Вероятность того, что на интервале Δt не произойдет перемены знака, будет $(1 - \mu \Delta t)$.

Если взять два интервала времени Δt , то вероятность отсутствия перемены знака на двух интервалах будет равна произведению вероятностей и составит $(1 - \mu \Delta t)^2$. Для трех интервалов Δt она составит $(1 - \mu \Delta t)^3$ и т. д.

Возьмем теперь конечный интервал времени T , который можно представить в виде $T = n \Delta t$. Тогда вероятность отсутствия перемены знака на этом интервале можно найти из выражения

$$P(0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 - \mu \Delta t)^n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 - \mu \Delta t)^{\frac{T}{\Delta t}} = e^{-\mu T}.$$

Аналогичным образом можно показать, что вероятность одной перемены знака на интервале T будет $P(1) = \mu T e^{-\mu T}$, вероятность двух перемен знака $P(2) = \frac{(\mu T)^2}{2!} e^{-\mu T}$ и т. д. Следовательно, вероятность x перемен знака на интервале времени T будет определяться выражением

$$P(x) = \frac{(\mu T)^x}{x!} e^{-\mu T}, \quad (11.4)$$

которое совпадает с формулой (11.3), если положить в ней $\lambda = \mu T$, где μT — среднее число перемен знака на интервале времени T , которое будет наблюдаться при многократном повторении наблюдения.

Хотя закон распределения полностью определяет случайную величину, для практики нужны некоторые более простые осредненные характеристики случайной величины, выражающиеся в виде обыкновенных неслучайных чисел.

Одной из таких характеристик является *среднее значение*, или *математическое ожидание*, случайной величины. Оно определяется из выражения

$$\tilde{x} = M[x] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P_i. \quad (11.5)$$

Так, например, для случая бросания игральной кости

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i P_i = \left(1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}\right) = \\ &= \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3,5. \end{aligned}$$

Вообще для равновероятного закона распределения (11.5) превращается в формулу

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Для случайной величины, распределенной по закону Пуассона, среднее значение, подсчитанное по формуле (11.5), дает

$$\tilde{x} = \lambda.$$

Основные свойства среднего значения случайной величины следующие.

1. Для любых случайных величин среднее значение их суммы равно сумме средних значений этих величин:

$$\widetilde{x+y+z+\dots} = \tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z} + \dots$$

2. Среднее значение произведения случайных величин, независимых друг от друга, равно произведению средних значений этих величин:

$$\widetilde{xyz \dots} = \tilde{x} \tilde{y} \tilde{z} \dots$$

Последняя формула не распространяется на общий случай любых случайных величин.

В виде обобщения понятия среднего значения (11.5) отметим, что выражение

$$\tilde{x^m} = M[x^m] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^m P_i \quad (11.6)$$

называется *моментом m -го порядка* случайной величины x . В частности,

момент нулевого порядка выражает свойство (11.2), и он всегда равен единице:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^0 P_i = \sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1.$$

Момент первого порядка есть среднее значение. (математическое ожидание) случайной величины (11.5). Момент второго порядка

$$\overline{x^2} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 P_i$$

есть средний квадрат случайной величины.

Часто используется так называемое *среднеквадратичное значение* случайной величины, представляющее собой корень квадратный из среднего квадрата случайной величины:

$$x_{\text{ск}} = \sqrt{\overline{x^2}}.$$

Иногда рассматривается *центрированное* значение случайной величины $x_0 = x - \tilde{x}$, где $\tilde{x}$ — среднее значение. Тогда аналогично формуле (11.6) можно ввести понятие *центрального момента* m -го порядка

$$M[(x - \tilde{x})^m] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \tilde{x})^m P_i. \quad (11.7)$$

Из формулы (11.7) следует, что центральный момент первого порядка всегда равен нулю.

Обратимся теперь к характеристикам рассеяния дискретной случайной величины.

Если x — случайная величина, а $\tilde{x}$ — среднее значение этой величины, то величина $x - \tilde{x}$ есть отклонение случайной величины от ее среднего значения. Это отклонение является случайной величиной, как и сама величина x .

Средним отклонением Δ называется среднее значение (математическое ожидание) абсолютной величины отклонения, т. е.

$$\Delta = M[|x - \tilde{x}|] = \overline{|x - \tilde{x}|} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - \tilde{x}| P_i. \quad (11.8)$$

Заметим, что без знака абсолютного значения было бы

$$\overline{x - \tilde{x}} = \tilde{x} - \tilde{x} = 0.$$

Для рассмотренного выше примера бросания игральной кости

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{i=1}^6 |x_i - \tilde{x}| P_i = \frac{1}{6} [|6 - 3,5| + |5 - 3,5| + |4 - 3,5| + |3 - 3,5| + \\ &+ |2 - 3,5| + |1 - 3,5|] = \frac{1}{6} (2,5 + 1,5 + 0,5 + 0,5 + 1,5 + 2,5) = 1,5. \end{aligned}$$

Среднее отклонение случайной величины является уже не случайной величиной, а обычным числом.

Дисперсией называется средний квадрат отклонения случайной величины от ее среднего значения. Она совпадает с центральным моментом второго порядка

$$D = M[(x - \tilde{x})^2] = \overline{(x - \tilde{x})^2} = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \tilde{x})^2 P_i. \quad (11.9)$$

Дисперсия может быть легко вычислена на основании свойства среднего значения:

$$D = (\overline{(x - \tilde{x})^2} = (\overline{x^2 - 2x\tilde{x} + (\tilde{x})^2}) = \overline{x^2} - 2\overline{x\tilde{x}} + \overline{(\tilde{x})^2} = \overline{x^2} - 2(\overline{x})^2 + \overline{(\tilde{x})^2} = \overline{x^2} - (\tilde{x})^2,$$

т. е. она равна разности среднего квадрата и квадрата среднего значения случайной величины. Так как всегда выполняется неравенство $\tilde{x}^2 \geq (\tilde{x})^2$, то дисперсия может быть только положительным числом: $D \geq 0$.

Корень квадратный из дисперсии называется среднеквадратичным отклонением случайной величины от среднего значения:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\overline{x^2} - (\tilde{x})^2}.$$

Для рассмотренного выше примера бросания игральной кости

$$D = \sum_{i=1}^6 (x_i - \tilde{x})^2 P_i = \frac{1}{6} [(6 - 3,5)^2 + (5 - 3,5)^2 + (4 - 3,5)^2 + (3 - 3,5)^2 + (2 - 3,5)^2 + (1 - 3,5)^2] = \frac{35}{12} = 2 \frac{11}{12}.$$

Среднеквадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{35}{12}} = 1,7.$$

Укажем простейшие свойства среднеквадратичных отклонений.

1. При сложении независимых случайных величин

$$u = x + y + z + \dots$$

дисперсии складываются:

$$D_u = D_x + D_y + D_z + \dots$$

Поэтому среднеквадратичное отклонение суммы независимых случайных величин

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \dots}$$

Эта формула часто применяется в измерительной технике и в автоматике для вычисления среднеквадратичных ошибок.

2. Пусть имеется n случайных величин

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$$

с одинаковыми средними значениями $\tilde{x}$ и с одинаковыми законами распределения. Тогда их среднее арифметическое

$$y = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

тоже будет случайной величиной с тем же самым средним значением $\tilde{y} = \tilde{x}$, но среднеквадратичное отклонение его будет в $\sqrt{n}$ раз меньше, чем для каждой из составляющих (в случае независимых случайных величин):

$$\sigma_y = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

Например, если производится n измерений одной и той же физической величины, то их среднее арифметическое, хотя тоже является случайной величиной, но всегда надежнее (имеет меньшее среднеквадратичное отклонение), чем каждое измерение в отдельности. Здесь случайные ошибки измерения

в известной мере компенсируются. Но надо помнить, что систематические ошибки приборов при этом остаются в полной мере в составе среднего арифметического и никакой массовостью измерений скомпенсированы быть не могут.

3. Для n случайных величин, независимых и имеющих одно и то же среднее значение $\tilde{x}$, среднее арифметическое будет при достаточно большом n как угодно мало отличаться от среднего значения $\tilde{x}$ (с вероятностью, как угодно близкой к единице). Замечание в скобках означает, что это практически достоверно, но не абсолютно, потому что среднее арифметическое есть все же случайная величина. Таким образом, при большом n и указанных условиях

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \rightarrow \tilde{x} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Этот закон больших чисел, доказанный П. Л. Чебышевым, имеет первостепенное значение для обработки экспериментальных данных и для учетной статистики.

Введем теперь понятие *интегрального закона распределения*. Интегральным законом распределения или функцией распределения называется вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее некоторого значения x . Математически эта формулировка записывается в виде

$$F(x) = P(\xi < x),$$

где ξ — текущее значение случайной величины x . Например, если график закона распределения дискретной случайной величины x имеет вид, показанный на рис. 11.5, а, то график функции распределения $F(x)$ для нее будет иметь вид, показанный на рис. 11.5, б. Он показывает, что вероятность того, что величина x получит значение меньше единицы, равна нулю; меньше трех — равна 0,2; меньше четырех —

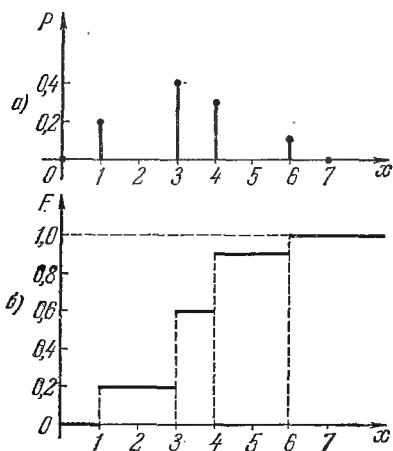


Рис. 11.5.

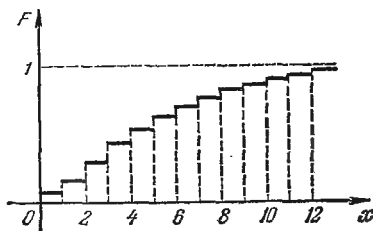


Рис. 11.6.

равна 0,6 и т. д. Функция распределения $F(x)$ всегда возрастает с увеличением x , причем $F(x) = 1$ при наибольшем возможном значении $x_{\max}$ и остается равной единице при всех значениях $x > x_{\max}$.

Например, для закона Пуассона (11.3), когда дискретная случайная величина может принимать значения $x = 0, 1, 2, 3, \dots$, функция распределения

$$F(x) = \sum_0^x P(x) \quad (11.10)$$

будет иметь вид бесконечной лестницы (рис. 11.6), но не заходящей выше единицы, т. е. $F(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$.

Вероятностные характеристики непрерывных случайных величин. Непрерывная случайная величина может принимать все значения в каком-либо заданном ограниченном интервале ($a \leq x \leq b$) или все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, функция распределения (интегральный закон распределения) для непрерывной случайной величины будет изображаться непрерывной кривой. На рис. 11.7 показаны оба упомянутых выше варианта.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определенное числовое значение x , бесконечно мала (например, вероятность попадания центра тяжести снаряда в определенную точку цели). Вероятность же того, что непрерывная случайная величина окажется в некотором промежутке $x_1 < x < x_2$, будет иметь конечное значение, а именно:

$$P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина содержится в промежутке между x и $x + dx$, будет

$$P(x < \xi < x + dx) = dF(x) = \frac{dF(x)}{dx} dx.$$

Величина

$$\frac{dF(x)}{dx} = w(x) \quad (11.11)$$

Рис. 11.7.

называется плотностью вероятности.

Закон распределения для непрерывной случайной величины в отличие от дискретной задается не в виде значений вероятности, а в виде *плотности вероятности* $w(x)$, называемой также *дифференциальным законом распределения*. На рис. 11.8 показаны дифференциальные законы распределения для

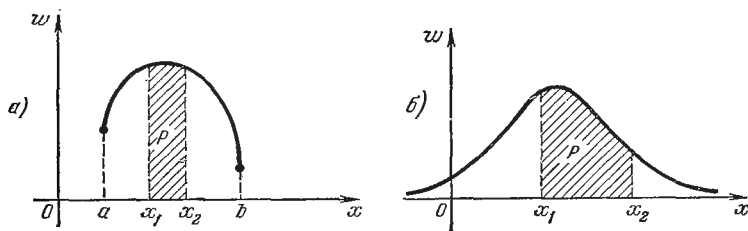


Рис. 11.8.

двух вариантов функции распределения $F(x)$, показанных на рис. 11.7. Если бы здесь использовалось то же понятие закона распределения, что и для дискретной случайной величины, то получились бы бесконечно малые ординаты $P(x)$.

Выражение $w(x) dx$ означает вероятность того, что случайная величина содержится между x и $x + dx$:

$$P(x < \xi < x + dx) = w(x) dx.$$

Вероятность того, что случайная величина содержится между значениями x_1 и x_2 , определяется формулой

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} w(x) dx, \quad (11.12)$$

что геометрически выражается заштрихованной площадью на рис. 11.8.

Кроме того, имеет место зависимость

$$F(x) = \int_{-\infty}^x w(x) dx. \quad (11.13)$$

Вся площадь под кривой $w(x)$ равна единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x) dx = 1, \quad (11.14)$$

так как $F(\infty) = 1$.

Формула (11.14) соответствует моменту нулевого порядка. Среднее значение (математическое ожидание) соответствует моменту первого порядка:

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xw(x) dx, \quad (11.15)$$

что вытекает из формулы (11.5) как предел суммы.

Моменты высших порядков по аналогии с (11.6) будут

$$\overline{x^m} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m w(x) dx. \quad (11.16)$$

Таким же образом можно вычислить центральный момент m -го порядка

$$M[(x - \tilde{x})^m] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \tilde{x})^m w(x) dx. \quad (11.17)$$

Как и в случае дискретных случайных величин, центральный момент первого порядка всегда равен нулю.

Рассеяние непрерывной случайной величины можно оценивать одним из следующих значений, словесные формулировки которых остаются прежними.

Среднее отклонение (мало удобная для вычислений величина)

$$\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \tilde{x}| w(x) dx. \quad (11.18)$$

Дисперсия (наиболее удобная для вычислений величина)

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \tilde{x})^2 w(x) dx = \overline{x^2} - (\tilde{x})^2. \quad (11.19)$$

Среднеквадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\overline{x^2} - (\tilde{x})^2}. \quad (11.20)$$

Средневероятным отклонением Δ_v называется такая величина, при которой отклонения $|x - \tilde{x}| < \Delta_v$ и $|x - \tilde{x}| > \Delta_v$ имеют одинаковую вероятность.

Рассмотрим простейшие типовые законы распределения непрерывных случайных величин.

1. *Равномерное распределение* случайной величины на определенном участке характеризуется плотностью вероятности $w(x)$ и функцией распределения $F(x)$, показанными на рис. 11.9. При этом на основании свойства (11.14) имеем

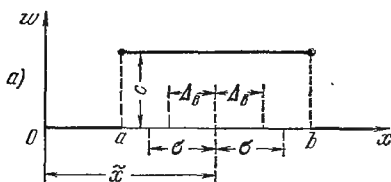
$$c = \frac{1}{b-a}.$$

Подсчитаем характерные значения. Среднее значение (математическое ожидание)

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xw(x) dx = \int_a^b xc dx = \frac{b+a}{2}.$$

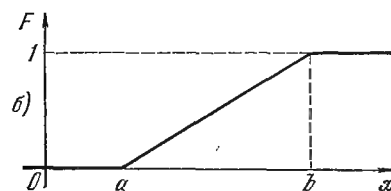
Среднее значение квадрата случайной величины (момент второго порядка)

$$\tilde{x^2} = \int_a^b x^2 c dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$



Дисперсия

$$D = \tilde{x^2} - (\tilde{x})^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$



Среднеквадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{D} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Средневероятное отклонение

$$\Delta_B = \frac{1}{4}(b-a) < \sigma.$$

Рис. 11.9.

Максимально возможное отклонение случайной величины от среднего значения в данном случае будет

$$\Delta_{\max} = \frac{b-a}{2}.$$

2. *Нормальный закон распределения* непрерывных случайных величин (закон Гаусса). Этот закон имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\tilde{x})^2}{2\sigma^2}}, \quad (11.21)$$

где σ — среднеквадратичное отклонение, а $\tilde{x}$ — математическое ожидание случайной величины.

График для этого закона изображен на рис. 11.10. Он имеет типичную «колоколообразную» форму.

Анализ условий возникновения нормального распределения показывает, что оно имеет место во всех тех случаях, когда случайная величина характеризуется собой суммарный эффект большого числа независимых причин. Поэтому нормальное распределение весьма часто встречается на практике.

Для этого закона средневероятное отклонение будет

$$\Delta_B = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma = 0,674\sigma.$$

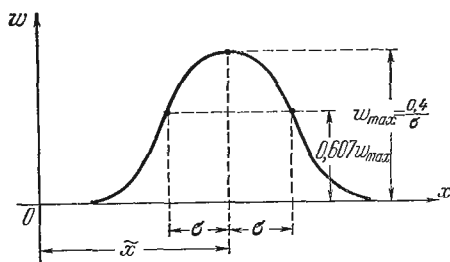


Рис. 11.10.

За максимальное отклонение, которое может иметь место, обычно принимают величину $\Delta_{\max} = 3\sigma$, так как вероятность того, что отклонение $|x - \tilde{x}|$ будет больше 3σ , очень мала, а именно:

$$P(|x - \tilde{x}| > 3\sigma) = 0,003.$$

Для удобства расчетов составлены таблицы для единичного нормального закона. Для получения этого закона положим $\tilde{x} = 0$ и введем новую относительную переменную $y = \frac{x}{\sigma}$. Тогда вероятность того, что текущее значение относительной переменной находится в интервале от $-a$ до $+a$ или сама переменная находится в интервале от $-a\sigma$ до $+a\sigma$, определится выражением

$$\Phi(a) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-a\sigma}^{+a\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (11.22)$$

Для функции $\Phi(a)$ составлены подробные таблицы. В качестве иллюстрации приводится краткая табл. 11.2.

Таблица 11.2

Единичный нормальный закон

a	$\Phi(a)$	a	$\Phi(a)$	a	$\Phi(a)$	a	$\Phi(a)$
0,00	0,000	0,25	0,197	0,70	0,516	2,00	0,954
0,05	0,040	0,30	0,236	0,80	0,576	2,50	0,988
0,10	0,080	0,40	0,341	0,90	0,632	3,00	0,997
0,15	0,119	0,50	0,383	1,00	0,683	3,50	0,999
0,20	0,158	0,60	0,451	1,50	0,866	4,00	0,999

Рассмотрим пример пользования таблицей. Пусть имеется некоторая случайная величина x , для которой математическое ожидание $\tilde{x} = 10$, а среднеквадратичное отклонение составляет $\sigma = 4$. Определим, какова вероятность того, что случайная величина лежит в интервале $9,5 < x < 10,5$. Это означает, что отклонение от математического ожидания должно лежать в интервале $-0,5 < \Delta < +0,5$. Для относительных величин это соответствует неравенству

$$-0,125 < \frac{\Delta}{\sigma} < +0,125.$$

Таким образом, $a = 0,125$. По табл. 11.2 определяем путем интерполяции вероятность $\Phi(a) = 0,1$.

Произведем более сложный расчет. Пусть для той же случайной величины необходимо определить вероятность нахождения ее в интервале $11 < x < 12$. Так как кривая нормального распределения является симметричной относительно среднего значения случайной величины, то искомая вероятность может быть найдена как половина разности вероятности нахождения случайной величины в интервале $-12 < x < 12$ и вероятности нахождения в интервале $-11 < x < 11$, т. е.

$$P(11 < x < 12) = \frac{P(-12 < x < 12) - P(-11 < x < 11)}{2}$$

или для отклонений

$$P(11 < x < 12) = \frac{P(-2 < \Delta < 2) - P(-1 < \Delta < 1)}{2}.$$

Перейдя к относительным величинам, получаем в результате искомую вероятность

$$P(11 < x < 12) = \frac{\Phi(0,5) - \Phi(0,25)}{2} = \frac{0,383 - 0,197}{2} = 0,093.$$

Характеристические функции. Введем в рассмотрение функцию $g(j\lambda)$, связанную с плотностью вероятности $w(x)$ взаимным преобразованием Фурье:

$$M[e^{j\lambda x}] = g(j\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) e^{j\lambda x} dx, \quad w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(j\lambda) e^{-j\lambda x} d\lambda. \quad (11.23)$$

Эта функция называется *характеристической*. Ее основные свойства следующие. Если случайная величина $y = ax + b$, то

$$g_y(j\lambda) = e^{j\lambda b} g_x(j\lambda). \quad (11.24)$$

Если случайная величина $z = x + y$, где x и y — независимые величины, то

$$g_z(j\lambda) = g_x(j\lambda) g_y(j\lambda). \quad (11.25)$$

Для нормального закона распределения (11.21) характеристическая функция будет

$$\begin{aligned} g(j\lambda) &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[j\lambda x - \frac{(x - \tilde{x})^2}{2\sigma^2} \right] dx = \\ &= \frac{e^{j\lambda \tilde{x}}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[j\lambda x_0 - \frac{x_0^2}{2\sigma^2} \right] dx_0 = \exp \left[j\lambda \tilde{x} - \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (11.26)$$

По характеристической функции могут быть найдены моменты случайной величины. Разлагая $g(j\lambda)$ и $M[e^{j\lambda x}]$ в первой формуле (11.23) в ряд Маклорена, имеем

$$g(j\lambda) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} g^{(i)}(0) \lambda^i + \rho_n, \quad (11.27)$$

$$M[e^{j\lambda x}] = \sum_{i=0}^n \frac{(j\lambda)^i}{i!} M[x^i] + M[R_n]. \quad (11.28)$$

Из сравнения (11.27) и (11.28) можно получить формулу для момента m -го порядка:

$$M[x^m] = j^{-m} g^{(m)}(0). \quad (11.29)$$

Аналогичным образом можно получить формулу для центрального момента m -го порядка:

$$M[(x - \tilde{x})^m] = j^{-m} \left[\frac{d^m}{d\lambda^m} e^{-j\lambda \tilde{x}} g(j\lambda) \right]_{\lambda=0}. \quad (11.30)$$

Формулы (11.29) и (11.30) могут быть использованы для вычисления моментов.

Векторные случайные величины. Пусть имеется совокупность случайных величин x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Такая совокупность может быть представлена в виде матрицы-столбца. Если физические размерности всех величин одинаковы, то матрица-столбец может быть отождествлена с вектором. При разных размерностях переход к вектору может быть сделан после нормирования (введения весовых коэффициентов).

Пусть, например, имеются две непрерывные случайные величины x_1 и x_2 . Для них может быть введена двумерная плотность вероятности $w(x_1, x_2)$. Если величины x_1 и x_2 независимы, то $w(x_1, x_2) = w_1(x_1)w_2(x_2)$.

Вводится понятие смешанного момента m -го порядка, где $m = q + s$,

$$M[x_1^q x_2^s] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^q x_2^s w(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (11.31)$$

и смешанного центрального момента

$$M[(x_1 - \tilde{x}_1)^q (x_2 - \tilde{x}_2)^s] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \tilde{x}_1)^q (x_2 - \tilde{x}_2)^s w(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (11.32)$$

Если $q = s = 1$, то центральный момент второго порядка имеет особое значение и носит название корреляционного момента:

$$r_{12} = M[(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) w(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (11.33)$$

В случае независимости случайных величин x_1 и x_2 можно легко показать, что корреляционный момент $r_{12} = 0$.

Иногда употребляется понятие коэффициента корреляции, представляющего собой относительное значение корреляционного момента:

$$\rho_{12} = \frac{r_{12}}{\sqrt{D_1 D_2}} = \frac{r_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (11.34)$$

где D_1 и D_2 — дисперсии величин x_1 и x_2 .

Для совокупности случайных величин x_i ($i = 1, \dots, n$) в приближенных расчетах часто ограничиваются заданием матрицы-столбца (вектора) математических ожиданий $\tilde{x} = \|\tilde{x}_i\|_{n \times 1}$ и матрицы корреляционных моментов

$$r = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}. \quad (11.35)$$

Составляющие корреляционной матрицы показывают степень связи между отдельными случайными величинами, причем $r_{ji} = r_{ij}$. На диагонали корреляционной матрицы находятся собственные центральные моменты второго порядка, т. е. дисперсии $D_i = r_{ii}$ ($i = 1, \dots, n$).

§ 11.2. Случайные процессы

Случайная величина x , изменяющаяся во времени t , называется *случайным* или *стохастическим* процессом. Случайный процесс не есть определенная кривая $x(t)$, а является множеством возможных кривых $x(t)$, так же как случайная величина не имеет определенного значения, а является совокупностью (множеством) возможных значений.

Можно еще сказать, что случайный процесс есть такая функция времени, значение которой в каждый момент времени является случайной величиной.

Примерами случайных процессов могут, например, являться: координаты самолета, замеряемые радиолокационной станцией; угол визирования движущейся цели головкой самонаведения; помехи в системе телеуправления; нагрузка электрической сети и т. п.

Итак, в случайном процессе нет определенной зависимости $x(t)$. Каждая кривая множества (рис. 11.11) является лишь отдельной реализацией случайного процесса. Никогда нельзя сказать заранее, по какой кривой пойдет процесс.

Однако случайный процесс может быть оценен некоторыми вероятностными характеристиками.

В каждый отдельный момент времени ($t_1, t_2, t_3, \dots$; рис. 11.11) наблюдаются случайные величины $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2)$, каждая из которых имеет

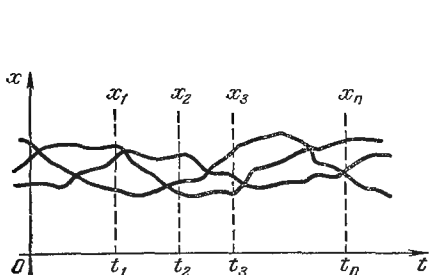


Рис. 11.11.

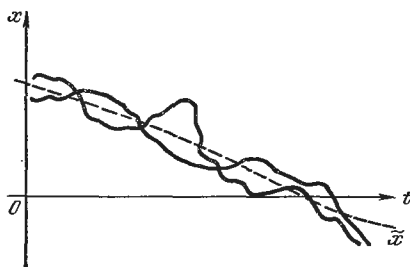


Рис. 11.12.

свой закон распределения. Поскольку это — непрерывная случайная величина, то надо пользоваться понятием плотности вероятности.

Обозначим $w(x, t)$ закон распределения для всех этих отдельных случайных величин. В общем случае он меняется с течением времени. Для каждого данного t в отдельности ($t_1, t_2, t_3, \dots$) будет свой закон распределения:

$$w(x_1, t_1), w(x_2, t_2), w(x_3, t_3), \dots,$$

причем по свойству (11.14) для каждого из них

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x, t) dx = 1.$$

Для каждого заданного момента времени можно найти характеристики случайных величин, определенные в § 11.1. В результате будем иметь среднее по множеству (математическое ожидание)

$$\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} xw(x, t) dx \quad (11.36)$$

и дисперсию

$$D(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \tilde{x})^2 w(x, t) dx = \overline{x^2(t)} - [\tilde{x}(t)]^2. \quad (11.37)$$

Среднее значение случайного процесса представляет собой некоторую среднюю кривую (рис. 11.12), около которой группируются все возможные отдельные реализации этого процесса, а дисперсия $D(t)$ или среднеквадратичное отклонение $\sigma(t)$ характеризуют рассеяние отдельных возможных реализаций процесса около этой средней кривой.

Кроме этих осредненных характеристик $\tilde{x}(t)$ и $D(t)$, которые для каждого данного момента времени являются средними по множеству, введем понятие среднего значения случайной величины x для отдельной реализации случайного процесса $x(t)$, которое определяется из выражения

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt. \quad (11.38)$$

Переход к пределу здесь необходим для того, чтобы характеризовать не какой-нибудь отдельный участок кривой, а всю возможную кривую $x(t)$ в целом.

Для того чтобы знать связь между возможными значениями случайной функции $x(t)$ в последующие моменты времени со значениями в предыдущие моменты, вводится понятие двумерной плотности вероятности

$$w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) \quad (w_2 > 0);$$

смысл которого можно пояснить следующим образом. Вероятность того, что в момент времени t_1 величина x находится в интервале $(x_1, x_1 + dx_1)$, а в момент времени t_2 — в интервале $(x_2, x_2 + dx_2)$, будет $w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2$. Это есть вероятность того, что кривая $x(t)$ пройдет вблизи двух заданных точек (x_1, t_1) и (x_2, t_2) . Вводится также и n -мерная плотность вероятности

$$w_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n).$$

Если ее умножить на $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, то это будет вероятность того, что кривая пройдет вблизи заданных n точек.

Случайный процесс полностью определяется видом функций $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ и связью между ними.

Простейшим типом случайного процесса является чисто случайный процесс. В таком процессе все значения случайной величины в отдельные моменты времени (x_1 в момент t_1 ; x_2 в момент t_2 и т. д.) не зависят друг от друга. Тогда появления значений (x_1, t_1) , (x_2, t_2) , (x_3, t_3) и т. д. будут независимыми случайными событиями, для которых вероятность их совместного наступления равна, как известно, произведению вероятностей наступления каждого из них в отдельности. Следовательно, для чисто случайного процесса

$$w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = w(x_1, t_1) w(x_2, t_2) \quad (11.39)$$

и вообще

$$w_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = w(x_1, t_1) w(x_2, t_2); \dots; w(x_n, t_n). \quad (11.40)$$

Это — самые простые соотношения в теории случайных процессов. Они могут применяться для характеристики некоторых видов помех (чисто случайные хаотические помехи).

Для характеристики полезных входных сигналов систем регулирования и следящих систем соотношения (11.39) и (11.40) практически не могут применяться, так как для этих сигналов ход процесса в последующие моменты времени в какой-то степени зависит от того, что было в предыдущие моменты времени.

Так, например, если речь идет о слежении за самолетом, то он не может как угодно быстро менять свое положение и скорость. Поэтому если он в момент времени t_1 занял положение x_1 , то этим самым его возможное положение x_2 в следующий момент t_2 ограничено, т. е. события (x_2, t_2) и (x_1, t_1) не будут независимыми. Чем более инерционен изучаемый объект, тем больше эта взаимозависимость, или корреляция. В таких случаях вместо формулы (11.39) необходимо записать

$$w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = w(x_1, t_1) w_{2,1}(x_2, t_2), \quad (11.41)$$

где $w_{2,1}(x_2, t_2) dx$ — условная вероятность того, что случайный процесс пройдет вблизи точки (x_2, t_2) , если он уже прошел через точку (x_1, t_1) . Следовательно, зная плотности вероятности $w(x_1, t_1)$ и $w_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$, можно найти также и условную плотность вероятности

$$w_{2,1}(x_2, t_2) = \frac{w_2(x_1, t_1; x_2, t_2)}{w(x_1, t_1)}. \quad (11.42)$$

Кроме того, имеет место следующая связь между основными плотностями вероятности:

$$w(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_2, \quad (11.43)$$

так как $w(x_1, t_1)$ есть плотность вероятности случайной величины (x_1, t_1) безотносительно к тому, какое потом будет значение (x_2, t_2) , т. е. допускается $-\infty < x_2 < +\infty$. Аналогичным образом любая плотность вероятности низшего порядка всегда может быть получена из высшей, т. е. высшие плотности вероятностей содержат наибольшее количество информации о случайном процессе (о взаимосвязях между возможными значениями случайной величины x в различные моменты времени).

Написанные соотношения справедливы для случайных процессов любых типов. В зависимости же от того, до какого порядка принимаются во внимание плотности вероятности, а также от разных дополнительных гипотез о формах связи между $w_1, w_2, \dots, w_n$ рассматриваются разные типы случайных процессов в отличие от чисто случайных.

Другая классификация всех случайных процессов состоит в разделении их на стационарные и нестационарные. Теория стационарных случайных процессов наиболее разработана и чаще всего применяется на практике.

§ 11.3. Стационарные случайные процессы

Стационарным случайным процессом называется такой процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. Все плотности вероятностей $w_1, w_2, \dots, w_n$ не меняются при любом сдвиге рассматриваемого участка процесса во времени, т. е. при сохранении постоянной разности.

Можно сказать, что стационарный случайный процесс в какой-то мере аналогичен обычным стационарным или установившимся процессам в автоматических системах. Например, при рассмотрении обычных установившихся периодических колебаний ничего не изменится, если пере-

нести начало отсчета на какую-нибудь величину. При этом сохраняют свои значения такие характеристики, как частота, амплитуда, среднее квадратичное значение и т. п.

В стационарном случайном процессе закон распределения один и тот же для каждого момента времени, т. е. плотность вероятности не зависит от времени: $w(x, t) = w(x)$.

Отсюда получаем $\bar{x} = \text{const}$ и $\sigma = \text{const}$ вдоль всего случайного процесса. Следовательно, в стационарном случайном процессе средняя линия, в отличие от общего случая (см. рис. 11.12), будет прямая $\bar{x} = \text{const}$ (рис. 11.13), подобно постоянному смещению средней линии обычных периодических

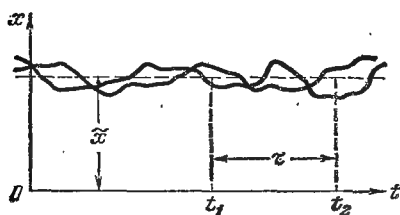


Рис. 11.13.

колебаний. Рассеяние значений переменной x в стационарном случайном процессе, определяемое $\sigma = \text{const}$, также будет все время одинаковым, подобно постоянному значению среднеквадратичного отклонения обычных установившихся колебаний от средней линии.

Аналогичным образом и двумерная плотность вероятности также будет одна и та же для одного и того же промежутка времени $\tau = t_2 - t_1$ между любыми t_1 и t_2 (рис. 11.13), т. е.

$$w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = w_2(x_1, x_2, \tau), \quad (11.44)$$

и также для n -мерной плотности вероятности.

Задание всех этих функций распределения плотности определяет случайный процесс. Однако более удобно иметь дело с некоторыми осредненными и характеристиками процесса.

Прежде чем перейти к ним, отметим два важных для практики свойства.

1. Ограничиваясь только стационарными случайными процессами, можно будет определить только установившиеся (стационарные) динамические ошибки автоматических систем при случайных воздействиях. Такой прием применялся и ранее при рассмотрении регулярных воздействий, когда определялись динамические свойства систем регулирования по величине динамических ошибок в установившемся периодическом режиме.

2. Стационарные случайные процессы обладают замечательным свойством, которое известно под названием эргодической гипотезы.

Для стационарного случайного процесса с вероятностью, равной единице (т. е. практически достоверно), всякое среднее по множеству равно соответствующему среднему по времени, в частности $\tilde{x} = \bar{x}$, $\tilde{x}^2 = \bar{x}^2$ и т. д.

В самом деле, поскольку вероятностные характеристики стационарного случайного процесса с течением времени не меняются (например, $\tilde{x} = \text{const}$), то длительное наблюдение случайного процесса на одном объекте (среднее по времени) дает в среднем такую же картину, как и большое число наблюдений, сделанное в один и тот же момент времени на большом числе одинаковых объектов (среднее по множеству).

Для многих случаев существует математическое доказательство этого свойства. Тогда оно сводится к эргодической теореме.

Итак, среднее значение (математическое ожидание) для стационарного процесса будет

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x w(x) dx = \bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt. \quad (11.45)$$

Аналогичным образом могут быть записаны моменты более высоких порядков — дисперсия, среднеквадратичное отклонение и т. п.

Эргодическая гипотеза позволяет сильно упрощать все расчеты и эксперименты. Она позволяет для определения $\tilde{x}$, D , σ и т. п., вместо параллельного испытания многих однотипных систем в один и тот же момент времени, пользоваться одной кривой $x(t)$, полученной при испытании одной системы в течение длительного времени.

Таким образом, важное свойство стационарного случайного процесса состоит в том, что отдельная его реализация на бесконечном промежутке времени полностью определяет собой весь случайный процесс со всеми бесчисленными возможными его реализациями. Этим свойством не обладает никакой другой тип случайного процесса.

§ 11.4. Корреляционная функция

Начальный корреляционный момент двух значений случайной функции $x(t)$ и $x(t_1)$, взятых в моменты времени t и t_1 , носит название *корреляционной (автокорреляционной) функции*. Она может быть найдена аналогично (11.34) из выражения

$$R(t, t_1) = M[x(t)x(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t_1)w_2(x, t; x_1, t_1) dx dx_1, \quad (11.46)$$

где $w_2(x, t; x_1, t_1)$ — двумерная плотность вероятности.

Иногда под корреляционной функцией понимают центральный корреляционный момент $x(t)$ и $x(t_1)$, т. е.

$$\begin{aligned} R^0(t, t_1) &= M[\{x(t) - \tilde{x}(t)\}\{x(t_1) - \tilde{x}(t_1)\}] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - \tilde{x}(t)][x(t_1) - \tilde{x}(t_1)]w_2(x, t; x_1, t_1) dx dx_1. \end{aligned} \quad (11.47)$$

В этом случае корреляционная функция (11.46) может быть представлена в виде суммы

$$R(t, t_1) = \tilde{x}(t)\tilde{x}(t_1) + R^0(t, t_1). \quad (11.48)$$

Корреляционная функция является весьма универсальной характеристикой для случайного процесса. Она определяет зависимость случайной величины в последующий момент времени $x(t_1)$ от предшествующего значения $x(t)$ в момент времени t . Это есть мера связи между ними.

Рассмотрим основные свойства корреляционных функций.

1. Из определения корреляционной функции (11.46) и (11.47) следует свойство симметрии: $R(t, t_1) = R(t_1, t)$ и $R^0(t, t_1) = R^0(t_1, t)$.

2. При $t_1 = t$ корреляционная функция $R(t, t_1)$ дает средний квадрат случайной величины, а $R^0(t, t_1)$ — дисперсию:

$$R(t, t) = M[x^2(t)] = \tilde{x}^2(t), \quad R^0(t, t) = M[\{x(t) - \tilde{x}(t)\}^2] = D(t).$$

3. Можно показать, что прибавление к случайным величинам произвольных неслучайных величин не меняет их корреляционных моментов и дисперсии. Поэтому корреляционная функция $R^0(t, t_1)$ не изменится, если к случайной функции добавить произвольную неслучайную функцию. Это свойство не относится к функции $R(t, t_1)$, так как добавление неслучайных величин к случайным изменяет начальные моменты. В этом случае корреляционная функция будет равна сумме корреляционных функций случайной и неслучайной функций.

Иногда в рассмотрение вводится *нормированная корреляционная функция*

$$\rho(t, t_1) = \frac{R^0(t, t_1)}{\sqrt{D(t)D(t_1)}}. \quad (11.49)$$

Аналогично корреляционной функции можно ввести понятие *взаимной корреляционной функции* для двух случайных величин $x(t)$ и $y(t)$:

$$R_{xy}(t, t_1) = M[x(t)y(t_1)], \quad R_{xy}^0(t, t_1) = M[\{x(t) - \tilde{x}(t)\}\{y(t_1) - \tilde{y}(t_1)\}]. \quad (11.50)$$

В случае тождественного равенства нулю взаимной корреляционной функции случайные функции $x(t)$ и $y(t)$ называют некоррелированными.

Если взаимная корреляционная функция отлична от нуля, то $x(t)$ и $y(t)$ носят название коррелированных случайных функций.

В случае стационарности процесса корреляционные функции $R(t, t_1)$ и $R^0(t, t_1)$ не будут зависеть от текущего значения времени t и будут определяться только временным сдвигом $\tau = t_1 - t$.

С учетом эргодичности стационарного процесса корреляционной функцией можно назвать среднее по времени от произведения $x(t)$ и $x(t + \tau)$ или $x(t) - \bar{x}$ и $x(t + \tau) - \bar{x}$:

$$\left. \begin{aligned} R(\tau) &= \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt, \\ R^0(\tau) &= \overline{[x(t) - \bar{x}][x(t+\tau) - \bar{x}]} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - \bar{x}][x(t+\tau) - \bar{x}] dt. \end{aligned} \right\} (11.51)$$

Для стационарного процесса корреляционная функция определяет зависимость случайной величины x в последующий момент времени $t + \tau$ от предшествующего значения в момент t .

Приведем основные свойства корреляционной функции стационарного процесса применительно к величине $R(\tau)$.

1. Корреляционная функция является четной функцией, т. е. $R(-\tau) = R(\tau)$. Это вытекает из самого определения корреляционной функции.

2. При $\tau = 0$ корреляционная функция дает средний квадрат случайной величины:

$$R(0) = \overline{x(t)x(t)} = \bar{x}^2.$$

3. При $\tau \rightarrow \infty$ корреляционная функция дает квадрат среднего значения случайной величины. Докажем это. На основании эргодической гипотезы

$$R(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2.$$

При $\tau \rightarrow \infty$ величины x_1 и x_2 можно считать независимыми. Отсюда, принимая во внимание формулу (11.39) для независимых случайных величин, получим

$$R(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 w(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 w(x_2) dx_2 = (\bar{x})^2 = (\bar{x})^2.$$

4. Значение корреляционной функции при $\tau = 0$ является ее наибольшим значением, т. е. имеет место неравенство $R(0) \geq R(\tau)$. Докажем это. Рассмотрим очевидное неравенство

$$[x(t) - x(t + \tau)]^2 \geq 0.$$

Сделаем преобразование

$$x^2(t) + x^2(t + \tau) \geq 2x(t)x(t + \tau).$$

Возьмем теперь среднее по времени от правой и левой частей. В результате получим:

$$\overline{x^2(t) + x^2(t + \tau)} = \overline{2x^2} = 2R(0), \quad \overline{2x(t)x(t + \tau)} = 2R(\tau),$$

откуда и вытекает следующее неравенство: $R(0) \geq R(\tau)$.

5. Значение корреляционной функции чаще всего будет тем меньше, чем больше промежуток времени τ , так как связь между далеко отстоящими друг от друга значениями x будет обычно слабее.

6. Чем менее инерционен (более подвижен) объект наблюдения, тем быстрее убывает $R(\tau)$ с увеличением τ . Например, у самолета, как подвижной цели, связь между последующими и предыдущими положениями (при заданном τ) будет тем меньше, чем он легче и маневреннее. Отсюда следует, что, чем быстрее убывает корреляционная функция, тем более высокие частоты будут присутствовать в случайном процессе.

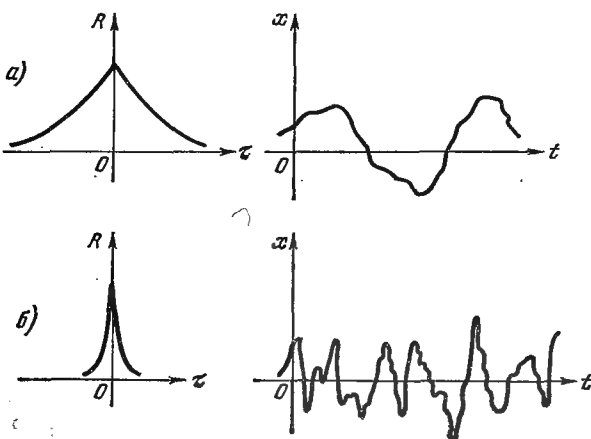


Рис. 11.14.

На рис. 11.14 в качестве примера приведены две корреляционные функции и две соответствующие им реализации процесса при одинаковых среднеквадратичных значениях случайной величины. Второй процесс по сравне-

нию с первым имеет более тонкую структуру, т. е. в нем присутствуют более высокие частоты.

Таким образом, при известной корреляционной функции легко определяются следующие вероятностные характеристики:

а) среднее значение (момент первого порядка)

$$\bar{x} = \overline{\bar{x}} = \sqrt{R(\infty)};$$

б) среднеквадратичное значение (момент второго порядка)

$$\tilde{x}^2 = \overline{x^2} = R(0);$$

в) дисперсия

$$D = R(0) - R(\infty);$$

г) среднеквадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{R(0) - R(\infty)}.$$

Корреляционную функцию можно найти на основании экспериментально снятой кривой случайного процесса при наличии достаточно длительной записи (рис. 11.15). Обработка имеющейся осциллограммы производится следующим образом. Весь интервал записи осциллограммы T делится на N равных частей, длительность которых составляет

$$\Delta t = \frac{T}{N}.$$

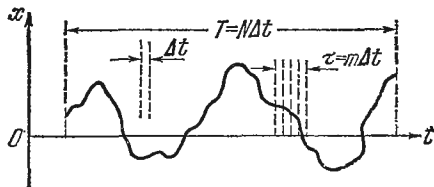


Рис. 11.15.

Затем для различных значений $\tau = m\Delta t$ находят средние значения произведений ординат:

$$R(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=1}^{N-m} x_n x_{n+m}.$$

По этим значениям строится график корреляционной функции в зависимости от интервала m или времени $\tau = m \Delta t$.

Корреляционную функцию можно найти по результатам эксперимента также при помощи специальных приборов — корреляторов, которые автоматически вычисляют среднее произведение двух ординат осциллограммы, отстоящих друг от друга на расстояние τ .

Если найденная корреляционная функция $R(\tau)$ содержит постоянную составляющую $\bar{x} = \sqrt{R(\infty)}$, то, выделив ее, можно перейти к корреляционной функции $R^0(\tau)$ в соответствии с (11.48), т. е. $R^0(\tau) = R(\tau) - (\bar{x})^2$.

Можно также ввести в рассмотрение нормированную корреляционную функцию

$$\rho(\tau) = \frac{R^0(\tau)}{D} = \frac{R(\tau) - R(\infty)}{R(0) - R(\infty)}, \quad (11.52)$$

которая удобна тем, что всегда $\rho(0) = 1$.

Корреляционная функция $R^0(\tau)$ для неслучайных (регулярных) функций времени тождественно равна нулю. Однако корреляционная функция $R(\tau)$ может вычисляться и для неслучайных функций времени. Рассмотрим несколько примеров.

1. Для постоянной величины $x(t) = A_0$ (например, для постоянного тока) корреляционная функция

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} A_0 A_0 dt = A_0^2.$$

2. Для гармонической функции $x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1)$

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} A_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1) A_1 \sin(\omega_1 t + \omega_1 \tau + \psi_1) dt = \frac{A_1^2}{2} \cos \omega_1 \tau.$$

Появление в корреляционной функции члена вида $\frac{A_1^2}{2} \cos \omega_1 \tau$ указывает на наличие в случайном процессе скрытой периодичности, которая может не обнаруживаться при первом взгляде на отдельные записи реализации случайного процесса.

3. Периодическая кривая, разлагаемая в ряд Фурье:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k t + \psi_k),$$

имеет на основании изложенного выше корреляционную функцию вида

$$R(\tau) = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} \cos \omega_k \tau.$$

Типичная корреляционная функция для стационарных случайных процессов при $\bar{x} = 0$, а следовательно $R(\tau) = R^0(\tau)$, и при отсутствии скрытых периодичностей имеет вид

$$R(\tau) = R(0) e^{-\alpha|\tau|} = D e^{-\alpha|\tau|}.$$

Иногда встречается корреляционная функция вида

$$R(\tau) = R(0) e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta \tau = D e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta \tau.$$

Эти выражения часто используются для аппроксимации корреляционных функций, полученных в результате обработки экспериментальных данных.

Для стационарных случайных процессов используется также понятие взаимной корреляционной функции, вводимой при рассмотрении каких-либо двух процессов $x(t)$ и $y(t)$:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t + \tau) dt. \quad (11.53)$$

Для взаимной корреляционной функции существует следующее соотношение:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau).$$

Кроме того, можно показать, что

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{R_x(0)} \sqrt{R_y(0)}.$$

Взаимная корреляционная функция характеризует взаимную связь двух случайных процессов между собой в разные моменты времени, отстоящие друг от друга на промежуток времени τ . Значение $R_{xy}(0)$ характеризует эту связь в один и тот же момент времени. Примером таких двух взаимосвязанных случайных процессов могут служить две координаты пространственного положения подвижной цели.

Для не связанных друг с другом случайных процессов для всех τ справедливо равенство $R_{xy}(\tau) = 0$. В связи с этим говорят, что процессы коррелированы или не коррелированы. Это означает наличие или отсутствие между ними статистической связи.

Аналогично предыдущему можно также ввести понятие нормированной взаимной корреляционной функции.

§ 11.5. Спектральная плотность стационарных процессов

Рассмотрим так называемую энергетическую форму интеграла Фурье. В главе 5 были приведены формулы (7.15) и (7.16), дающие переход от функции времени к изображению Фурье и обратно. Если рассматривается некоторая случайная функция времени $x(t)$, то для нее эти формулы могут быть записаны в виде

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (11.54)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (11.55)$$

Возьмем квадрат модуля изображения Фурье $|F(j\omega)|^2$ и проинтегрируем по всем частотам от $-\infty$ до $+\infty$ с делением результата на 2π :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) F(-j\omega) d\omega. \quad (11.56)$$

В последнем выражении квадрат модуля заменен произведением сопряженных комплексов $F(j\omega)$ и $F(-j\omega)$. Изображение Фурье $F(j\omega)$ заменим выражением (11.54):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(-j\omega) d\omega \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right].$$

В последней формуле изменим порядок интегрирования:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(-j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right]. \quad (11.57)$$

Величина, находящаяся в квадратных скобках (11.57), как нетрудно видеть, является исходной функцией времени (11.55). Поэтому в результате получается так называемая формула Релея (теорема Парсеваля), которая и соответствует энергетической форме интеграла Фурье:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)]^2 dt. \quad (11.58)$$

Подставляя $\omega = 2\pi f$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(j2\pi f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)]^2 dt. \quad (11.59)$$

Правая часть (11.58) и (11.59) представляет собой величину, пропорциональную энергии рассматриваемого процесса. Так, например, если рассматривается ток, протекающий по некоторому сопротивлению R , то энергия, выделявшаяся в этом сопротивлении за время t , будет

$$A = \int_0^t Ri^2 dt.$$

Из (11.58) и (11.59) вытекает, что для нахождения энергии рассматриваемого процесса за бесконечный интервал наблюдения с равным основанием можно интегрировать квадрат функции времени по всему времени от $-\infty$ до $+\infty$ или интегрировать квадрат модуля изображения Фурье по всем частотам от $-\infty$ до $+\infty$. Формулы (11.58) и (11.59) и выражают энергетическую форму интеграла Фурье.

Однако эти формулы неудобны тем, что для большинства процессов энергия за бесконечный интервал времени стремится также к бесконечности. Поэтому удобнее иметь дело не с энергией, а со средней мощностью процесса, которая будет получена, если энергию поделить на интервал наблюдения. Тогда формулу (11.58) можно представить в виде

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [x(t)]^2 dt. \quad (11.60)$$

Правая часть (11.60) представляет собой средний квадрат рассматриваемой величины $x(t)$.

Вводя обозначение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |F(j\omega)|^2 = S(\omega), \quad (11.61)$$

можно переписать формулу (11.60) в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega = \overline{x^2} \quad (11.62)$$

или в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(2\pi f) df = \overline{x^2}. \quad (11.63)$$

Величина $S(\omega)$ или $S(2\pi f)$ носит название *спектральной плотности*. Важным свойством спектральной плотности является то, что интегрирование ее по всем частотам от $-\infty$ до $+\infty$ дает средний квадрат исходной функции времени $x(t)$.

По своему физическому смыслу спектральная плотность есть величина, которая пропорциональна средней мощности процесса в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$.

В некоторых случаях спектральную плотность рассматривают только для положительных частот, удваивая ее при этом, что можно сделать, так как спектральная плотность является четной функцией частоты. Тогда, например, формула (11.62) должна быть записана в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_0(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega = \overline{x^2}, \quad (11.64)$$

где $S_0(\omega) = 2S(\omega)$ — спектральная плотность для положительных частот. Однако в дальнейшем изложении будет рассматриваться спектральная плотность, соответствующая всему диапазону частот от $-\infty$ до $+\infty$, так как при этом формулы получают более симметричный характер.

Весьма важным обстоятельством является то, что спектральная плотность и корреляционная функция случайных процессов представляют собой взаимные преобразования Фурье, т. е. они связаны интегральными зависимостями типа (11.54) и (11.55). Это свойство приводится без доказательств [108, 120].

Таким образом, могут быть записаны следующие формулы:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (11.65)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (11.66)$$

Так как спектральная плотность и корреляционная функция представляют собой четные вещественные функции, то иногда формулы (11.65) и (11.66) представляют в более простом виде:

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (11.67)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (11.68)$$

Это вытекает из того, что имеют место равенства:

$$\begin{aligned} e^{j\omega\tau} &= \cos \omega\tau + j \sin \omega\tau, \\ e^{-j\omega\tau} &= \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau, \end{aligned}$$

и мнимые части могут быть отброшены после подстановки в (11.65) и (11.66), так как слева стоят вещественные функции.

Связь между спектральной плотностью $S(\omega)$ и видом функции времени $x(t)$ заключается в том, что чем «уже» график спектральной плотности (рис. 11.16, а), т. е. чем меньшие частоты представлены в спектральной плотности, тем медленнее изменяется величина x во времени. Наоборот, чем «шире» график спектральной плотности (рис. 11.16, б), т. е. чем большие

частоты представлены в спектральной плотности, тем тоньше структура функции $x(t)$ и тем быстрее происходят изменения x во времени.

Как видно из этого рассмотрения, связь между видом спектральной плотности и видом функции времени получается обратной по сравнению со связью между корреляционной функцией и самим процессом (рис. 11.14). Отсюда вытекает, что более «широкому» графику спектральной плотности должен соответствовать более «узкий» график корреляционной функции и наоборот.

Вычисление спектральной плотности неудобно делать по соотношению (11.61), так как это связано с трудностью предельного перехода. Обычно

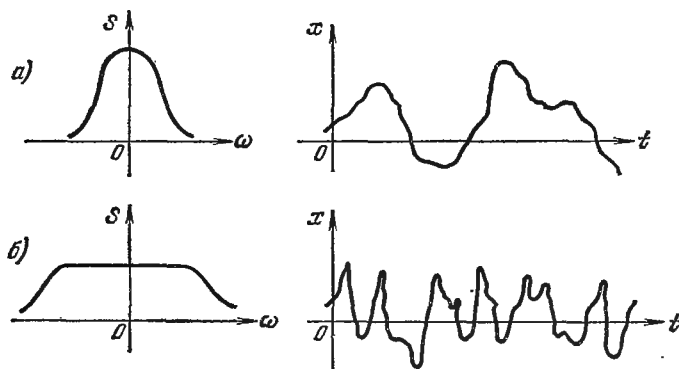


Рис. 11.16.

спектральная плотность вычисляется по известной корреляционной функции при помощи формул (11.65) или (11.67). Эти формулы соответствуют так называемому двустороннему преобразованию Фурье четной функции времени $R(\tau)$.

В табл. 11.3 даны некоторые функции $R(\tau)$ и их изображения Фурье $S(\omega)$ в соответствии с (11.65) и (11.67). В таблице используются импульсные функции $\delta(\tau)$ и $\delta(\omega)$. Эти функции, в отличие от импульсных функций, рассматривавшихся в главе 4, являются четными. Это означает, что функция $\delta(\tau)$ расположена симметрично относительно начала координат и может быть

определена следующим образом: $\delta(\tau) = 0$ при $\tau \neq 0$ и $\int_0^\varepsilon \delta(\tau) d\tau =$
 $= \int_{-\varepsilon}^0 \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{2}$ для всех $\varepsilon > 0$.

Аналогичное определение относится к функции $\delta(\omega)$.

Иногда в рассмотрение вводят нормированную спектральную плотность, являющуюся изображением Фурье нормированной корреляционной функции (11.52):

$$\sigma(\omega) = \frac{S^0(\omega)}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S^0(\omega) d\omega}, \quad (11.69)$$

где спектральная плотность $S^0(\omega)$ соответствует процессу $(x - \bar{x})$ и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S^0(\omega) d\omega = \overline{(x - \bar{x})^2} = D, \quad (11.70)$$

где D — дисперсия.

Таблица 11.3

Двустороннее изображение Фурье четных функций

№ п. п.	Оригинал	Изображение
1	$\delta(\tau)$	1
2	1	$2\pi\delta(\omega)$
3	$ \tau $	$-\frac{2}{\omega^2}$
4	$e^{-\alpha \tau }$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
5	$e^{-(\alpha\tau)^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2}$
6	$\sin \Omega \tau $	$\frac{2\Omega}{\Omega^2 - \omega^2}$
7	$\cos \Omega \tau$	$\pi [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)]$
8	$\sin (\Omega \tau + \psi)$	$\frac{2\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \cos \psi + \pi [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] \sin \psi$
9	$e^{-\alpha \tau } \sin \Omega \tau $	$\frac{\Omega - \omega}{\alpha^2 + (\Omega - \omega)^2} + \frac{\Omega + \omega}{\alpha^2 + (\Omega + \omega)^2}$
10	$e^{-\alpha \tau } \cos \Omega \tau$	$\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\Omega - \omega)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\Omega + \omega)^2}$
11	$e^{-(\alpha\tau)^2} \cos \Omega \tau$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \left[e^{-\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^2 (\omega - \Omega)^2} + e^{-\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^2 (\omega + \Omega)^2} \right]$

Аналогично введенному понятию взаимной корреляционной функции (11.53) могут рассматриваться взаимные спектральные плотности $S_{xy}(\omega)$ и $S_{yx}(\omega)$, являющиеся изображениями Фурье $R_{xy}(\tau)$ и $R_{yx}(\tau)$. Взаимные спектральные плотности также являются мерой связи между двумя случайными величинами. При отсутствии связи взаимные спектральные плотности равны нулю.

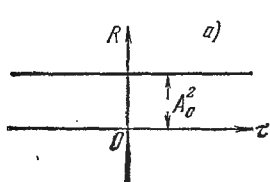
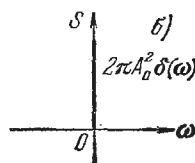


Рис. 11.17.



Рассмотрим некоторые примеры.
1. Для постоянной величины $x(t) = A_0$ корреляционная функция равна $R(\tau) = A_0^2$. Эта функция изображена на рис. 11.17, а жирной линией. Соответствующее ей изображение Фурье на основании табл. 11.3 будет

$$S(\omega) = 2\pi A_0^2 \delta(\omega)$$

или, в другом виде,

$$S(2\pi f) = A_0^2 \delta(f).$$

Спектр процесса состоит из единственного пика типа импульсной функции, расположенной в начале координат (рис. 11.17, б).

Это означает, что вся мощность рассматриваемого процесса сосредоточена на нулевой частоте, что и следовало ожидать.

2. Для гармонической функции $x = A_1 \sin(\omega_1 t + \psi)$ была получена корреляционная функция $R(\tau) = \frac{A_1^2}{2} \cos \omega_1 \tau$. Эта функция изображена на

рис. 11.18, а. В соответствии с табл. 11.3 спектральная плотность будет

$$S(\omega) = 2\pi \frac{A_1^2}{4} [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]$$

или

$$S(f) = \frac{A_1^2}{4} [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)].$$

График спектральной плотности будет иметь два пика типа импульсной функции (рис. 11.18, б), расположенные симметрично относительно начала координат при $\omega = +\omega_1$ и $\omega = -\omega_1$.

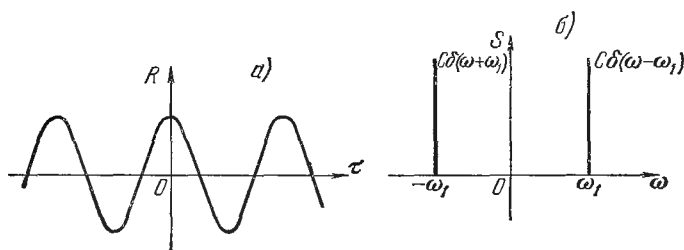


Рис. 11.18.

Следовательно, мощность гармонического сигнала сосредоточена на двух частотах: ω_1 и $-\omega_1$ (или соответственно f_1 и $-f_1$).

Если рассматривать спектральную плотность только в области положительных частот, то получим, что вся мощность гармонического сигнала будет сосредоточена на одной фиксированной частоте: $+\omega_1$ или $+f_1$.

3. Для периодической функции, разлагаемой в ряд Фурье

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k t + \psi_k),$$

спектральная плотность может быть представлена в виде

$$S(\omega) = 2\pi \left\{ A_0^2 \delta(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{4} [\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k)] \right\}$$

или

$$S(f) = A_0^2 \delta(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{4} [\delta(f - f_k) + \delta(f + f_k)].$$

Этой спектральной плотности соответствует линейчатый спектр (рис. 11.19) с импульсными функциями, расположенными на положительных и отрицательных частотах гармоник. На рис. 11.19 импульсные функции условно нарисованы так, что их высоты показаны пропорциональными коэффициентам при единичной импульсной функции, т. е. величинам $\frac{A_k^2}{4}$ и A_0^2 .

Если функция времени $x(t)$ кроме периодической части будет содержать непериодическую составляющую, то спектр этой функции будет содержать, наряду с отдельными линиями типа импульсной функции, также и непрерывную часть (рис. 11.20). Отдельные пики на графике спектральной плотности указывают на присутствие в исследуемой функции скрытых периодичностей.

Если функция времени $x(t)$ не содержит периодической части, то она будет иметь непрерывный спектр без ярко выраженных пиков.

Рассмотрим некоторые стационарные случайные процессы, имеющие значение при исследовании систем регулирования и следящих систем. Будем рассматривать только центрированные процессы, т. е. такие процессы, математическое ожидание которых равно нулю: $\bar{x} = 0$, а дисперсия $D \neq 0$. При

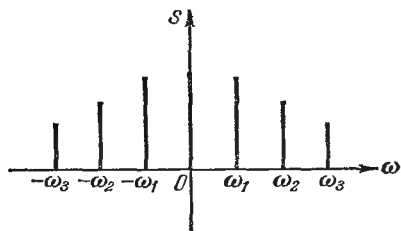


Рис. 11.19.

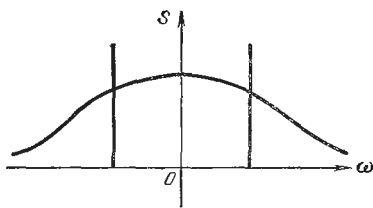


Рис. 11.20.

этом средний квадрат случайной величины будет равен дисперсии: $\bar{x}^2 = D = \sigma^2$, а $R(\tau) = R^0(\tau)$.

Это ограничение не имеет существенного значения, так как в случае $\bar{x} \neq 0$ учет постоянного смещения в системе регулирования является элементарным.

1. Б е л ы й ш у м. Под белым шумом понимается случайный процесс, имеющий «белый» спектр, т. е. одинаковое значение спектральной плотности при всех частотах от $-\infty$ до $+\infty$ (рис. 11.21, а):

$$S(\omega) = N. \quad (11.71)$$

Примером такого процесса могут являться тепловые шумы сопротивления, которые дают уровень спектральной плотности хаотического напряжения на этом сопротивлении

$$N = 4RkT^\circ,$$

где R — сопротивление, $k = 1,37 \times 10^{-23} \frac{\text{вт} \cdot \text{сек}}{4^\circ}$ — постоянная Больцмана, T° — абсолютная температура.

На основании (11.68) спектральной плотности (11.71) соответствует корреляционная функция

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty N \cos \omega \tau d\omega = N \delta(\tau). \quad (11.72)$$

Таким образом, корреляционная функция представляет импульсную функцию, расположенную в начале координат (рис. 11.24). Этот процесс

является чисто случайным процессом, так как из графика корреляционной функции видно, что при любом $\tau \neq 0$ отсутствует корреляция между последующими и предыдущими значениями случайной величины x .

Процесс с подобного рода спектральной плотностью является физически нереальным, так как ему соответствуют бесконечно большие дисперсия и средний квадрат случайной величины: $D = \bar{x}^2 = R(0) \rightarrow \infty$, а следовательно, бесконечно большая мощность.

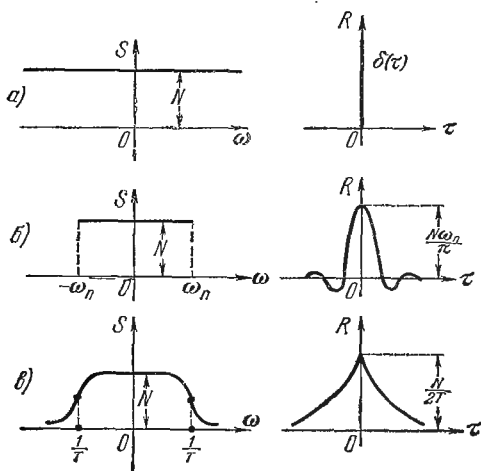


Рис. 11.21.

Чтобы получить физически реальный процесс, удобно ввести понятие белого шума с ограниченной спектральной плотностью (рис. 11.21, б):

$$\left. \begin{aligned} S(\omega) &= N & \text{при } |\omega| < \omega_{\Pi} \\ S(\omega) &= 0 & \text{при } |\omega| > \omega_{\Pi} \end{aligned} \right\}, \quad (11.73)$$

где

$$\Delta f = \frac{\Delta \omega}{2\pi} = \frac{\omega_{\Pi}}{\pi}$$

— полоса частот для спектральной плотности.

Этому процессу соответствует корреляционная функция

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \frac{N}{\pi} \int_0^{\omega_{\Pi}} \cos \omega \tau d\omega = \frac{N}{\pi \tau} \sin \omega_{\Pi} \tau. \quad (11.74)$$

Корреляционная функция также изображена на рис. 11.21, б. Для этого процесса

$$\overline{x^2} = D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\Pi}}^{\omega_{\Pi}} N d\omega = \frac{N 2\omega_{\Pi}}{2\pi} = \frac{N \Delta \omega}{2\pi} = N \Delta f. \quad (11.75)$$

Среднеквадратичное значение случайной величины пропорционально корню квадратному из полосы частот:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{N \Delta f}. \quad (11.76)$$

Часто бывает удобнее аппроксимировать зависимость (11.73) плавной кривой. Для этой цели можно, например, использовать выражение

$$S(\omega) = \frac{N}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{\mu^2 N}{\mu^2 + \omega^2}, \quad (11.77)$$

где $\mu = \frac{1}{T}$ — коэффициент, определяющий ширину полосы частот.

График спектральной плотности, соответствующий этому выражению, построен на рис. 11.21, в. Для частот $-\mu < \omega < \mu$ процесс приближается к белому шуму, так как для этих частот

$$S(\omega) \approx N.$$

Интегрирование (11.77) по всем частотам дает возможность определить дисперсию:

$$D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N d\omega}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{N}{2T}.$$

Поэтому спектральная плотность (11.77) может быть записана в другом виде:

$$S(\omega) = \frac{2TD}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{2\mu D}{\mu^2 + \omega^2}. \quad (11.78)$$

Корреляционная функция для этого процесса

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\mu D}{\mu^2 + \omega^2} e^{j\omega \tau} d\omega = D e^{-\mu |\tau|}. \quad (11.79)$$

Корреляционная функция также изображена на рис. 11.21, в.

2. Типовой входной сигнал следящей системы. В качестве типового сигнала для следящей системы часто принимают график изменения угловой скорости на входе в соответствии с рис. 11.22. Скорость сохраняет постоянное значение в течение некоторых интервалов времени ($t_1, t_2, t_3, \dots$).

Переход от одного значения к другому совершается мгновенно. Интервалы времени подчиняются закону распределения Пуассона (11.4).

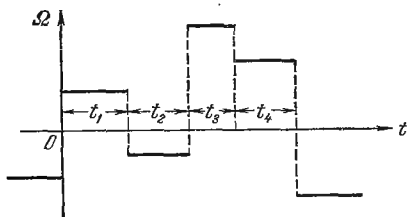


Рис. 11.22.

В соответствии со сказанным выше будем считать, что математическое ожидание $\bar{\Omega} = 0$, а средний квадрат скорости равен дисперсии, т. е. $\bar{\Omega}^2 = D_{\Omega} \neq 0$.

График такого вида получается, например, в первом приближении при слежении радиолокатором за движущейся целью. Постоянное значение скорости соответствует движению цели по прямой. Перемена знака или величины

скорости соответствует маневру цели.

Обозначим μ среднее число перемен скорости за одну секунду. Тогда $T = \frac{1}{\mu}$ будет средним значением интервала времени, в течение которого угловая скорость сохраняет постоянное значение. Применительно к радиолокатору это значение будет средним временем движения цели по прямой.

Для определения корреляционной функции необходимо найти среднее значение произведения

$$R(\tau) = \overline{\Omega(t) \Omega(t + \tau)}.$$

При нахождении этого произведения могут быть два случая.

1. Моменты времени t и $t + \tau$ относятся к одному интервалу. Тогда среднее значение произведения угловых скоростей будет равно среднему квадрату угловой скорости или дисперсии:

$$\overline{R_1(\tau)} = \overline{\Omega(t) \Omega(t + \tau)} = \overline{\Omega^2} = D_{\Omega}.$$

2. Моменты времени t и $t + \tau$ относятся к разным интервалам. Тогда среднее значение произведения скоростей будет равно нулю:

$$R_2(\tau) = \overline{\Omega(t) \Omega(t + \tau)} = 0,$$

так как произведения с положительным и отрицательным знаками будут равновероятными.

Корреляционная функция будет равна

$$R(\tau) = P_1 R_1(\tau) + P_2 R_2(\tau) = P_1 R_1(\tau),$$

где P_1 — вероятность нахождения моментов времени t и $t + \tau$ в одном интервале, а $P_2 = 1 - P_1$ — вероятность нахождения их в разных интервалах.

Вероятность появления перемены скорости на малом промежутке времени Δt пропорциональна этому промежутку и равна $\mu \Delta t$ или $\frac{\Delta t}{T}$. Вероят-

ность отсутствия перемены скорости для этого же промежутка будет $1 - \frac{\Delta t}{T}$. Для интервала времени τ вероятность отсутствия перемены скорости, т. е. вероятность нахождения моментов времени t и $t + \tau$ в одном интервале постоянной скорости, будет равна произведению вероятностей отсутствий перемены скорости на каждом элементарном промежутке Δt , так как эти события независимые.

В результате для конечного промежутка $\Delta\tau$ получаем

$$P_1 = \left(1 - \frac{\Delta\tau}{T}\right)^{\frac{\tau}{\Delta\tau}}.$$

Устремив $\Delta\tau \rightarrow 0$ и переходя к пределу, получим

$$P_1 = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\Delta\tau}{T}\right)^{\frac{\tau}{\Delta\tau}} = e^{-\frac{\tau}{T}}$$

и окончательно

$$R(\tau) = D\Omega e^{-\frac{|\tau|}{T}} = \Omega^2 e^{-\frac{|\tau|}{T}}. \quad (11.80)$$

Знак модуля при τ поставлен вследствие того, что выражение (11.80) должно соответствовать четной функции. Выражение для корреляционной функции совпадает с (11.79). Поэтому спектральная плотность рассматриваемого процесса должна совпадать с (11.78):

$$S_{\Omega}(\omega) = \frac{2TD_{\Omega}}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{2\mu D_{\Omega}}{\mu^2 + \omega^2}. \quad (11.81)$$

Заметим, что в отличие от (11.78) формула спектральной плотности (11.81) записана для угловой скорости процесса (рис. 11.22). Если перейти от угловой скорости к углу, то получится нестационарный случайный процесс с дисперсией, стремящейся к бесконечности. Однако в большинстве случаев следящая система, на входе которой действует этот процесс, обладает астатизмом первого и более высоких порядков. Поэтому первый коэффициент ошибки c_0 у следящей системы равен нулю и ее ошибка будет определяться только входной скоростью и производными более высоких порядков, относительно которых процесс стационарен. Это дает возможность использовать спектральную плотность (11.81) при расчете динамической ошибки следящей системы.

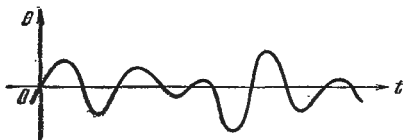


Рис. 11.23.

3. Нерегулярная качка. Некоторые объекты, например корабли, самолеты и другие, находясь под действием нерегулярных возмущений (нерегулярное волнение, атмосферные возмущения и т. п.), движутся по случайному закону. Так как сами объекты имеют определенную, им свойственную, частоту колебаний, то они обладают свойством подчеркивать те частоты возмущений, которые близки к их собственной частоте колебаний. Получающееся при этом случайное движение объекта называют нерегулярной качкой в отличие от регулярной качки, представляющей собой периодическое движение.

Типичный график нерегулярной качки изображен на рис. 11.23. Из рассмотрения этого графика видно, что, несмотря на случайный характер, это движение довольно близко к периодическому.

В практике корреляционную функцию нерегулярной качки часто аппроксимируют выражением

$$R(\tau) = D e^{-\mu|\tau|} \cos \beta\tau, \quad (11.82)$$

где β — резонансная частота, μ — параметр затухания, D — дисперсия. Значения D , μ и β находятся обычно путем обработки экспериментальных данных (натурных испытаний).

Корреляционной функции (11.82) соответствует спектральная плотность (см. табл. 11.3)

$$S(\omega) = \mu D \left[\frac{1}{\mu^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{1}{\mu^2 + (\beta + \omega)^2} \right] = \frac{2a(1 + b\omega^2)D}{|1 + aj\omega + b(j\omega)^2|^2}. \quad (11.83)$$

Неудобством аппроксимации (11.82) является то, что этой формулой можно описать поведение какой-либо одной величины нерегулярной качки (угла, угловой скорости или углового ускорения). В этом случае величина D будет соответствовать дисперсии угла, скорости или ускорения.

Если, например, записать формулу (11.82) для угла, то этому процессу будет соответствовать нерегулярная качка с дисперсией для угловых скоростей, стремящейся к бесконечности, т. е. это будет физически нереальный процесс.

Более удобная формула для аппроксимации угла качки

$$R(\tau) = D_0 e^{-\mu|\tau|} \left(\cos \beta \tau + \frac{\mu}{\beta} \sin \beta |\tau| \right). \quad (11.84)$$

Соответствующая спектральная плотность

$$S(\omega) = \frac{\mu}{\beta} D_0 \left[\frac{2\beta - \omega}{\mu^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{2\beta + \omega}{\mu^2 + (\beta + \omega)^2} \right] = \frac{2aD_0}{|1 + aj\omega + b(j\omega)^2|^2}. \quad (11.85)$$

Здесь D_0 — дисперсия для угла, $a = 2\mu(\mu^2 + \beta)^{-1}$, $b = (\mu^2 + \beta)^{-1}$.

При такой аппроксимации дисперсия для угловой скорости получается конечной: $D_\omega = (\mu^2 + \beta^2) D_0$.

Однако и эта аппроксимация соответствует физически нереальному процессу, так как дисперсия углового ускорения получается стремящейся к бесконечности.

Для получения конечной дисперсии углового ускорения требуются еще более сложные формулы аппроксимации, которые здесь не приводятся.

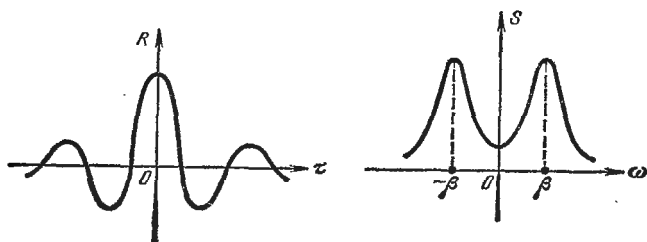


Рис. 11.24.

Типичные кривые для корреляционной функции и спектральной плотности нерегулярной качки приведены на рис. 11.24.

§ 11.6. Канонические разложения случайных функций

Элементарной случайной функцией называется функция, которая может быть представлена в виде

$$x(t) = x\varphi(t), \quad (11.86)$$

где $\varphi(t)$ — некоторая известная неслучайная функция времени (синусоида, экспонента, степенная функция и т. п.), x — случайная величина.

Если математическое ожидание величины x равно нулю, то и математическое ожидание случайной функции $M[x(t)] = 0$. Корреляционная функция в этом случае

$$R(t, t_1) = M[x\varphi(t)x\varphi(t_1)] = D\varphi(t)\varphi(t_1), \quad (11.87)$$

где дисперсия $D = M[x^2]$.

Рассмотрим случайную функцию $x(t)$, которая может быть представлена в виде суммы математического ожидания $\tilde{x}(t)$ и элементарных случайных

функций:

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \sum V_v x_v(t). \quad (11.88)$$

Здесь V_v — случайные взаимно некоррелированные коэффициенты с нулевым математическим ожиданием.

Представление случайной функции в виде суммы ее математического ожидания и взаимно некоррелированных элементарных случайных функций называется *каноническим разложением*. Случайные коэффициенты носят название коэффициентов канонического разложения, а функции $x_v(t)$ — координатных функций.

При использовании канонического разложения значительно упрощается выполнение различных операций над случайными функциями (дифференцирование, интегрирование, решение линейных дифференциальных уравнений и т. п.). Так, например, производная от (11.88) будет

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} + \sum V_v \frac{dx_v(t)}{dt}. \quad (11.89)$$

Аналогичным образом интегрирование (11.88) дает

$$\int x(t) dt = \int \tilde{x}(t) dt + \sum V_v \int x_v(t) dt. \quad (11.90)$$

Для нахождения канонического разложения случайных функций существуют различные методы [108].

Из (11.88) может быть найдена корреляционная функция

$$R(t, t_1) = M[x(t) x(t_1)] = [\tilde{x}(t)]^2 + \sum D_v x_v(t) x_v(t_1). \quad (11.91)$$

Здесь $D_v = M[V_v^2]$ — дисперсии коэффициентов канонического разложения. Таким образом, корреляционная функция может быть выражена через те же координатные функции.

Для стационарной случайной функции, заданной в интервале $-T < t < T$, разность $\tau = t_1 - t$ изменяется в интервале $-2T < \tau < 2T$ и разложение корреляционной функции может быть задано в виде ряда Фурье:

$$R(\tau) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} D_v e^{j\omega_v \tau} = (\tilde{x})^2 + \sum_{v=1}^{\infty} 2D_v \cos \omega_v \tau, \quad \omega_v = \frac{\pi v}{2T}, \quad (11.92)$$

где v — целые числа.

Этому выражению соответствует каноническое разложение самой случайной функции

$$x(t) = \tilde{x} + \sum_{v=-\infty}^{\infty} V_v e^{j\omega_v t} = \tilde{x} + \sum_{v=0}^{\infty} (X_v \cos \omega_v t + Y_v \sin \omega_v t), \quad (11.93)$$

где X_v и Y_v — взаимно некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и с одинаковыми дисперсиями $0,5D_v$. В разложении (11.92) должны отсутствовать нечетные гармоники. Тогда ряд (11.93) будет содержать только четные гармоники, что соответствует периоду $2T$ (интервалу $-T < t < T$).

Если разность между двумя соседними гармониками $\Delta\omega = \omega_{v+1} - \omega_v = \frac{\pi}{2T}$ устремить к нулю, что соответствует $T \rightarrow \infty$, то формулу (11.92) можно представить в виде

$$R(\tau) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{D_v}{\Delta\omega} e^{j\omega_v \tau} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega \tau} d\omega. \quad (11.94)$$

Здесь введена спектральная плотность стационарного процесса (см. § 11.5)

$$S(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{2\pi D_v}{\Delta\omega} = \lim_{T \rightarrow \infty} 4T D_v,$$

являющаяся изображением Фурье корреляционной функции $R(\tau)$.

§ 11.7. Прохождение случайного сигнала через линейную систему

Рассмотрим линейную систему (рис. 11.25) с передаточной функцией $W(p)$ и функцией веса $w(t)$. Пусть на входе действует случайный сигнал $x_1(t)$ с корреляционной функцией $R_1(t, t_1)$.

Выходной сигнал $x_2(t)$ на основании формулы свертки (7.44)

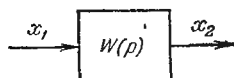


Рис. 11.25.

$$x_2(t) = \int_0^t w(\tau) x_1(t-\tau) d\tau = \int_0^t w(t-\tau) x_1(\tau) d\tau.$$

Рассматривая в этой формуле математические ожидания, имеем

$$M[x_2(t)] = \tilde{x}_2(t) = \int_0^t w(t-\tau) \tilde{x}_1(\tau) d\tau. \quad (11.95)$$

Для получения корреляционной функции на выходе запишем исходную формулу для центрированных значений $x_1^0(t) = x_1(t) - \tilde{x}_1(t)$ и $x_2^0(t) = x_2(t) - \tilde{x}_2(t)$ для двух моментов времени:

$$\left. \begin{aligned} x_2^0(t) &= \int_0^t w(\eta) x_1^0(t-\eta) d\eta, \\ x_2^0(t_1) &= \int_0^{t_1} w(\lambda) x_1^0(t_1-\lambda) d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (11.96)$$

После перемножения получим

$$x_2^0(t) x_2^0(t_1) = \int_0^t \int_0^{t_1} w(\eta) w(\lambda) x_1^0(t-\eta) x_1^0(t_1-\lambda) d\eta d\lambda. \quad (11.97)$$

Далее, переходя к математическому ожиданию, можно найти корреляционную функцию

$$R_2^0(t, t_1) = \int_0^t w(\eta) d\eta \int_0^{t_1} w(\lambda) R_1^0(t-\eta, t_1-\lambda) d\lambda. \quad (11.98)$$

Для определения дисперсии на выходе $D_2(t)$ в формуле (11.98) следует положить $t = t_1$. Тогда

$$D_2(t) = R^0(t, t) = \int_0^t w(\eta) d\eta \int_0^t w(\lambda) R_1^0(t-\eta, t-\lambda) d\lambda. \quad (11.99)$$

В случае использования канонического разложения случайной функции

$$x_1(t) = \tilde{x}_1(t) + \sum_v V_v x_v(t) \quad (11.100)$$

выходная величина] может быть представлена в виде

$$x_2(t) = \tilde{x}_2(t) + \sum_v V_v y_v(t), \quad (11.101)$$

где $\tilde{x}_2(t)$ определяется формулой (11.95), а координатные функции

$$y_v(t) = \int_0^t w(t-\tau) x_v(\tau) d\tau. \quad (11.102)$$

Корреляционная функция выходного сигнала

$$R_2^0(t, t_1) = \sum_v D_v y_v(t) y_v(t_1), \quad (11.103)$$

а дисперсия

$$D_2(t) = \sum_v D_v [y_v(t)]^2. \quad (11.104)$$

Для нахождения математического ожидания $\tilde{x}_2(t)$ и координатных функций $y_v(t)$ в соответствии с выражениями (11.95) и (11.102) могут использоваться различные методы построения переходных процессов (см. главу 7).

В случае, когда на входе (рис. 11.25) действует случайный стационарный процесс, корреляционная функция $R_1^0(t, t_1) = R_1^0(\tau)$ зависит только от сдвига $\tau = t_1 - t$. Однако на выходе линейной системы процесс некоторое время после включения будет устанавливаться и не будет стационарным. Корреляционная функция на выходе может быть получена из общего выражения (11.98):

$$R_2^0(t, t_1) = \int_0^t w(\eta) d\eta \int_0^{t_1} w(\lambda) R_1^0(\tau - \eta + \lambda) d\lambda, \quad (11.105)$$

а дисперсия — из (11.99):

$$D_2(t) = \int_0^t w(\eta) d\eta \int_0^t w(\lambda) R_1^0(\lambda - \eta) d\lambda. \quad (11.106)$$

Если рассматриваемая система устойчива, то $R_2^0(t, t_1)$ и $D_2(t)$ стремятся к некоторым пределам, которые определяют стационарный процесс на выходе. Они могут быть найдены из (11.105) и (11.106), если положить $t \rightarrow \infty$ и $t_1 \rightarrow \infty$.

Тогда при $t_1 - t = \tau$

$$R_2^0(\tau) = \int_0^\infty w(\eta) d\eta \int_0^\infty w(\lambda) R_1^0(\tau - \eta + \lambda) d\lambda, \quad (11.107)$$

$$D_2 = R_2^0(0) = \int_0^\infty w(\eta) d\eta \int_0^\infty w(\lambda) R_1^0(\lambda - \eta) d\lambda. \quad (11.108)$$

Пусть, например, на входе интегрирующего звена с передаточной функцией $W(p) = k/p$ и функцией веса $w(t) = k$ действует белый шум с корреляционной функцией $R_1(\tau) = \frac{3}{2} R_1^0(\tau) = N\delta(\tau)$. Тогда в соответствии с (11.106) дисперсия на выходе будет

$$D_2(t) = \int_0^t k d\eta \int_0^t k N \delta(\lambda - \eta) d\lambda = \int_0^t k d\eta \cdot k N = k^2 N t,$$

т. е. дисперсия растет пропорционально времени. Нетрудно видеть, что $D(\infty) \rightarrow \infty$, так как звено не является устойчивым, а оно находится на границе устойчивости (нейтрально-устойчиво).

Для расчета установившегося стационарного процесса на выходе системы (рис. 11.25) более удобно исходить из известной спектральной плотности на входе $S_1(\omega)$. Тогда можно легко найти спектральную плотность $S_2(\omega)$ выходного сигнала. Действительно, по определению спектральная плотность на входе связана с изображением Фурье $F_1(j\omega)$ случайной величины $x_1(t)$ соотношением (11.64):

$$S_1(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |F_1(j\omega)|^2.$$

Это же соотношение имеет место и для выходного сигнала:

$$S_2(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |F_2(j\omega)|^2.$$

В линейной системе изображения Фурье $F_1(j\omega)$ и $F_2(j\omega)$ связаны между собой посредством частотной передаточной функции:

$$F_2(j\omega) = W(j\omega) F_1(j\omega).$$

Отсюда можно найти

$$S_2(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |F_1(j\omega)|^2 |W(j\omega)|^2,$$

или

$$S_2(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_1(\omega). \quad (11.109)$$

Таким образом, спектральная плотность выходной величины может быть получена умножением спектральной плотности входной величины на квадрат модуля частотной передаточной функции линейной системы. Отметим, что приведенное выше доказательство, вообще говоря, не является строгим, так как существование стационарного случайного процесса на выходе не доказано.

При известной спектральной плотности $S_2(\omega)$ выходной величины может быть найдена корреляционная функция $R_2(\tau)$ по преобразованию Фурье (11.66) или (11.68).

Получим выражение (11.109) более строго. Для этого используем формулу (11.107). Так как в реальных системах весовая функция тождественно равна нулю при $t < 0$, то нижние пределы интегрирования можно положить равными $-\infty$. Полагая, что на входе действует центрированный процесс ($\bar{x}_1 = 0$) и $\mathbb{E}R_1(\tau) = R_1^0(\tau)$, имеем

$$R_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) R_1(\tau + \lambda - \eta) d\lambda. \quad (11.110)$$

Найдем теперь спектральную плотность для выходного сигнала. Она связана с корреляционной функцией соотношением (11.65):

$$S_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_2(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Подставляя в последнюю формулу значение корреляционной функции из (11.110), получаем

$$\begin{aligned} S_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} w(\eta) w(\lambda) R_1(\tau + \lambda - \eta) d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(\tau + \lambda - \eta)} e^{j\omega\lambda} e^{-j\omega\eta} R_1(\tau + \lambda - \eta) w(\lambda) w(\eta) d\eta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) e^{-j\omega\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) e^{j\omega\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} R_1(\tau + \lambda - \eta) e^{-j\omega(\tau + \lambda - \eta)} d\tau = \\
&= W(j\omega) W(-j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} R_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = |W(j\omega)|^2 S_1(\omega). \quad (11.111)
\end{aligned}$$

Последнее выражение совпадает с (11.109), что и требовалось доказать.

Для нахождения дисперсии, или среднего квадрата выходной величины, необходимо проинтегрировать по всем частотам спектральную плотность:

$$\overline{x_2^2} = D_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_2(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} S_2(2\pi f) df. \quad (11.112)$$

Отметим, что закон распределения для случайной величины может, вообще говоря, меняться при прохождении ее через линейную систему. Однако в случае, если на входе линейной системы имеется нормальное распределение случайной величины $x_1(t)$, то на выходе для случайной величины $x_2(t)$ также будет иметь место нормальное распределение.

При вычислении интеграла (11.112) обычно приходится иметь дело с подынтегральным выражением вида

$$\frac{|B(j\omega)|^2}{|A(j\omega)|^2},$$

где $A(j\omega)$ и $B(j\omega)$ представляют собой некоторые полиномы от комплексной переменной $j\omega$.

Наивысшую степень знаменателя обозначим $2n$. Наивысшая степень числителя в реальной системе может быть не выше $2n - 2$. Для удобства интегрирования написанное выше выражение обычно представляют в виде

$$\frac{|B(j\omega)|^2}{|A(j\omega)|^2} = \frac{G(j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)},$$

где

$$A(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$G(j\omega) = b_0(j\omega)^{2n-2} + b_1(j\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}.$$

Полином $G(j\omega)$ содержит только четные степени $j\omega$. Полином $A(j\omega)$ для устойчивой системы может иметь корни только в верхней полуплоскости. Область устойчивости оказалась в верхней полуплоскости вследствие того, что была использована подстановка $p = j\omega$, а множитель j означает поворот комплексного числа на угол $\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, вычисление дисперсии (11.112) можно свести к нахождению интеграла

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(j\omega) d\omega}{A(j\omega)A(-j\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\omega) d\omega}{|A(j\omega)|^2}. \quad (11.113)$$

В общем случае при любом n для устойчивой системы интеграл I_n может быть представлен в виде [38]

$$I_n = \frac{1}{2a_0} \frac{M_n}{\Delta_n}, \quad (11.114)$$

где

$$\Delta_n = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \quad (11.115)$$

совпадает с точностью до знака со старшим определителем Гурвица, а числитель определяется выражением

$$M_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} (-1)^n. \quad (11.116)$$

Интегралы такого вида вычислены до $n = 7$ и сведены в таблицы (см. приложение 2).

Заметим, что знаменатель правых частей приведенных в приложении 2 формул представляет собой Δ_{n-1} — определитель Гурвица. На границе колебательной устойчивости этот определитель обращается в нуль, а дисперсия выходной величины будет стремиться к бесконечности.

В заключение рассмотрим два важных случая прохождения случайного сигнала через линейную систему.

Статистическое дифференцирование. При поступлении случайного сигнала на идеальное дифференцирующее устройство с передаточной функцией $W(p) = p$ спектральная плотность выходной величины (производной от входной величины) может быть получена умножением спектральной плотности входной величины на ω^2 :

$$S_2(\omega) = \omega^2 S_1(\omega), \quad (11.117)$$

при двойном дифференцировании — на ω^4 и т. д.

Статистическое интегрирование. При поступлении случайного сигнала на идеальное интегрирующее звено с передаточной функцией $W(p) = \frac{1}{p}$ спектральная плотность выходной величины (интеграла от входной величины) может быть получена делением интегральной плотности входной величины на ω^2 :

$$S_2(\omega) = \frac{S_1(\omega)}{\omega^2}, \quad (11.118)$$

при двойном интегрировании — на ω^4 и т. д.

§ 11.8. Расчет установившихся ошибок в автоматических системах

Замкнутая система автоматического регулирования может находиться под воздействием случайного задающего сигнала $g(t)$ и случайной помехи $f(t)$, приложенной в произвольной точке системы (рис. 11.26).

Корреляционные функции и спектральные плотности задающего воздействия и помехи будем считать известными. Конечной целью расчета является нахождение корреляционных функций и спектральных плотностей выходной величины $y(t)$ и ошибки $x(t)$. Обычно ограничиваются более узкой задачей и определяют только среднеквадратичную ошибку системы регулирования. Это может быть сделано посредством интегрирования по всем

частотам спектральной плотности ошибки или через корреляционную функцию ошибки $x(t)$.

В простейшем случае, когда задающее воздействие $g(t)$ представляет собой случайный стационарный процесс со спектральной плотностью $S_g(\omega)$, а помеха отсутствует: $f(t) = 0$, расчет можно свести к рассмотренной выше схеме (рис. 11.25). Тогда спектральная плотность ошибки будет

$$S_x(\omega) = |\Phi_x(j\omega)|^2 S_g(\omega). \quad (11.119)$$

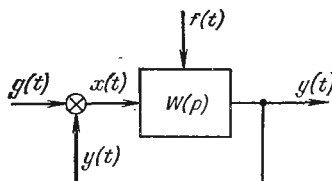


Рис. 11.26.

Частотная передаточная функция по ошибке $\Phi_x(j\omega)$ связана с частотными передаточными функциями разомкнутой $W(j\omega)$ и замкнутой $\Phi(j\omega)$ системы соотношением

$$\Phi_x(j\omega) = \frac{1}{1 + W(j\omega)} = 1 - \Phi(j\omega).$$

Таким образом, для спектральной плотности ошибки получаем

$$S_x(\omega) = \frac{S_g(\omega)}{|1 + W(j\omega)|^2}. \quad (11.120)$$

Интегрирование этого выражения по всем частотам позволяет определить дисперсию и среднеквадратичное значение ошибки:

$$\sigma_{\text{ср}} = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega}. \quad (11.121)$$

Вычисление дисперсии и среднеквадратичной ошибки через корреляционные функции может производиться на основании формулы (11.107). В качестве функции веса в рассматриваемом случае должна использоваться функция веса для ошибки $w_x(t)$, связанная с частотной передаточной функцией по ошибке преобразованием Фурье

$$\Phi_x(j\omega) = \int_0^{\infty} w_x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

После нахождения корреляционной функции ошибки $R_x(\tau)$ дисперсия определяется подстановкой $\tau = 0$, т. е. $D = R_x(0)$.

Однако нахождение среднеквадратичной ошибки посредством использования спектральных плотностей оказывается обычно более простым и поэтому применяется чаще.

В другом простейшем случае, когда задающее воздействие $g(t) = 0$, а помеха представляет собой случайный стационарный процесс со спектральной плотностью $S_f(\omega)$, аналогичным образом можно найти спектральную плотность ошибки:

$$S_x(\omega) = |\Phi_f(j\omega)|^2 S_f(\omega). \quad (11.122)$$

В этом выражении $\Phi_f(j\omega)$ представляет собой частотную передаточную функцию:

$$\Phi_f(j\omega) = \left. \frac{X(p)}{F(p)} \right|_{p=j\omega} = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)},$$

связывающую изображения Фурье ошибки $x(t)$ и помехи $f(t)$.

В частном случае, когда помеха $f(t)$ действует на входе системы в месте приложения задающего воздействия, в формуле (11.101) должна

использоваться частотная передаточная функция замкнутой системы

$$S_x(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_f(\omega) = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|^2 S_f(\omega). \quad (11.123)$$

Рассмотрим теперь общее выражение спектральной плотности ошибки для случая, когда задающее воздействие $g(t)$ и помеха $f(t)$ действуют одновременно (рис. 11.26).

Обозначим через $w_x(t)$ весовую функцию для ошибки по задающему воздействию и через $w_f(t)$ весовую функцию для ошибки по помехе. Тогда ошибку можно представить в виде

$$x(t) = \int_0^\infty g(t-\lambda) w_x(\lambda) d\lambda + \int_0^\infty f(t-\lambda) w_f(\lambda) d\lambda. \quad (11.124)$$

Подставим это выражение для ошибки в формулу корреляционной функции (11.51). В результате получим

$$\begin{aligned} R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-T}^T dt \int_0^\infty g(t+\tau-\eta) w_x(\eta) d\eta \int_0^\infty g(t-\lambda) w_x(\lambda) d\lambda + \right. \\ + \int_{-T}^T dt \int_0^\infty f(t+\tau-\eta) w_f(\eta) d\eta \int_0^\infty f(t-\lambda) w_f(\lambda) d\lambda + \\ + \int_{-T}^T dt \int_0^\infty g(t+\tau-\eta) w_x(\eta) d\eta \int_0^\infty f(t-\lambda) w_f(\lambda) d\lambda + \\ \left. + \int_{-T}^T dt \int_0^\infty g(t-\lambda) w_x(\lambda) d\lambda \int_0^\infty f(t+\tau-\eta) w_f(\eta) d\eta \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \{ w_x(\lambda) R_g(\tau+\lambda-\eta) w_x(\eta) + w_f(\lambda) R_f(\tau+\lambda-\eta) w_f(\eta) + \\ + w_f(\lambda) R_{fg}(\tau+\lambda-\eta) w_x(\eta) + w_x(\lambda) R_{gf}(\tau+\lambda-\eta) w_f(\eta) \} d\eta, \quad (11.125) \end{aligned}$$

где $R_{gf}(\tau)$ и $R_{fg}(\tau)$ — взаимные корреляционные функции.

Для нахождения спектральной плотности ошибки левую и правую части (11.125) умножим на $e^{-j\omega\tau}$ и проинтегрируем по τ от $-\infty$ до $+\infty$. В результате выкладок, аналогичных тем, которые были проделаны при выводе формулы (11.111), получим

$$\begin{aligned} S_x(\omega) = |\Phi_x(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |\Phi_f(j\omega)|^2 S_f(\omega) + \\ + \Phi_x(j\omega) S_{fg}(\omega) \Phi_f^*(j\omega) + \Phi_x^*(j\omega) S_{gf}(\omega) \Phi_f(j\omega). \quad (11.126) \end{aligned}$$

В этом выражении $S_{gf}(\omega)$ и $S_{fg}(\omega)$ представляют собой взаимные спектральные плотности полезного сигнала и помехи, а $\Phi_x(j\omega)$ и $\Phi_f(j\omega)$ — частотные передаточные функции для ошибки по задающему воздействию и помехе. Звездочкой обозначен сопряженный комплекс.

При отсутствии корреляции между полезным сигналом и помехой формула (11.126) упрощается:

$$S_x(\omega) = |\Phi_x(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |\Phi_f(j\omega)|^2 S_f(\omega). \quad (11.127)$$

В частном случае, когда помеха действует на входе в месте приложения управляющего воздействия и корреляция между ними отсутствует, формула (11.127) может быть представлена в следующем виде:

$$S_x(\omega) = |\Phi_x(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |\Phi(j\omega)|^2 S_f(\omega) = \\ = \left| \frac{1}{1+W(j\omega)} \right|^2 S_g(\omega) + \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|^2 S_f(\omega), \quad (11.128)$$

так как для этого случая частотная передаточная функция $\Phi_f(j\omega)$ совпадает с частотной передаточной функцией замкнутой системы $\Phi(j\omega)$.

Все приведенные выше формулы для спектральной плотности ошибки $x(t)$ могут быть легко переписаны для спектральной плотности выходной величины $y(t)$, если в них заменить частотную передаточную функцию для ошибки $\Phi_x(j\omega)$ на частотную передаточную функцию замкнутой системы $\Phi(j\omega) = 1 - \Phi_x(j\omega)$.

§ 11.9. Расчеты по минимуму среднеквадратичной ошибки

Если на автоматическую систему действуют одновременно полезный сигнал и помеха, то возникает задача оптимального расчета системы с тем, чтобы получить наименьшую результирующую ошибку. С точки зрения наилучшего воспроизведения полезного сигнала система должна иметь возможно большую полосу пропускания, а с точки зрения наилучшего подавления помехи система, наоборот, должна иметь возможно меньшую полосу пропускания. Критерием получения оптимального решения здесь будет минимальное значение результирующей ошибки системы, определяемой полезным сигналом и помехой.

Для случайных величин наиболее просто определить среднеквадратичную ошибку, поэтому ее и используют для оценки точности автоматической системы.

Рассмотрим расчет системы по критерию минимума среднеквадратичной ошибки при одновременном действии полезного сигнала и помехи.

Согласно этому критерию нежелательность ошибки пропорциональна квадрату ее величины. Такая постановка является часто логичной, но она не может, конечно, претендовать на полную универсальность. В некоторых случаях, например при стрельбе по какой-либо цели, все ошибки, большие некоторого значения, являются одинаково нежелательными. Однако средний квадрат ошибки системы регулирования

$$\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt \quad (11.129)$$

практически во всех случаях является наиболее просто вычисляемой величиной, что и определило использование этого критерия.

Возможны несколько формулировок задачи. Наиболее просто задача может быть сформулирована так. Если имеется какая-то система автоматического регулирования заданной структуры, то необходимо так выбрать параметры этой системы, чтобы получить минимум среднеквадратичной ошибки при заданных статистических характеристиках полезного сигнала и помехи.

Эта задача решается следующим образом. По спектральной плотности ошибки путем ее интегрирования находится дисперсия. Дисперсия получается зависящей от вероятностных характеристик полезного сигнала, помехи и параметров системы. Затем ищутся условия, которые должны быть

наложены на параметры системы, чтобы получить минимум дисперсии. При достаточно простом выражении для дисперсии это может быть определено непосредственным дифференцированием и приравниванием нулю частных производных.

В более сложных случаях приходится искать минимум дисперсии путем числового задания интересующих параметров и построения соответствующих графиков, а также расчетом на ЭВМ.

Другая постановка задачи при расчете по критерию минимума среднеквадратичной ошибки заключается в том, что ставится вопрос о нахождении оптимальной структуры и значений параметров автоматической системы, при которых обеспечивается получение теоретического минимума среднеквадратичной ошибки при заданных вероятностных характеристиках полезного сигнала и помехи. Эта задача будет решена, если найти, например, передаточную функцию замкнутой системы $\Phi(j\omega)$, при которой обеспечивается получение теоретического минимума среднеквадратичной ошибки. Задача относится к категории вариационных задач. Приведем здесь некоторые результаты ее решения [120] для случая, когда полезный сигнал $g(t)$ и помеха $f(t)$ представляют собой центрированные стационарные случайные процессы, приложенные на входе системы. Перед системой ставится задача преобразовывать входной сигнал $g(t)$ так, чтобы на ее выходе воспроизводилась величина $h(t)$, связанная с $g(t)$ некоторой формулой преобразования

$$L[h(t)] = H(p) L[g(t)],$$

где $H(p)$ — преобразующий оператор.

Так, например, при $H(p) = \frac{1}{p}$ получится задача интегрирования входного сигнала, при $H(p) = p$ — задача дифференцирования, при $H(p) = 1$ — задача простого воспроизведения со сглаживанием помехи (обычная следящая система при наличии помех), при $H(p) = e^{vp}$ — статистическое упреждение (предсказание) и т. п.

На основании изложенного ошибку системы можно представить в виде

$$x(t) = h(t) - y(t). \quad (11.130)$$

Выходная величина системы регулирования

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau) w(\tau) d\tau, \quad (11.131)$$

где $\varphi(t) = g(t) + f(t)$, а $w(t)$ — весовая функция замкнутой системы. Подставляя (11.130) и (11.131) в формулу (11.129), получаем

$$\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[h(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau) w(\tau) d\tau \right]^2 dt. \quad (11.132)$$

Задача заключается в том, чтобы найти частотную передаточную функцию замкнутой системы, связанную с весовой функцией преобразованием Фурье

$$\Phi(j\omega) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (11.133)$$

таким образом, чтобы минимизировать значение $\overline{x^2}$.

Раскроем в выражении (11.132) скобки и изменим порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} \overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h^2(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) d\lambda \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(t) \varphi(t - \lambda) dt + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} w(v) dv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(t - \lambda) \varphi(t - v) dt. \end{aligned} \quad (11.134)$$

Введем корреляционные функции:

$$R_h(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(t + \tau) h(t) dt, \quad (11.135)$$

$$R_\varphi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(t + \tau) \varphi(t) dt = R_g(\tau) + R_f(\tau) + R_{gf}(\tau) + R_{fg}(\tau), \quad (11.136)$$

$$R_{h\varphi}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t + \tau) \varphi(t) dt = R_{hg}(\tau) + R_{hf}(\tau). \quad (11.137)$$

Этим корреляционным функциям соответствуют спектральные плотности $S_h(\omega)$, $S_\varphi(\omega)$, $S_g(\omega)$, $S_f(\omega)$, $S_{gf}(\omega)$, $S_{fg}(\omega)$, $S_{hg}(\omega)$ и $S_{hf}(\omega)$.

Кроме того,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h^2(t) dt = R_h(0).$$

В результате выражение (11.134) можно преобразовать к виду

$$\overline{x^2} = R_h(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) R_{h\varphi}(\lambda) d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} w(v) R_\varphi(\lambda - v) dv. \quad (11.138)$$

Так как в реальных системах $w(t) = 0$ при $t < 0$, то нижние пределы интегрирования в (11.138) надо положить равными нулю. В результате получим

$$\overline{x^2} = R_h(0) - 2 \int_0^{\infty} w(\lambda) R_{h\varphi}(\lambda) d\lambda + \int_0^{\infty} w(\lambda) d\lambda \int_0^{\infty} w(v) R_\varphi(\lambda - v) dv. \quad (11.139)$$

Из последнего выражения видно, что оптимальная весовая функция, соответствующая минимуму среднего квадрата ошибки, определяется только видом корреляционных функций полезного сигнала и помехи.

Можно показать [120], что необходимое и достаточное условие минимизации выражения (11.139), которое должно быть наложено на весовую функцию, заключается в том, чтобы она была решением интегрального уравнения Винера — Хопфа

$$R_{h\varphi}(\tau) - \int_0^{\infty} R_\varphi(\tau - \lambda) w(\lambda) d\lambda = 0, \quad \tau \geq 0. \quad (11.140)$$

Оптимальная передаточная функция (11.133), соответствующая оптимальной весовой функции, являющейся решением уравнения (11.140), может быть представлена в виде

$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{2\pi\Psi(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{h\varphi}(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega, \quad (11.141)$$

где

$$\Psi(j\omega)\Psi^*(j\omega) = |\Psi(j\omega)|^2 = S_\Phi(\omega). \quad (11.142)$$

В частном случае, когда преобразующий оператор $H(p) = 1$, т. е. в так называемом случае оптимального сглаживания, имеем

$$\begin{aligned} h(t) &= g(t), \\ S_\Phi(\omega) &= S_g(\omega) + S_f(\omega) + S_{gf}(\omega) + S_{fg}(\omega), \\ S_{h\Phi}(\omega) &= S_{g\Phi}(\omega) = S_g(\omega) + S_{gf}(\omega). \end{aligned}$$

В этом случае решение (11.141) может быть представлено в более простом виде:

$$\Phi(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\Psi(j\omega)}. \quad (11.143)$$

Числитель этого выражения определяется следующим образом. Рассмотрим следующее выражение:

$$\frac{S_{g\Phi}(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} = \sum_{i=1}^q \frac{a_i}{\omega - \eta_i} + \sum_{i=1}^q \frac{b_i}{\omega + \alpha_i} + \sum_{i=1}^{\mu} \frac{e_i}{\omega - \gamma_i}. \quad (11.144)$$

Здесь η_i — полюсы $S_{g\Phi}(\omega)$, расположенные в верхней полуплоскости, $\{-\alpha_i\}$ — полюсы $S_{g\Phi}(\omega)$, расположенные в нижней полуплоскости, причем полюсы предполагаются простыми, а γ_i — нули $\Psi^*(j\omega)$. Тогда

$$B(j\omega) = \sum_{i=1}^{\pi} \frac{a_i}{\omega - \eta_i}. \quad (11.145)$$

При реализации в системе оптимальной передаточной функции получится теоретический минимум среднего квадрата ошибки. Этот минимум определяется выражением

$$\overline{x_{\min}^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{S_g(\omega) - |\Phi(j\omega)|^2 S_\Phi(\omega)\} d\omega \quad (11.146)$$

или, в другом виде,

$$\overline{x_{\min}^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{S_g(\omega) - |B(j\omega)|^2\} d\omega. \quad (11.147)$$

Рассмотрим иллюстративный пример. Предположим, что полезному сигналу и помехе на входе системы регулирования соответствуют спектральные плотности:

$$S_g(\omega) = \frac{2\mu D}{\omega^2 + \mu^2}, \quad S_f(\omega) = N,$$

причем корреляция между ними отсутствует и $S_{gf}(\omega) = S_{fg}(\omega) = 0$. Найдем спектральную плотность, соответствующую (11.136):

$$S_\Phi(\omega) = S_g(\omega) + S_f(\omega) = \frac{2\mu D + N\mu^2 + N\omega^2}{(\mu + j\omega)(\mu - j\omega)}$$

или, в другом виде,

$$S_\Phi(\omega) = A \frac{(1 + j\omega)(1 - j\omega)}{(\mu + j\omega)(\mu - j\omega)},$$

где

$$A = 2\mu D + N\mu^2, \quad a^2 = \frac{N}{2\mu D + N\mu^2} = \frac{N}{A}.$$

Отсюда знаменатель искомой передаточной функции (11.143)

$$\Psi(j\omega) = \sqrt{A} \frac{1+j\omega}{\mu+j\omega}.$$

Кроме того, получаем

$$\begin{aligned} \frac{S_{g\Phi}(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} &= \frac{S_g(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} = \frac{2\mu D}{\sqrt{A}} \frac{1}{(1-j\omega)(\mu+j\omega)} = \\ &= \frac{2\mu D}{\sqrt{A}} \left(\frac{a}{1+\mu a} \frac{1}{1-j\omega} + \frac{1}{1+\mu a} \frac{1}{\mu+j\omega} \right). \end{aligned}$$

Отбросив первый член в скобках, соответствующий полюсу в нижней полуплоскости, находим числитель искомой передаточной функции (11.143):

$$B(j\omega) = \frac{2\mu D}{\sqrt{A}} \frac{1}{1+\mu a} \frac{1}{\mu+j\omega}.$$

Окончательно получаем

$$\Phi(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\Psi(j\omega)} = \frac{2\mu D}{A(1+\mu a)} \frac{1}{1+j\omega}$$

или

$$\Phi(p) = \frac{2\mu D}{A(1+\mu a)} \frac{1}{1+ap}.$$

В соответствии с (11.147)

$$\frac{\sigma_{\min}^2}{[2\pi]} = \frac{1}{[2\pi]} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{2\mu D}{\mu^2 + \omega^2} - \frac{4\mu^2 D}{A(1+\mu a)^2} \cdot \frac{1}{\mu^2 + \omega^2} \right\} d\omega = \frac{D}{1 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{2D}{\mu N}} - 1 \right)}.$$

Нахождение оптимальной передаточной функции еще не означает, что реальная автоматическая система может быть выполнена оптимальной, так как реализация ее может быть сопряжена с большими трудностями. Оптимальную передаточную функцию, за исключением простейших случаев, следует считать идеальной функцией, к которой по возможности надо стремиться при выполнении реальной автоматической системы. Теория оптимальных систем излагается в работах [26, 108, 120, 121].

МЕТОДЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 12.1. Общие соображения

Под синтезом системы автоматического регулирования понимается направленный расчет, имеющий конечной целью отыскание рациональной структуры системы и установление оптимальных величин параметров ее отдельных звеньев. По отношению к основе синтеза в настоящее время имеются разные точки зрения.

Синтез можно трактовать как пример *вариационной* задачи и рассматривать такое построение системы автоматического регулирования, при котором для данных условий работы (управляющие и возмущающие воздействия, помехи, ограничения по времени работы и т. п.) обеспечивается теоретический минимум ошибки.

Синтез также можно трактовать как *инженерную* задачу, сводящуюся к такому построению системы автоматического регулирования, при котором обеспечивается выполнение технических требований к ней. Подразумевается, что из многих возможных решений инженер, проектирующий систему, будет выбирать те, которые являются оптимальными с точки зрения существующих конкретных условий и требований к габаритам, весу, простоте, надежности и т. п.

Иногда в понятие инженерного синтеза вкладывается еще более узкий смысл и рассматривается синтез, имеющий целью определение вида и параметров корректирующих средств, которые необходимо добавить к некоторой неизменяемой части системы регулирования (объект с регулятором), чтобы обеспечить требуемые динамические качества.

При инженерном синтезе системы автоматического регулирования необходимо обеспечить, во-первых, требуемую точность и, во-вторых, приемлемый характер переходных процессов.

Решение первой задачи в большинстве случаев сводится к определению требуемого общего коэффициента усиления системы и, в случае необходимости, — вида корректирующих средств, повышающих точность системы (регулирование по управляющему и возмущающему воздействиям, изодромные механизмы и т. п.). Эта задача может решаться при помощи определения ошибок в типовых режимах на основе тех критериев точности, которые были изложены в главе 8. Решение этой задачи, как правило, не сопряжено с трудностями принципиального или вычислительного характера, так как критерии точности достаточно просты для их практического использования. В сложных случаях можно прибегать к помощи моделирования. Решение оказывается сравнительно простым вследствие необходимости установления значений относительно небольшого числа параметров. В простейшем случае необходимо найти только общий коэффициент усиления системы.

Решение второй задачи — обеспечение приемлемых переходных процессов — оказывается почти всегда более трудным вследствие большого

числа варьируемых параметров и многозначности решения задачи демпфирования системы. Поэтому существующие инженерные методы часто ограничиваются решением только второй задачи, так как их авторы считают, что обеспечение требуемой точности может быть достаточно просто сделано на основании использования существующих критериев точности и совершенствования их практически не требуется.

В настоящее время для целей синтеза систем автоматического регулирования широко используются электронные и электромеханические вычислительные машины, позволяющие производить полное или частичное моделирование проектируемой системы. При таком моделировании становится возможным наиболее полно исследовать влияние различных факторов нелинейности, зависимость параметров от времени и т. п.

Однако моделирование на вычислительных машинах не может заменить расчетных методов проектирования, которые во многих случаях позволяют исследовать вопрос в общем виде и среди многих решений найти оптимальное. Поэтому, несмотря на развитие и распространение машинных методов синтеза, теория должна располагать собственными методами, которые дополнили бы моделирование и являлись бы теоретической базой при отыскании оптимального решения.

§ 12.2. Корневой метод

Наиболее простой корневой метод разработан Т. Н. Соколовым [117]. Сущность его сводится к следующему¹⁾.

Пусть имеется характеристическое уравнение системы

$$p^n + A_1 p^{n-1} + \dots + A_n = 0. \quad (12.1)$$

С точки зрения скорейшего затухания переходного процесса важно, чтобы вещественные части всех корней характеристического уравнения были наибольшими. Сумма вещественных частей всех корней численно равна первому коэффициенту характеристического уравнения (12.1). Поэтому при заданной величине этого коэффициента наивыгоднейшие результаты получаются при равенстве вещественных частей всех корней. Однако расчеты и исследования построенных систем показывают, что стремление удовлетворить поставленному требованию приводит к совершенно нереальным конструктивным характеристикам отдельных звеньев. Эти расчеты и исследования показывают, что из общего числа корней характеристического уравнения всегда можно выделить два или три корня с меньшей по абсолютному значению вещественной частью, которые и определяют ход основного процесса. Остальные же корни характеризуют быстро затухающие составляющие, оказывающие влияние только на начальной стадии переходного процесса.

Примем, что основной характер переходного процесса определяется двумя корнями. Тогда уравнение (12.1) удобно представить в виде

$$(p^{n-2} + C_1 p^{n-3} + \dots + C_{n-2})(p^2 + B_1 p + B_2) = 0. \quad (12.2)$$

Второй сомножитель (12.2) и будет определять основной характер процесса.

Для уменьшения погрешностей проектируемой системы важно, чтобы коэффициент B_2 в основном множителе имел возможно большую величину. Однако чрезмерное увеличение B_2 приводит к колебательному характеру переходного процесса.

¹⁾ В соответствии с изложенным в § 12.1 рассматривается только задача получения приемлемых динамических качеств при заданном значении общего коэффициента усиления, т. е. последнего члена характеристического уравнения.

Оптимальное соотношение между коэффициентами B_1 и B_2 определяется из условия получения затухания за один период $\xi = 98\%$, которому соответствует выражение (см. § 8.6)

$$2\pi \frac{\alpha}{\beta} = \ln \frac{1}{1-\xi} = \ln \frac{1}{0,02} = 4, \quad (12.3)$$

где α и β — вещественная и мнимая части комплексного корня, характеризующего основной процесс.

Учитывая соотношения:

$$\alpha = \frac{B_1}{2}, \quad \beta = \sqrt{B_2 - \frac{B_1^2}{4}},$$

из (12.3) можно получить

$$B_2 = \frac{\pi^2 + 4}{16} B_1^2 = k_{\pi} B_1^2. \quad (12.4)$$

Множитель k_{π} , определяющий соотношение между коэффициентами основного множителя характеристического уравнения, является критерием переходного режима, зависящим от выбранной степени затухания. Формула (12.4) показывает желаемое соотношение между коэффициентами характеристического уравнения, к которому надо стремиться при проектировании системы. Это должно осуществляться введением различных корректирующих средств.

Из (12.3) можно также получить требуемое соотношение между мнимой и вещественной частями корня (колебательность):

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2} = 1,57. \quad (12.5)$$

В ряде случаев для описания основного переходного процесса оказывается более целесообразным воспользоваться уравнением третьей степени

$$p^3 + B_1 p^2 + B_2 p + B_3 = 0, \quad (12.6)$$

Это уравнение можно представить в виде

$$(p + C_{11})(p^2 + B_{11}p + B_{21}) = 0. \quad (12.7)$$

Между коэффициентами уравнений (12.6) и (12.7) имеют место соотношения:

$$B_1 = C_{11} + B_{11}, \quad B_2 = C_{11}B_{11} + B_{21}, \quad B_3 = C_{11}B_{21}.$$

Положим, что во втором множителе (12.7) по-прежнему

$$B_{21} = \frac{\pi^2 + 4}{16} B_{11}^2. \quad (12.8)$$

Поэтому корни характеристического уравнения (12.6) и (12.7) равны:

$$p_1 = -C_{11}, \quad (12.9)$$

$$p_{2,3} = -\frac{B_{11}}{2} \pm j \frac{B_{11}}{2} \frac{\pi}{2}. \quad (12.10)$$

Так как вещественная часть корней должна быть возможно большей, то целесообразно задать

$$C_{11} = \frac{B_{11}}{2} \quad (12.11)$$

и, следовательно,

$$B_{11} = \frac{2}{3} B_1, \quad (12.12)$$

$$C_{11} = \frac{1}{3} B_1, \quad (12.13)$$

$$B_{21} = \frac{\pi^2 + 4}{36} B_1^2. \quad (12.14)$$

Подставив полученные значения в формулы разложения, находим зависимость между коэффициентами основного уравнения. Если B_1 задано, то

$$B_2 = \frac{\pi^2 + 12}{36} B_1^2, \quad (12.15)$$

$$B_3 = \frac{\pi^2 + 4}{108} B_1^3. \quad (12.16)$$

Эти соотношения должны реализоваться при проектировании системы регулирования.

Корни основного уравнения

$$p_1 = -\frac{1}{3} B_1, \quad (12.17)$$

$$p_{2,3} = -\frac{1}{3} B_1 \pm j \frac{\pi}{6} B_1. \quad (12.18)$$

Выбор уравнения для описания основной составляющей переходного процесса зависит от структурной схемы проектируемой системы.

Рассмотрим теперь связь между основной и дополнительной составляющими переходного процесса для заданного затухания ξ (8.40). Для этой цели полезно представить характеристическое уравнение (12.1) в таком виде:

$$p^n + A_1 \Omega_0 p^{n-1} + A_2 \Omega_0^2 p^{n-2} + \dots + \Omega_0^n = 0, \quad (12.19)$$

где Ω_0 — произвольно выбранный среднегеометрический корень, $A_1, \dots, A_{n-1}$ — безразмерные коэффициенты.

Записанное в такой форме уравнение третьей степени принимает вид

$$p^3 + A_1 \Omega_0 p^2 + A_2 \Omega_0^2 p + \Omega_0^3 = 0. \quad (12.20)$$

Разлагая его на множители, находим

$$(p + C_1)(p^2 + B_1 p + B_2) = 0.$$

Соотношения для коэффициентов:

$$A_1 \Omega_0 = C_1 + B_1, \quad (12.21)$$

$$A_2 \Omega_0^2 = B_2 + C_1 B_1, \quad (12.22)$$

$$\Omega_0^3 = C_1 B_2. \quad (12.23)$$

Введем коэффициент a и положим

$$B_1 = a A_1 \Omega_0. \quad (12.24)$$

Тогда

$$C_1 = (1 - a) A_1 \Omega_0, \quad (12.25)$$

$$B_2 = k_{\pi} B_1^2 = k_{\pi} a^2 A_1^2 \Omega_0^2. \quad (12.26)$$

Подставив полученные значения коэффициентов в формулы (12.22) и (12.23), можем записать:

$$A_2 \Omega_0^2 = [1 - a(1 - k_{\pi})] a A_1^2 \Omega_0^2, \quad \Omega_0^3 = k_{\pi} (1 - a) a^2 A_1^3 \Omega_0^3,$$

откуда

$$A_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{k_{\Pi}(1-a)a^2}}, \quad (12.27)$$

$$A_2 = [1 - a(1 - k_{\Pi})] a A_1^2. \quad (12.28)$$

Таким образом, безразмерные коэффициенты A_1 и A_2 являются функциями критерия переходного процесса k_{Π} , зависящего от желаемой степени затухания и коэффициента разложения a , определяющего соотношение постоянных времени затухания отдельных составляющих.

При $a = \frac{2}{3}$ имеем $\frac{C_1}{B_1} = \frac{1-a}{a} = \frac{1}{2}$, т. е. $C_1 = \frac{B_1}{2}$, и отношение постоянных времени $T_C = \frac{1}{C_1}$ и $T_\alpha = \frac{B_1}{2}$ будет $\frac{T_C}{T_\alpha} = \frac{B_1}{2C_1} = 1$.

Следовательно, обе составляющие переходного процесса затухают с одинаковой скоростью.

Аналогичным образом можно получить выражения для коэффициентов характеристического уравнения четвертой, пятой и более высоких степеней [117].

Синтез системы регулирования начинается с того, что для выбранной структурной схемы и введенных корректирующих средств находится характеристическое уравнение. Затем варьируются параметры основного канала регулирования и корректирующих средств таким образом, чтобы получить требуемые значения коэффициентов характеристического уравнения (12.4) или (12.20).

Этот метод оказывается достаточно эффективным в случае сравнительно невысокой степени характеристического уравнения ($n = 2 \div 4$). В более сложных случаях обеспечить требуемые значения коэффициентов характеристического уравнения оказывается затруднительно, так как некоторые параметры системы и корректирующих средств могут влиять сразу на несколько коэффициентов характеристического уравнения.

Недостатком этого метода является также то, что необходимо задаваться видом корректирующих средств. Поэтому получаемое решение будет во многом зависеть от опытности проектанта.

§ 12.3. Метод корневых годографов

Качество системы регулирования с точки зрения быстродействия и запаса устойчивости может характеризоваться расположением корней числителя и знаменателя передаточной функции замкнутой системы, т. е. расположением нулей и полюсов передаточной функции (§ 8.6).

Зная эти корни, можно изобразить их расположение на комплексной плоскости корней. При расчете регулируемой системы целесообразно проследить, как меняется общая картина расположения корней при изменении отдельных параметров, например общего коэффициента усиления, постоянных времени корректирующих цепей и т. п., с целью установления оптимальных значений этих параметров.

При плавном изменении значения какого-либо параметра корни будут перемещаться на плоскости корней, прочерчивая некоторую кривую, которую будем называть *корневым годографом* или *траекторией корней*. Построив траектории всех корней, можно выбрать такое значение варьируемого параметра, которое соответствует наилучшему расположению корней.

Первый способ построения траекторий корней заключается в следующем. Пусть имеется дифференциальное уравнение замкнутой системы, записанное

для регулируемой величины при наличии задающего воздействия (5.3):

$$D(p) y(t) = R(p) g(t),$$

где

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n, R(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m.$$

Это уравнение записано здесь для случая равенства нулю возмущающих воздействий. Оно может быть записано также для любого возмущающего воздействия. Это не изменит его формы и не отразится на дальнейших рассуждениях.

Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (12.29)$$

Полюсы передаточной функции, т. е. корни знаменателя, обозначим через $p_1, p_2, \dots, p_n$, а ее нули (корни числителя) — через $p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0$.

Коэффициенты числителя и знаменателя (12.29) определенным образом выражены через параметры регулируемого объекта, регулятора и корректирующих устройств. Если нужно выбрать величину какого-либо параметра β (постоянная времени, коэффициент усиления и т. п.), входящего как угодно в коэффициенты (12.29), то необходимо принять некоторые постоянные значения для всех остальных параметров, а для искомого параметра β задавать различные числовые значения $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ внутри реально возможных пределов изменения этого параметра в данной системе регулирования. Для каждого из этих вариантов необходимо затем вычислить корни числителя и знаменателя (12.29). Результаты вычислений можно свести в таблицу, на основании которой легко строятся все траектории корней.

Если нужно выбрать два или несколько параметров регулируемой системы, то такого рода вычисления нужно проделать несколько раз, меняя каждый раз один из параметров при заданных значениях всех остальных.

Вычисление корней при этом можно производить любым численным методом, возможно более простым, так как ввиду приближенности корневой оценки здесь не требуется большой точности вычислений. В настоящее время имеются электрические устройства, позволяющие строить на экране траектории корней непосредственно по заданным коэффициентам уравнения.

Из простых численных методов определения корней можно рекомендовать, например, метод последовательных делений [98].

Другой способ построения траекторий корней, разработанный Ивэнсом и Э. Г. Удерманом [128], в отличие от первого, пригодного для выбора любого параметра системы, специально приспособлен для выбора общего коэффициента усиления передаточной функции разомкнутой системы (5.10), которую запишем следующим образом:

$$W(p) = KG_1(p). \quad (12.30)$$

Здесь $K = K_r$ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы, имеющий размерность сек^{-r} , где r — степень астатизма; $G_1(p)$ — операторная часть передаточной функции разомкнутой системы.

Характеристическое уравнение системы может быть записано в виде

$$\frac{1}{W(p)} + 1 = \frac{1}{KG_1(p)} + 1 = 0. \quad (12.31)$$

Обозначим полюсы и нули передаточной функции разомкнутой системы соответственно через $q_1, q_2, \dots, q_n$ и $q_1^0, q_2^0, \dots, q_m^0$. Тогда

$$G_1(p) = A \frac{(p - q_1^0)(p - q_2^0) \dots (p - q_m^0)}{(p - q_1)(p - q_2) \dots (p - q_n)} = AG(p), \quad (12.32)$$

где

$$A = \frac{(-q_1)(-q_2) \dots (-q_n)}{(-q_1^0)(-q_2^0) \dots (-q_m^0)} > 0 \quad (m < n).$$

Каждый сомножитель в выражении (12.32) можно изобразить в виде вектора на комплексной плоскости (рис. 12.1), где p — текущая точка. Обозначим длину (модуль) каждого вектора в знаменателе (12.32) через $r_1, r_2, \dots, r_n$, а в числителе — через $r_1^0, r_2^0, \dots, r_m^0$. Соответственно угол между вектором и положительным направлением оси вещественных (аргумент) для знаменателя обозначим $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, а для числителя — $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_m^0$. По правилу перемножения комплексных чисел согласно формуле (12.32) найдем, что $G(p)$ будет представлять собой вектор с длиной r и аргументом φ , причем

$$G(p) = re^{j\varphi}, \quad (12.33)$$

где

$$r = \frac{r_1^0 r_2^0 \dots r_m^0}{r_1 r_2 \dots r_n}, \quad (12.34)$$

$$\varphi = \varphi_1^0 + \varphi_2^0 + \dots + \varphi_m^0 - (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n). \quad (12.35)$$

Подставив (12.33) в выражение (12.31), получим

$$\frac{1}{AKr} e^{-j\varphi} = -1, \quad (12.36)$$

откуда вытекают два равенства:

$$K = \frac{1}{Ar}, \quad (12.37)$$

$$\varphi = \pm \pi. \quad (12.38)$$

Траектории корней (рис. 12.1) строятся таким образом, чтобы они удовлетворяли условию (12.38). После этого по формуле (12.34) для каждой

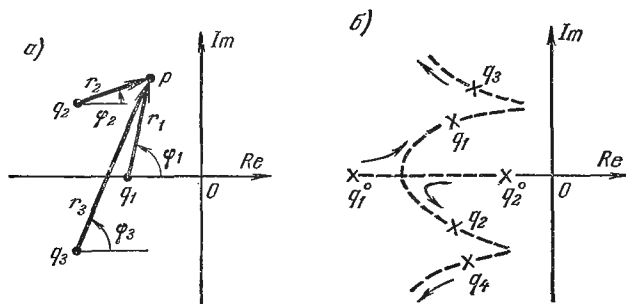


Рис. 12.1.

конкретной комбинации корней можно вычислить A и величину r , а затем по формуле (12.37) — общий коэффициент усиления K .

Для упрощения построения траекторий корней используются следующие свойства.

1. При $K = 0$ корни характеристического уравнения замкнутой системы совпадают с полюсами передаточной функции разомкнутой системы $W(p)$ или $G(p)$, так как согласно (12.31) при $K = 0$ имеем $G(p) \rightarrow \infty$.

2. При $K \rightarrow \infty$ корни стремятся к нулям передаточной функции разомкнутой системы, так как при $K \rightarrow \infty$ из (12.31) получаем $G(p) \rightarrow 0$. Но количество нулей равно m , в то время как количество корней $n > m$. Поэтому остальные $n - m$ корней уходят в бесконечность, так как $G(p) \rightarrow 0$ еще при $p \rightarrow \infty$. Для последних $n - m$ корней можно определить направления асимптот на основании (12.31) и (12.32). При больших p ($p \rightarrow \infty$) имеем соответственно

$$\frac{p^{n-m}}{KA} = -1, \quad (12.39)$$

$$G(p) = \frac{1}{p^{n-m}}, \quad (12.40)$$

откуда аргумент комплексного числа p^{n-m} (при $p \rightarrow \infty$) будет $\pi + 2i\pi$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) и, значит, аргумент числа p (при $p \rightarrow \infty$), т. е. наклон искомым асимптот, будет

$$\frac{\pi + 2i\pi}{n-m} \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (12.41)$$

3. На вещественной оси траектории корней представляют собой отрезки прямой, соединяющие нули и полюсы функции $G(p)$, расположенные на этой оси. Началом траекторий на вещественной оси служит нуль, расположенный правее всех остальных.

4. Если траектория отклоняется от вещественной оси, то положение точки $p = a$, в которой траектория отходит от этой оси, можно оценить из того условия, что при малом отклонении $\Delta\lambda$ от вещественной оси приращение угла (12.35), обусловленное влиянием полюсов и нулей функции $G(p)$, расположенных на оси влево от искомой точки, должно уничтожаться приращением этого же угла, обусловленным влиянием полюсов и нулей $G(p)$, расположенных вправо от этой точки.

Так, например, пусть имеется функция

$$G_1(p) = \frac{0,001 \cdot 2 \cdot 6}{(p + 0,001)(p + 2)(p + 6)}. \quad (12.42)$$

При $K = 0$ траектории исходят из точек $(-0,001)$, (-2) и (-6) , лежащих на вещественной оси. Отрезки траекторий лежат между точками $(-0,001)$ и (-2) и между (-6) и $(-\infty)$.

Применяя правило 4, можем записать

$$\frac{\Delta\lambda}{a + 0,001} + \frac{\Delta\lambda}{a + 2} + \frac{\Delta\lambda}{a + 6} = 0.$$

Решение этого квадратного уравнения дает $a = -0,904$.

5. Положение точки, в которой траектория пересекает мнимую ось при переходе в правую полуплоскость комплексной переменной p , часто можно оценить, пренебрегая влиянием малого по абсолютной величине полюса функции $G(p)$.

Рассмотрим в качестве примера опять функцию (12.42). При значительных по модулю величинах комплексной переменной p эту функцию можно с хорошей точностью аппроксимировать функцией

$$G_1(p) \approx \frac{0,001 \cdot 2 \cdot 6}{p(p + 2)(p + 6)}.$$

Тогда $\varphi_1 = \pi | 2$ (рис. 12.2) и, следовательно, условие (12.38) сводится к равенству

$$\varphi = -\pi = -\varphi_2 - \varphi_3 - \frac{\pi}{2}$$

и

$$\varphi_2 + \varphi_3 = \frac{\pi}{2}.$$

Рассматривая график на рис. 12.2, можно заметить, что

$$\frac{\pi}{4} = \varphi_3 + \beta, \quad \frac{\pi}{4} + \alpha = \varphi_2,$$

откуда следует, что $\alpha \approx \beta$. Это равенство и представляет собой условие для определения точки пересечения B .

6. Направление касательной к траектории при выходе ее из какого-либо полюса или при подходе к какому-либо нулю нетрудно определить путем вычисления угла между этой касательной в данном полюсе или нуле и вещественной осью. При таком вычислении используется зависимость (12.38)

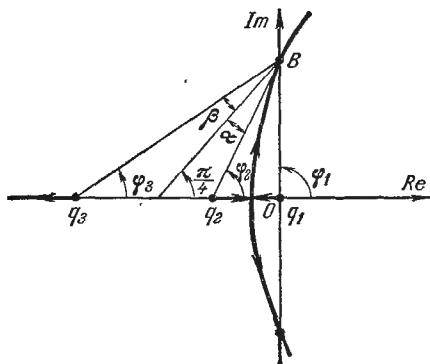


Рис. 12.2.

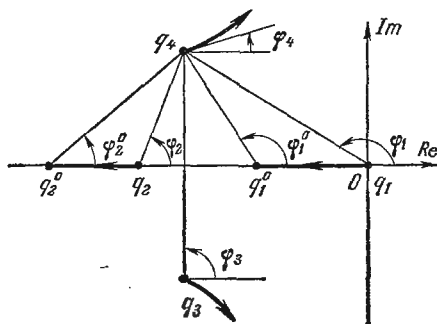


Рис. 12.3.

для аргументов всех нулей и полюсов, расположенных по условию в левой полуплоскости комплексной переменной p .

На рис. 12.3 изображены траектории корней передаточной функции $G(p)$, имеющей два нуля и два полюса на вещественной оси и одну пару комплексных сопряженных полюсов. При достаточно малом удалении точки p от полюса q_4 углы φ_1^0 , φ_2^0 , φ_1 , φ_2 и φ_3 , соответствующие остальным нулям и полюсам, останутся неизменными. Таким образом, в силу (12.38) угол φ_4 найдется из уравнения

$$(\varphi_1^0 + \varphi_2^0) - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = \pi.$$

Перечисленные правила определяют основные свойства траекторий корней. Траектории вне нулей и полюсов функции $G(p)$ находятся с помощью построения по точкам, после чего можно определить характер изменения K вдоль построенной таким образом кривой. После того как выбрано желаемое расположение корней характеристического уравнения, находится соответствующее значение K . Более подробно см. [128].

§ 12.4. Метод стандартных переходных характеристик

Для получения необходимых значений коэффициентов передаточной функции разомкнутой системы можно воспользоваться стандартными переходными характеристиками. Для большей общности эти характеристики строятся в нормированном виде. В этом случае по оси времени откладывается относительное время $\tau = \Omega_0 t$, где Ω_0 — среднегеометрический корень характеристического уравнения, определяющий быстродействие системы.

При построении стандартных переходных характеристик необходимо задаться определенным распределением корней характеристического уравнения.

Ниже приводятся стандартные характеристики и соответствующие передаточные функции [61].

Для систем с астатизмом первого порядка корни приняты вещественными, причем они составляют арифметическую прогрессию. В табл. 12.1

Таблица 12.1

Стандартные передаточные функции разомкнутой системы с астатизмом первого порядка при $n = 2 \div 4$

n	$\sigma\%$	K_v	$W(p)$
2	5	$\frac{\Omega_0}{1,4}$	$\frac{\Omega_0^2}{p^2 + 1,4\Omega_0 p}$
3	8	$\frac{\Omega_0}{2}$	$\frac{\Omega_0^3}{p^3 + 2\Omega_0 p^2 + 2\Omega_0^2 p}$
4	10	$\frac{\Omega_0}{2,6}$	$\frac{\Omega_0^4}{p^4 + 2,6\Omega_0 p^3 + 3,4\Omega_0^2 p^2 + 2,6\Omega_0^3 p}$

приведены передаточные функции разомкнутой системы для различных порядков характеристического уравнения $n = 2 \div 4$, получающиеся при этом значения перерегулирования $\sigma\%$ и добротности по скорости K_v .

Нормированные переходные характеристики для каждого случая приведены на рис. 12.4, а.

Для систем с астатизмом второго порядка корни также приняты вещественными, причем они составляют геометрическую прогрессию. Соответствующие передаточные функции приведены в табл. 12.2, а переходные характеристики — на рис. 12.4, б.

Таблица 12.2

Стандартные передаточные функции разомкнутой системы с астатизмом второго порядка при $n = 2 \div 6$

n	$\sigma\%$	K_e	$W(p)$
2	10	Ω_0^2	$\frac{2,5\Omega_0 p + \Omega_0^2}{p^2}$
3	10	$\frac{\Omega_0^2}{5,1}$	$\frac{6,3\Omega_0^2 p + \Omega_0^3}{p^3 + 5,1\Omega_0 p^2}$
4	10	$\frac{\Omega_0^2}{16}$	$\frac{12\Omega_0^3 p + \Omega_0^4}{p^4 + 7,2\Omega_0 p^3 + 16\Omega_0^2 p^2}$
5	10	$\frac{\Omega_0^2}{38}$	$\frac{18\Omega_0^4 p + \Omega_0^5}{p^5 + 9\Omega_0 p^4 + 29\Omega_0^2 p^3 + 38\Omega_0^3 p^2}$
6	10	$\frac{\Omega_0^2}{73}$	$\frac{25\Omega_0^5 p + \Omega_0^6}{p^6 + 11\Omega_0 p^5 + 43\Omega_0^2 p^4 + 83\Omega_0^3 p^3 + 73\Omega_0^4 p^2}$

В табл. 12.2 для различных порядков характеристического уравнения $n = 2 \div 6$ приведены передаточные функции разомкнутой системы, перерегулирование $\sigma\%$ и добротность по ускорению K_e .

Использование метода стандартных переходных характеристик для синтеза заключается в том, что для принятой структурной схемы выбирается приемлемый вид переходного процесса. Это позволяет установить необходимое значение среднегеометрического корня Ω_0 . Далее оказываются известными все коэффициенты желаемой передаточной функции системы. Введением различных корректирующих средств необходимо добиться того, чтобы

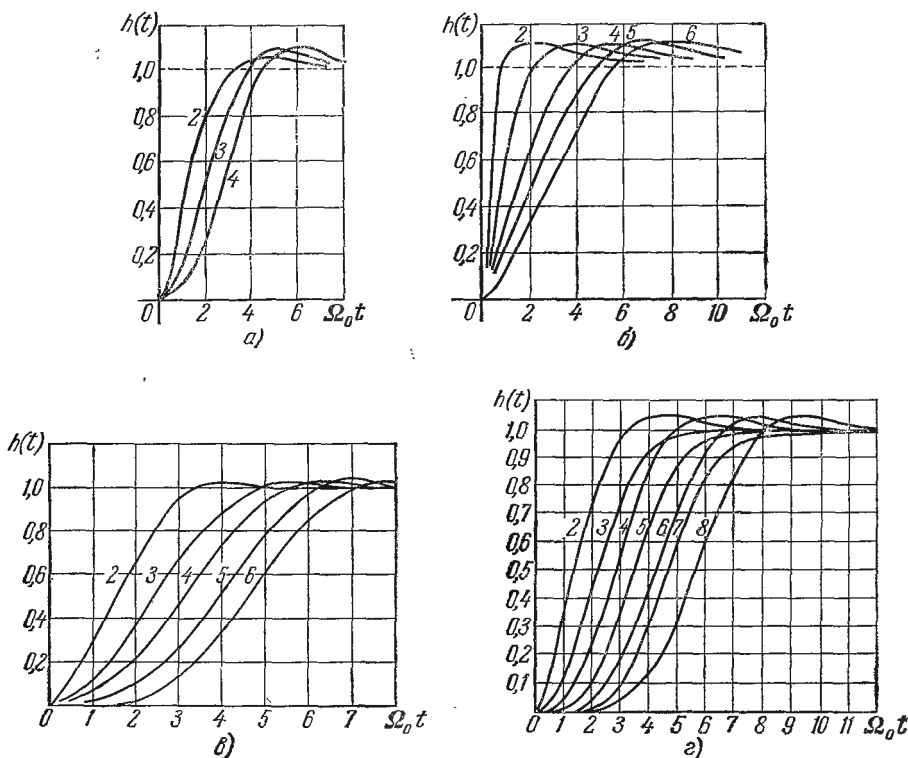


Рис. 12.4.

коэффициенты реальной передаточной функции были возможно ближе к коэффициентам желаемой передаточной функции.

Этот метод может применяться и в том случае, когда важно обеспечить требуемую точность работы системы, которая может быть задана, например, при помощи коэффициентов ошибок. Тогда при заданных значениях коэффициентов ошибок можно определить требуемое значение K_b или K_e , а по ним найти величину Ω_0 . Далее расчет ведется так, как описано выше.

Недостатком рассмотренного метода является то, что при построении стандартных переходных процессов приняты вещественные корни. Это во многих случаях не приводит к оптимальному решению. Однако стандартные переходные характеристики можно сравнительно просто построить для любого другого расположения корней, в том числе и для комплексных корней. Предлагается, например, такое решение [61]. Пусть характеристическое уравнение записано в виде

$$p^n + A_1 \Omega_0 p^{n-1} + A_2 \Omega_0^2 p^{n-2} + \dots + \Omega_0^n = 0,$$

где Ω_0 — среднегеометрический корень.

Если принять все корни равными и вещественными, то это характеристическое уравнение приобретает вид

$$(p + \Omega_0)^n = 0. \quad (12.43)$$

В этом случае безразмерные коэффициенты $A_1, \dots, A_{n-1}$ являются коэффициентами бинома Ньютона.

Однако переходный процесс затухает быстрее, если характеристическое уравнение при четном n имеет вид

$$(p^2 + 2\zeta\Omega_0 p + \Omega_0^2)^{\frac{n}{2}} = 0 \quad (12.44)$$

и при нечетном n

$$(p + \Omega_0)(p^2 + 2\zeta\Omega_0 p + \Omega_0^2)^{\frac{n-1}{2}} = 0, \quad (12.45)$$

причем безразмерный параметр затухания $\zeta = 0,7 \div 0,8$.

В табл. 12.3 для случая $\zeta = 0,75$ приведены значения безразмерных коэффициентов $A_1, \dots, A_{n-1}$, причем $A_0 = 1$ и $A_n = 1$, для степени характеристического уравнения от 2 до 6.

Таблица 12.3

Коэффициенты характеристического уравнения
для кратных корней

n	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
2	1,5				
3	2,5	2,5			
4	3	4,25	3		
5	4	7,25	7,25	4	
6	4,5	9,25	12,375	9,25	4,5

На рис. 12.4, а приведены нормированные переходные характеристики, соответствующие характеристическому уравнению (12.45), если в него ввести правую часть в виде $\Omega_0^n f(t)$.

Переходный процесс затухает еще быстрее, если принять некрatное распределение комплексных корней [61]. В этом случае все корни имеют одинаковую вещественную часть η . Мнимые части корней образуют арифметическую прогрессию с разностью γ и первым членом также γ . Для каждой степени характеристического уравнения существует некоторое оптимальное отношение γ/η , которому соответствует наибольшее быстродействие в безразмерном времени. Безразмерные коэффициенты характеристического уравнения для этого случая приведены в табл. 12.4, а переходные характеристики изображены на рис. 12.4, б.

Таблица 12.4

Коэффициенты характеристического уравнения
(оптимальный случай)

n	$\frac{\gamma}{\eta}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
2	1	1,38						
3	1,45	2,05	2,39					
4	0,79	2,6	3,8	2,8				
5	1,5	2,5	5,3	5,46	3,64			
6	0,64	3,73	8,0	10,3	8,56	4,18		
7	1,5	2,76	8,12	11,74	14,35	11,5	4,86	
8	0,57	4,65	9,42	22,7	28,4	24,3	15,0	5,45

При наличии нулей у передаточной функции принятые в табл. 12.3 и 12.4 распределения корней оказываются неудачными вследствие появления большого перерегулирования. В этом случае оказывается более выгодным использование расположения корней на вещественной оси по арифметической прогрессии (см. табл. 12.1 и 12.2).

§ 12.5. Метод логарифмических амплитудных характеристик

Наиболее приемлемы для целей синтеза логарифмические амплитудные характеристики, так как построение л. а. х., как правило, может делаться почти без вычислительной работы. Особенно удобно использовать асимптотические л. а. х.

Процесс синтеза обычно включает в себя следующие операции.

1. Построение желаемой л. а. х. Построение желаемой л. а. х. делается на основе тех требований, которые предъявляются к проектируемой системе регулирования. При построении желаемой л. а. х. необходимо быть уверенным, что вид амплитудной характеристики полностью определяет характер переходных процессов и нет необходимости вводить в рассмотрение фазовую характеристику. Это будет выполняться в случае минимально-фазовых систем. В этом случае амплитудная характеристика однозначно определяет вид фазовой характеристики. Напомним, что передаточная функция разомкнутой минимально-фазовой системы не должна иметь нулей и полюсов, расположенных в правой полуплоскости (см. § 4.8).

2. Построение располагаемой л. а. х. Под располагаемой л. а. х. понимается характеристика исходной системы регулирования, построенной исходя из требуемых режимов стабилизации или слежения, требуемых выходной мощности, скорости, ускорения и т. п. Обычно под исходной системой понимается система, состоящая из регулируемого объекта и регулятора и не снабженная необходимыми корректирующими средствами, обеспечивающими требуемое качество переходного процесса. Исходная система должна быть также минимально-фазовой.

3. Определение вида и параметров корректирующего устройства. Наиболее просто определяется корректирующее устройство последовательного типа. Если желаемая передаточная функция разомкнутой системы — $W_{\text{ж}}(p)$, располагаемая — $W_{\text{р}}(p)$ и передаточная функция корректирующего звена последовательного типа — $W_{\text{пз}}(p)$, то можно записать равенство

$$W_{\text{ж}}(p) = W_{\text{р}}(p) W_{\text{пз}}(p), \quad (12.46)$$

откуда

$$W_{\text{пз}}(p) = \frac{W_{\text{ж}}(p)}{W_{\text{р}}(p)}. \quad (12.47)$$

Для л. а. х. можно записать

$$L_{\text{пз}}(\omega) = L_{\text{ж}}(\omega) - L_{\text{р}}(\omega). \quad (12.48)$$

Таким образом, при использовании л. а. х. весьма легко осуществляется синтез последовательных корректирующих средств, так как л. а. х. корректирующих средств получается простым вычитанием ординат располагаемой л. а. х. из ординат желаемой.

4. Техническая реализация корректирующих средств. По виду л. а. х. необходимо подобрать схему и параметры корректирующего звена последовательного типа. В случае необходимости последовательное звено может быть пересчитано на эквивалентное параллельное звено или эквивалентную обратную связь по формулам, которые приведены в § 10.4.

5. Поверочный расчет и построение переходного процесса. В случае необходимости полученная система регулирования вместе с корректирующими средствами может быть исследована обычными методами анализа.

Ниже приводится краткое изложение метода синтеза, разработанного В. В. Солодовниковым [121] для следящих систем с астатизмом первого порядка.

В основу синтеза положены следующие показатели качества:

1) перерегулирование $\sigma\%$ при единичном ступенчатом воздействии на входе;

2) время переходного процесса t_n ;

3) коэффициенты ошибок c_1 и $\frac{c_2}{2}$.

В рассмотрение вводится типовая вещественная частотная характеристика замкнутой системы (рис. 12.5). Эта характеристика описывается следующими величинами: $\kappa = \frac{\omega_d}{\omega_n}$ — основной коэффициент наклона; $\kappa_a = \frac{\omega_a}{\omega_b}$

и $\kappa_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0}$ — дополнительные коэффициенты наклона; $\lambda_1 = \frac{\omega_b}{\omega_n}$ и $\lambda_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0}$ — основной и дополнительный коэффициенты формы; ω_n — интервал положительности.

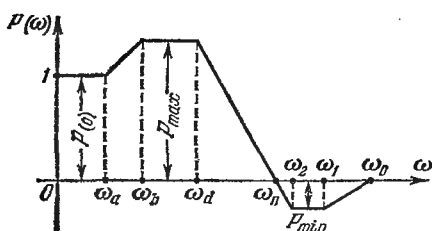


Рис. 12.5.

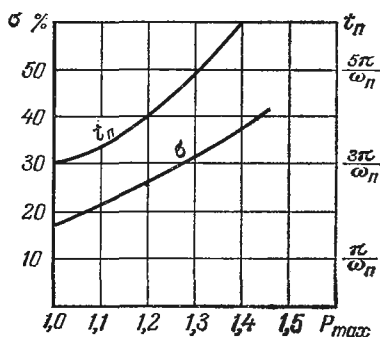


Рис. 12.6.

Если в следящей системе с приемлемыми динамическими качествами для вещественной частотной характеристики выполняются условия:

$$\kappa \leq 0,8, \quad \kappa_a \geq 0,4, \quad \lambda \geq 0,5,$$

то, как показало построение соответствующих типовых вещественных характеристик переходных процессов, величина перерегулирования в основном определяется величиной $P_{\max}$. В этом случае перерегулирование $\sigma\%$ и время переходного процесса могут быть определены по кривым, приведенным на рис. 12.6.

Таким образом, на основании заданного перерегулирования $\sigma\%$ можно определить $P_{\max}$ и затем по $P_{\max}$ зависимость между временем переходного процесса t_n и частотой ω_n , соответствующей интервалу положительности вещественной характеристики. По заданному значению t_n легко определяется требуемое значение ω_n .

Однако отрицательная часть вещественной характеристики также влияет на перерегулирование, увеличивая его на величину $\Delta\sigma \leq 0,3 P_{\min}$. Это можно учесть, положив $P_{\min} \approx 1 - P_{\max}$. Тогда по кривой, изображенной на рис. 12.6, можно найти допустимые значения $P_{\max}$ и $P_{\min} = 1 - P_{\max}$, при которых суммарное перерегулирование не будет превосходить заданного значения $\sigma\%$.

В табл. 12.5 приведены некоторые типовые значения $P_{\max}$ и соответствующие им качественные показатели замкнутой системы.

Таблица 12.5

$P_{\max}$	$\sigma, \%$	t_{Π}	Число колебаний	$P_{\max}$	$\sigma, \%$	t_{Π}	Число колебаний
1,4	≤ 38	$\leq \frac{6\pi}{\omega_{\Pi}}$	≤ 3	1,2	≤ 26	$\leq \frac{4\pi}{\omega_{\Pi}}$	≤ 2
1,3	≤ 32	$\leq \frac{5\pi}{\omega_{\Pi}}$	≤ 2	1,0	≤ 17	$\leq \frac{3\pi}{\omega_{\Pi}}$	1

После нахождения основных величин для типовой вещественной характеристики переходят к формированию желаемой логарифмической амплитудной характеристики. При этом очевидно, что фазовая характеристика разомкнутой системы должна так проходить, чтобы обеспечивалась не только устойчивость, но и определенный запас устойчивости.

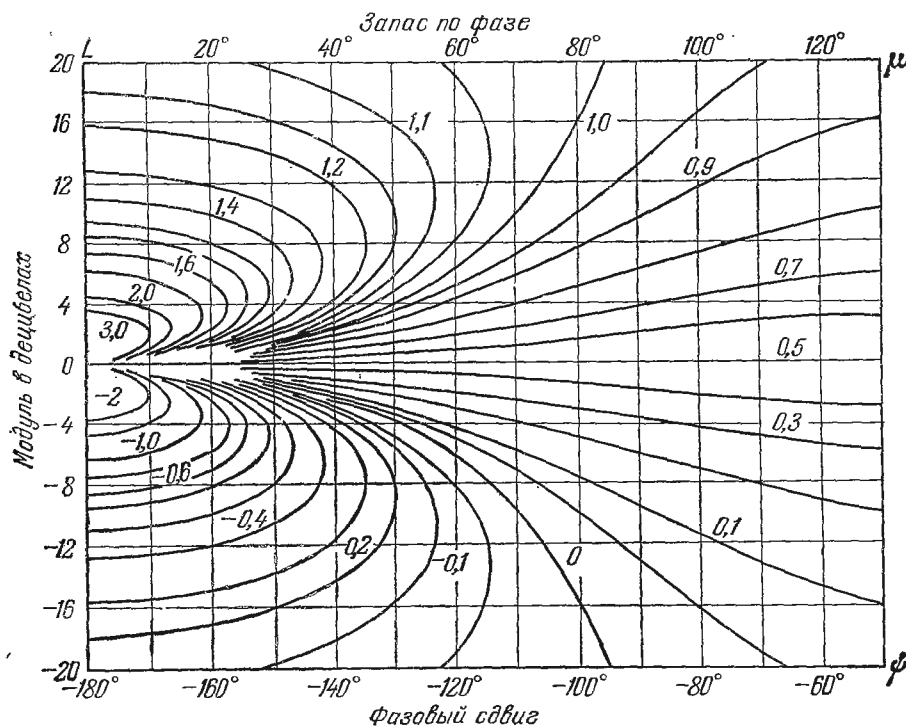


Рис. 12.7.

Вещественная характеристика замкнутой системы связана с частотной передаточной функцией разомкнутой системы $W(j\omega)$ зависимостью

$$P(\omega) = \operatorname{Re} \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} = \operatorname{Re} \frac{U(\omega) + jV(\omega)}{1+U(\omega) + jV(\omega)}. \quad (12.49)$$

Задаваясь различными значениями $P(\omega) = \text{const}$, на комплексной плоскости можно построить кривые, дающие связь между вещественной и мнимой частями $W(j\omega)$ или между ее модулем и фазой (или запасом по фазе). На рис. 12.7 приведено подобное семейство кривых для амплитуды,

откладываемой в децибелах. Цифры около соответствующих кривых указывают значение $P(\omega)$. Если на этом графике нанести амплитудно-фазовую характеристику системы, то по точкам пересечения с кривыми можно построить вещественную характеристику.

Кривые, приведенные на рис. 12.7, позволяют сформулировать требования к амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы, которые необходимо выполнить, чтобы обеспечить получение желаемой типовой характеристики.

Так, например, если необходимо, чтобы $\sigma\% \leq 30\%$, то максимальная и минимальная ординаты вещественной характеристики в соответствии с табл. 12.5 не должны превышать значений (ориентировочно) $P_{\max} \leq 1,2$ и $|P_{\min}| \leq 0,2$. Это означает, что логарифмическая амплитудно-фазовая характеристика, нанесенная на рис. 12.7, не должна заходить в области, ограниченные кривыми с отметками 1,2 и 0,2. Сформулированное условие будет выполняться, если амплитудно-фазовая характеристика не будет заходить в прямоугольник, образованный горизонтальными линиями $L_1 = +16 \text{ дБ}$ и $L_2 = -16 \text{ дБ}$ и вертикальной линией $\psi = -135^\circ$ (или в величинах запаса по фазе $\mu = 180^\circ + \psi = 45^\circ$).

В соответствии с этим на рис. 12.8 построены кривые, которые позволяют при заданном значении перерегулирования выбрать требуемое значение запаса по модулю $L_1 = |L_2|$ и запаса по фазе μ .

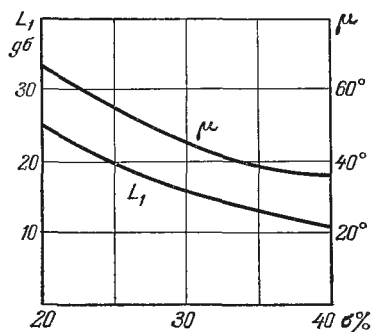


Рис. 12.8.

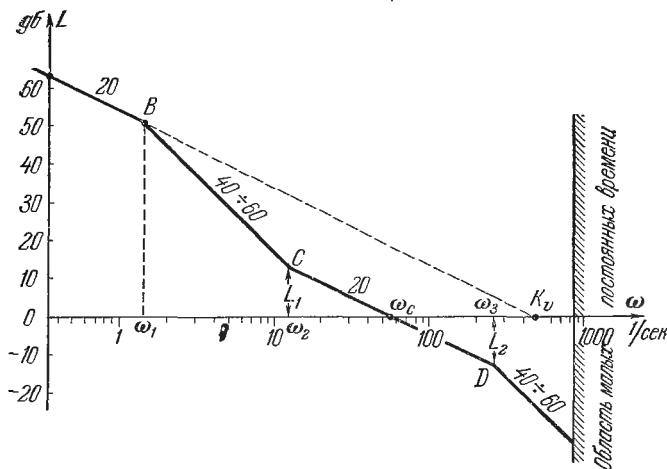


Рис. 12.9.

Построение желаемой асимптотической л. а. х. производится в следующем порядке.

Первая низкочастотная асимптота проводится так, чтобы она имела наклон -20 дБ/дек , соответствующий астатизму первого порядка (рис. 12.9). Продолжение асимптоты должно пересечь ось частот при частоте, равной желаемой добротности по скорости:

$$K_v = \frac{1}{c_1}, \quad (12.50)$$

где c_1 — заданный коэффициент ошибки.

При однократном изломе в точке B первая сопрягающая частота определяется по формуле

$$\omega_1 = \frac{2c_1}{c_2} = \frac{K_\varepsilon}{K_v}, \quad (12.51)$$

где $K_\varepsilon = \frac{2}{c_2}$ — добротность системы по ускорению, а при двукратном изломе — по формуле

$$\omega_1 = \frac{4c_1}{c_2} = \frac{2K_\varepsilon}{K_v}. \quad (12.52)$$

Далее по найденной из рис. 12.6 частоте положительности ω_{Π} определяется частота среза л. а. х. $\omega_{\text{ср}}$ так, чтобы она удовлетворяла условию

$$\omega_{\text{ср}} = (0,6 \div 0,9) \omega_{\Pi}. \quad (12.53)$$

Среднечастотный участок желаемой л. а. х. образуется асимптотой с наклоном — 20 дБ/дек , проводимой так, чтобы она пересекала ось частот при $\omega_{\text{ср}}$. Этот участок проводится влево и вправо до достижения модулей, равных L_1 и L_2 (рис. 12.9). Затем производится сопряжение среднечастотного участка с низкочастотными асимптотами и высокочастотной частью.

Для облегчения построения желаемой л. а. х. вводятся типовые передаточные функции и им соответствующие л. а. х. Они даны в табл. 12.6.

Таблица 12.6

Типовые передаточные функции и л. а. х.

Тип л. а. х.	Передаточная функция	Отрицательные наклоны асимптот в дБ/дек
I	$\frac{K(1+\tau_2 p)}{p(1+T_1 p)(1+T_3 p)}$	20—40—20—40
II	$\frac{K(1+\tau_2 p)^2}{p(1+T_1 p)^2(1+T_3 p)}$	20—60—20—40
III	$\frac{K(1+\tau_2 p)}{p(1+T_1 p)(1+T_3 p)^2}$	20—40—20—60
IV	$\frac{K(1+\tau_2 p)^2}{p(1+T_1 p)^2(1+T_3 p)^2}$	20—60—20—60

Передаточные функции и л. а. х. всех четырех типов полностью определяются заданием четырех величин: коэффициента усиления K и трех сопрягающих частот $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$, $\omega_2 = \frac{1}{\tau_2}$ и $\omega_3 = \frac{1}{T_3}$ (рис. 12.10). Л. а. х. полностью определяется также заданием следующих четырех величин: коэффициента усиления в децибелах L_1 при частоте $\omega = \omega_1$, частоты среза $\omega_{\text{ср}}$ и двух относительных сопрягающих частот $\frac{\omega_1}{\omega_{\text{ср}}}$ и $\frac{\omega_3}{\omega_{\text{ср}}}$.

К малым параметрам (рис. 12.9) относятся те постоянные времени системы, пренебрежение влиянием которых не сказывается существенно на динамических качествах системы. Обычно считают, что в качестве «малых» постоянных времени можно принять такие, которые удовлетворяют условию

$$T_i \leq \frac{1}{(5 \div 10) \omega_3}, \quad (12.54)$$

При построении желаемой л. а. х. нужно следить, чтобы она как можно меньше отличалась от располагаемой л. а. х., что нужно для упрощения

корректирующих средств. Это замечание особенно относится к низкочастотной и высокочастотной частям л. а. х. Желательно делать так, чтобы по крайней мере первая низкочастотная и последняя высокочастотная асимптоты обеих л. а. х. сливались вместе. Совпадение низкочастотных асимптот л. а. х. достигается за счет выбора соответствующего коэффициента усиления в системе K , равного требуемому. Совпадение высокочастотных асимптот

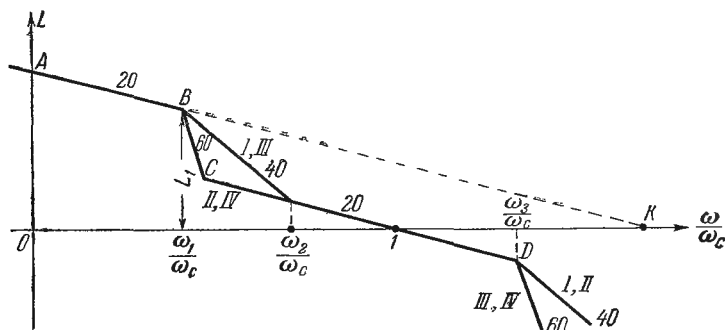


Рис. 12.10.

достигается соответствующим выбором желаемой л. а. х. в высокочастотной области. Заметим, что при формировании желаемой л. а. х. можно увеличивать, если это необходимо для совпадения асимптот, запасы по модулю L_1 и $|-L_2|$, так как такое увеличение только повысит качество системы.

После формирования всей желаемой л. а. х. необходимо проверить, выдерживается ли требуемое значение запаса по фазе, определяемое из графика на рис. 12.8, для модулей, лежащих в пределах

$$L_1 \geq L(\omega) \geq L_2. \quad (12.55)$$

Для этой проверки необходимо подсчитать фазовый сдвиг в двух крайних точках среднечастотного участка, имеющего наклон -20 дБ/дек , т. е. при частотах $\omega = \omega_2$ и $\omega = \omega_3$. Подсчет фазового сдвига делается на основании принятой желаемой передаточной функции. Так, например, для передаточной функции типа I (см. табл. 12.6) он равен

$$\psi = -90^\circ - \arctg \omega T_1 + \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_3.$$

Если требуемый запас по фазе не выдержан, то необходимо расширить среднечастотный участок и произвести вновь проверку.

Чтобы окончательно убедиться в приемлемости сформированной л. а. х., можно по известной желаемой передаточной функции построить любым методом переходный процесс и проверить величины $\sigma\%$ и t_p .

Далее из ординат желаемой л. а. х. вычитаются ординаты располагаемой л. а. х. Получившаяся л. а. х. соответствует передаточной функции последовательного корректирующего звена. При необходимости это звено может быть пересчитано на эквивалентную обратную связь или эквивалентное параллельное корректирующее звено (см. главу 10).

§ 12.6. Синтез систем автоматического регулирования на основе частотных критериев качества

Синтез систем автоматического регулирования методом логарифмических амплитудных характеристик является в настоящее время одним из самых удобных и наглядных. Наиболее трудным моментом при расчете методом логарифмических амплитудных характеристик является установление

связи показателей качества переходного процесса с параметрами желаемой л. а. х., что объясняется сравнительно сложной зависимостью между переходной характеристикой линейной системы и ее частотными свойствами. Задача построения желаемой л. а. х. значительно облегчается, если вместо оценки качества работы системы регулирования по ее переходной характеристике перейти к оценке качества непосредственно по ее частотным свойствам.

Для оценки качества любой системы регулирования, в том числе и следящей системы, необходимо знать ее точность, характеризуемую ошибками в некоторых типовых режимах, быстродействие, определяемое по способности системы работать при больших скоростях и ускорениях входного воздействия или по скорости протекания переходных процессов, и запас устойчивости, показывающий склонность системы к колебаниям. В соответствии с этим можно говорить о критериях точности, критериях быстродействия и критериях запаса устойчивости. При использовании частотных критериев необходимо основываться на тех или иных частотных свойствах системы регулирования.

При оценке точности по ошибкам при воспроизведении гармонического входного воздействия одновременно можно оценить и быстродействие по частоте этого воздействия. Тогда критерий точности и критерий быстродействия сливаются в один критерий динамической точности системы регулирования.

Ниже будут рассмотрены методы расчета систем регулирования, основанные на использовании частотных критериев качества. При этом кривая переходного процесса может, вообще говоря, не рассматриваться и не использоваться. Однако в целях иллюстрации будут даны универсальные нормированные кривые переходных процессов при единичном входном воздействии для рассматриваемых типовых л. а. х.

В дальнейшем изложении будут, как и ранее, рассматриваться линейные системы, состоящие из минимально-фазовых звеньев.

Под ошибкой следящей системы будет пониматься не действительное рассогласование между задающей и исполнительной осями, а только сигнал рассогласования, выявляемый чувствительным элементом системы. Это вызвано тем обстоятельством, что собственные ошибки чувствительных элементов, несмотря на их большой удельный вес в полной ошибке системы регулирования, не оказывают влияния на статический и динамический расчет последней и должны учитываться отдельно. Вопросы расчета ошибок чувствительных элементов относятся к сфере теории соответствующих устройств (сельсинов, вращающихся трансформаторов, потенциометров и т.п.).

Методика расчета излагается, в основном, применительно к следящим системам воспроизведения угла и воспроизведения скорости. Однако эта методика применима и для других систем автоматического регулирования.

Требования к низкочастотной части желаемой л. а. х., связанные с необходимой точностью. На основании требования по точности формируется низкочастотная часть желаемой л. а. х. следящей системы. Рассмотрим вначале астатические системы.

Наиболее просто оценить точность следящей системы можно по воспроизведению гармонического входного сигнала с амплитудой $\vartheta_{1\max}$ и частотой ω_K :

$$\vartheta_1 = \vartheta_{1\max} \sin \omega_K t. \quad (12.56)$$

Амплитуда ошибки может быть найдена с помощью модуля передаточной функции по ошибке:

$$\vartheta_{\max} = |\Phi_\vartheta(j\omega_K)| \vartheta_{1\max} = \frac{\vartheta_{1\max}}{|1+W(j\omega_K)|}, \quad (12.57)$$

где $W(j\omega_K)$ — частотная передаточная функция разомкнутой системы. Так как в подавляющем большинстве случаев амплитуда ошибки значительно меньше амплитуды входного сигнала, т. е. $\vartheta_{\max} \leq \vartheta_{1\max}$, то справедливо соотношение $|W(j\omega_K)| \gg 1$. Поэтому вместо (12.57) можно пользоваться приближенным выражением

$$\vartheta_{\max} \approx \frac{\vartheta_{1\max}}{|W(j\omega_K)|}. \quad (12.58)$$

Последнее выражение позволяет легко сформулировать требование к низкочастотной части л. а. х. следящей системы. Для того чтобы входное воздействие (12.56) воспроизводилось с ошибкой, не превышающей $\vartheta_{\max}$, л. а. х. системы должна проходить не ниже контрольной точки A_K с координатами

$$\omega = \omega_K, \quad L(\omega_K) = 20 \lg |W(j\omega_K)| = 20 \lg \frac{\vartheta_{1\max}}{\vartheta_{\max}}. \quad (12.59)$$

Часто при определении условий работы следящей системы оговариваются только максимальная скорость $\Omega_{1\max}$ и максимальное ускорение $\varepsilon_{1\max}$ слежения. В этом случае можно подобрать эквивалентные режимы гармонического входного воздействия. Вначале найдем такой режим (12.56), при котором амплитуда скорости и амплитуда ускорения равны максимальным заданным значениям. Очевидно, что этому режиму соответствуют:

$$\omega_K = \frac{\varepsilon_{1\max}}{\Omega_{1\max}}, \quad (12.60)$$

$$\vartheta_{1\max} = \frac{\Omega_{1\max}^2}{\varepsilon_{1\max}}. \quad (12.61)$$

По этим величинам можно построить контрольную точку A_K (рис. 12.11) в соответствии с (12.59).

Будем теперь рассматривать режим гармонического входного воздействия, в котором амплитуда скорости по-прежнему равна максимальному значению, а амплитуда ускорения меньше максимального. Тогда контрольная частота (12.60) будет пропорционально уменьшаться, а амплитуда (12.61) возрастет обратно пропорционально амплитуде ускорения. При этом контрольная точка A_K будет перемещаться влево по прямой, имеющей наклон 20 дБ/дек . В предельном случае, если принять амплитуду ускорения равной нулю, контрольная частота $\omega_K \rightarrow 0$. Это соответствует режиму вращения с постоянной скоростью $\Omega_1 = \Omega_{1\max}$. Тогда формула (12.58) вырождается в известное соотношение

$$\vartheta_{\max} = \frac{\Omega_{1\max}}{K_\Omega}, \quad (12.62)$$

где $K_\Omega \left[\frac{1}{\text{сек}} \right]$ — предельное значение добротности по скорости следящей системы с астатизмом первого порядка, ниже которого нельзя иметь реальную добротность по скорости, исходя из условий точности.

Если теперь рассматривать режим гармонического входного воздействия с амплитудой ускорения, равной максимальному значению $\varepsilon_{1\max}$, и амплитудой скорости, меньшей максимального значения $\Omega_{1\max}$, то аналогичными рассуждениями можно показать, что контрольная точка A_K (рис. 12.11) будет двигаться вправо по прямой, имеющей наклон 40 дБ/дек . Квадрат частоты точки пересечения этой прямой с осью нуля децибел равен предельной добротности следящей системы с астатизмом второго порядка

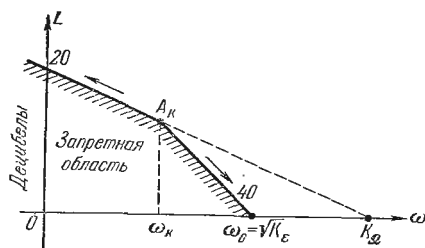


Рис. 12.11.

по ускорению

$$K_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1 \max}{\vartheta_1 \max}, \quad (12.63)$$

равной отношению ускорения к установившейся ошибке. Это будет при условии, что первая асимптота л. а. х. проектируемой следящей системы совпадает с прямой, по которой движется контрольная точка A_K (рис. 12.11). Ниже этого предельного значения не может быть реальной добротности следящей системы с астатизмом второго порядка.

Область, расположенная ниже контрольной точки A_K и двух прямых с наклонами 20 и 40 дб/дек , представляет собой запретную область для л. а. х. следящей системы с астатизмом любого порядка. При работе со скоростями и ускорениями, не превышающими значений $\Omega_{1\max}$ и $\varepsilon_{1\max}$, ошибки следящей системы не будут превосходить значения $\vartheta_1 \max$, если л. а. х. будет проходить не ниже запретной области.

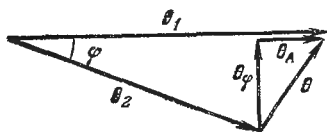


Рис. 12.12.

Для входного воздействия вида (12.56) можно также ограничивать фазовую и относительную амплитудную составляющие ошибки. Для этого найдем ошибку θ_A , находящуюся в фазе, и ошибку θ_φ , находящуюся в квадратуре по отношению к входному воздействию. Для этого на рис. 12.12 построим векторную диаграмму, из которой следует

$$\theta = \frac{\theta_1}{1 + W(j\omega_K)} = (U + jV) \theta_1 = \theta_A + j\theta_\varphi, \quad (12.64)$$

где U и V — вещественная и мнимая части частотной передаточной функции по ошибке. Фазовая ошибка следящей системы

$$\varphi = \arctg \frac{|\theta_\varphi|}{|\theta_1 - \theta_A|} = \arctg \frac{\vartheta_\varphi \max}{\vartheta_1 \max - \vartheta_A \max} \quad (12.65)$$

и относительная амплитудная ошибка

$$\frac{\Delta\vartheta}{\vartheta_1 \max} = \frac{|\theta_1| - |\theta_2|}{|\theta_1|} = \frac{\vartheta_1 \max - \vartheta_2 \max}{\vartheta_1 \max}. \quad (12.66)$$

В формулах (12.64) — (12.66) и на рис. 12.12 величины θ_1 , θ_2 , θ , θ_φ и θ_A представляют собой векторные изображения соответствующих гармонических функций времени ϑ_1 , ϑ_2 , ϑ , ϑ_φ и ϑ_A .

В большинстве случаев, аналогично изложенному выше, можно считать, что $|W(j\omega_K)| \gg 1$ и передаточная функция разомкнутой системы с астатизмом первого порядка в области низких частот имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{K_\Omega}{j\omega(1 + j\omega T_1)}.$$

Тогда фазовая ошибка (при $\arctg \varphi \approx \varphi$) на основании (12.64)

$$\varphi = \frac{1}{\vartheta_1 \max} \operatorname{Im} \frac{\vartheta_1 \max}{W(j\omega_K)} = \frac{\omega_K}{K_\Omega} \quad (12.67)$$

и относительная амплитудная ошибка

$$\frac{\Delta\vartheta}{\vartheta_1 \max} \approx \frac{|\theta_A|}{\vartheta_1 \max} \approx \frac{1}{\vartheta_1 \max} \operatorname{Re} \frac{\vartheta_1 \max}{W(j\omega_K)} = \frac{\omega_K^2 T_1}{K_\Omega} = \frac{\omega_K^2}{K_\varepsilon}. \quad (12.68)$$

Задание величины фазовой и относительной амплитудной ошибок определяет предельные положения первой и второй асимптот л. а. х., т. е. необходимые значения добротности по скорости K_Ω и добротности по ускоре-

нию $K_{\varepsilon} = \frac{K_{\Omega}}{T_1}$. Нетрудно видеть, что предельные положения асимптот и в этом случае формируют запретную зону для низкочастотной части л. а. х. вида, изображенного на рис. 12.11. Использование приведенных выше формул для формирования низкочастотной части л. а. х. возможно лишь в том случае, если двигатель в состоянии обеспечивать получение на исполнитель-ной оси требуемых максимальных значений скорости $\Omega_{1\max}$ и ускоре-ния $\varepsilon_{1\max}$.

При выводе всех приведенных выше формул предполагалось, что ошибка в системе определяется только наличием задающего воздействия $\vartheta_1(t)$. При действии на систему возмущений, например момента нагрузки на оси двигателя, необходимо увеличение общего коэффициента усиления системы для того, чтобы результирующая ошибка не превосходила заданного значе-ния. Более подробно это изложено, например, в [10].

В статических следящих системах установившаяся ошибка по задающему воздействию может быть сделана равной нулю применением неединичной обратной связи (§ 9.3). Однако появление статической ошибки возможно при неустойчивости общего коэффициента усиления. В соответ-ствии с формулой (9.71) для рассматриваемого случая максимальное значе-ние ошибки составит

$$\vartheta_{\max} = \frac{\Delta K}{K} \frac{\vartheta_{1\max}}{K}, \quad (12.69)$$

где $\frac{\Delta K}{K}$ — относительное изменение коэффициента усиления разомкнутой цепи.

Из выражения (12.69) можно получить требуемые значения общего коэф-фициента усиления K или коэффициента ошибки c_0 :

$$K = \frac{1}{c_0} = \frac{\Delta K}{K} \frac{\vartheta_{1\max}}{\vartheta_{\max}}. \quad (12.70)$$

Пусть, кроме того, задано требуемое значение коэффициента ошибки c_1 , являющегося коэффициентом пропорциональности между скоростью вход-ного воздействия и ошибкой.

Примем, что в низкочастотной области частотная передаточная функция статической системы может быть сведена к выражению

$$W(j\omega) = \frac{K}{(1 + T_0 j\omega)(1 + T_1 j\omega)}.$$

Тогда коэффициент ошибки c_1 для этой передаточной функции будет равен

$$c_1 = \frac{T_0 + T_1}{K}. \quad (12.71)$$

Отсюда может быть получена допустимая сумма двух постоянных вре-мени:

$$T_0 + T_1 \leq c_1 K = c_1 \frac{\Delta K}{K} \frac{\vartheta_{1\max}}{\vartheta_{\max}}. \quad (12.72)$$

Формулы (12.70) и (12.72) устанавливают требования к низкочастотной части желаемой л. а. х.

Если к проектируемой системе кроме задающего воздействия при-ложено возмущение, то в формуле для общего коэффициента усиления необ-ходимо дополнительно учесть составляющую, определяемую этим возмуще-нием. Пусть, например, статическая ошибка от возмущения определяется

формулой (8.4):

$$x''_{ст} = \frac{\gamma_1 f_{10}}{1+K} \approx \frac{\gamma_1 f_{10}}{K},$$

где γ_1 — коэффициент статизма, а f_{10} — постоянное возмущение.

Тогда вместо (12.69) можно записать

$$\vartheta_{\max} = \frac{\Delta K}{K} \frac{\vartheta_{1\max}}{K} + \frac{\gamma_1 f_{10}}{K}. \quad (12.73)$$

Отсюда находится требуемое значение общего коэффициента усиления:

$$K = \frac{\Delta K}{K} \frac{\vartheta_{1\max}}{\vartheta_{\max}} + \frac{\gamma_1 f_{10}}{\vartheta_{\max}}. \quad (12.74)$$

В системах стабилизации ошибка определяется только наличием возмущения (или возмущений). В этом случае требование к низкочастотной части л. а. х. сводится к необходимости иметь определенное значение общего коэффициента усиления, вне зависимости от того, является ли система по виду передаточной функции $W(p)$ статической или астатической.

Это значение общего коэффициента усиления будет определяться вторым слагаемым в правой части (12.74) или суммой подобных слагаемых при действии нескольких возмущений. По общему коэффициенту усиления может быть построена первая асимптота желаемой л. а. х.

Требования к запасу устойчивости. В следящих системах повышение общего коэффициента усиления по разомкнутой цепи вызывает приближение к колебательной границе устойчивости. Это проявляется в увеличении колебательности системы. Для оценки запаса устойчивости, т. е. степени удаления от колебательной границы устойчивости, могут использоваться различные критерии, в том числе такие, как, например, перерегулирование при единичном входном возмущении, запас устойчивости по амплитуде и по фазе и т. п.

При использовании частотных критериев качества наиболее удобно оценивать запас устойчивости по показателю колебательности M , который характеризует склонность системы к колебаниям (см. главу 8).

В астатических системах для замкнутой системы коэффициент передачи на нулевой частоте равен единице. Поэтому под показателем колебательности понимается абсолютное значение наибольшего максимума

$$M = |\Phi(j\omega)|_{\max} = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|_{\max}.$$

Это положение остается справедливым и для статических систем, так как для исключения статической ошибки по задающему воздействию в них, как правило, используется масштабирование выходной величины посредством применения неединичной обратной связи (см. § 9.3) с коэффициентом $k_{oc} < 1$. Тогда коэффициент передачи замкнутой системы на нулевой частоте может быть сделан равным единице соответствующим выбором величины k_{oc} :

$$\Phi(j0) = \frac{W(j0)}{1+k_{oc}W(j0)} = \frac{K}{1+k_{oc}K} = 1,$$

где K — коэффициент усиления по разомкнутой цепи.

Отсюда находится требуемое значение коэффициента обратной связи:

$$k_{oc} = \frac{K-1}{K}.$$

Показатель колебательности $M = 1,1 \div 1,3$ соответствует очень хорошему демпфированию системы, при котором перерегулирования весьма

малы. Показатель колебательности $M = 1,3 \div 1,5$ обычно является вполне достаточным для большинства следящих систем. Во многих случаях следящие системы работают удовлетворительно и при значениях $M = 1,6 \div 1,8$.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы в устойчивой системе показатель колебательности был не больше заданного, является нахождение фазовой характеристики вне запретной зоны (рис. 8.27). В минимально-фазовых системах это условие может быть выдержано соблюдением определенных правил построения л. а. х. без нахождения фазовой характеристики.

Рассмотрим принципы построения л. а. х. с заданным показателем колебательности. По методическим соображениям рассмотрение начнем со следящих систем с астатизмом второго порядка, хотя эти системы и не относятся к наиболее простым и распространенным.

Как правило, в качестве типовых используются л. а. х., имеющие в низкочастотной части наклон не более 40 дб/дек . Это вызвано стремлением избавиться от условий, при которых возможно появление неустойчивости в большом, т. е. при согласовании следящей системы с большого угла.

Типовые л. а. х. систем с астатизмом второго порядка. В системах с астатизмом второго порядка обычно имеются два интегрирующих звена. Такими звеньями могут быть исполнительный и вспомогательный двигатели, например гидромуфта и управляющий двигатель, поворачивающий шпиндель или чашу гидронасоса. В некоторых случаях астатизм второго порядка может появляться вследствие особенностей механических характеристик единственного исполнительного двигателя, у которого вращающий момент не зависит от скорости вращения.

Рассмотрим передаточную функцию разомкнутой системы вида

$$W(p) = \frac{K_e (1 + T_2 p)}{p^2 (1 + T_3 p)}, \quad (12.75)$$

где $K_e \left[\frac{1}{\text{сек}^2} \right]$ — коэффициент усиления по разомкнутой цепи, называемый добротностью по ускорению.

Асимптотическая л. а. х., соответствующая (12.75), изображена на рис. 12.13. В соответствии с наклонами асимптот, кратными — 20 дб/дек , ей присвоен тип 2—1—2.

Положение всей л. а. х. может быть задано точкой пересечения первой асимптоты с осью нуля децибел. Этой точке соответствует частота

$$\omega_0 = \sqrt{K_e}, \quad (12.76)$$

которую назовем *базовой*.

При введении новой переменной $q = \frac{p}{\omega_0}$ передаточная функция будет представлена в нормированном виде:

$$W(q) = \frac{1 + \tau_2 q}{q^2 (1 + \tau_3 q)}, \quad (12.77)$$

где $\tau_2 = \omega_0 T_2$ и $\tau_3 = \omega_0 T_3$ — относительные постоянные времени.

Соответствующая нормированная л. а. х., построенная для относительной частоты $y = \frac{\omega}{\omega_0}$, изображена на рис. 12.14. Здесь же показаны для иллюстрации фазовая характеристика и запретная область для нее.

Протяженность участка с единичным наклоном, т. е. с отрицательным наклоном $20 \text{ дб/дек} = 6 \text{ дб/окт}$, определяется отношением двух постоянных

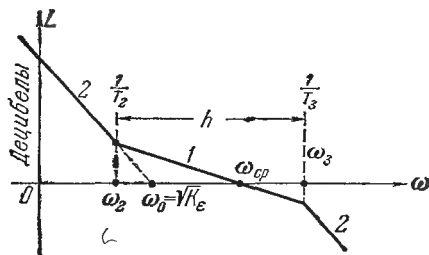


Рис. 12.13.

времени:

$$h = \frac{T_2}{T_3} = \frac{\tau_2}{\tau_3}. \quad (12.78)$$

Под протяженностью участка вдоль оси частот (рис. 12.14) понимается отношение частот конечных точек участка (большей к меньшей).

Запас по фазе для функции (12.77)

$$\mu = \operatorname{arctg} y\tau_2 - \operatorname{arctg} y\tau_3 = \operatorname{arctg} \frac{(h-1)y\tau_3}{1+hy^2\tau_3^2}. \quad (12.79)$$

Исследование на максимум дает

$$y_M = \frac{1}{\tau_3 \sqrt{h}}, \quad (12.80)$$

$$\mu_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{h-1}{2\sqrt{h}}. \quad (12.81)$$

Максимальный запас по фазе определяется только протяженностью h асимптоты л. а. х., имеющей единичный наклон.

Приравнивание максимальных запасов по фазе (8.88) и (12.81) дает зависимость между протяженностью участка h и показателем колебательности M при оптимальном выборе параметров, т. е. при совпадении максимумов реальной фазовой характеристики и запретной зоны (рис. 12.14):

$$h = \frac{M+1}{M-1}, \quad (12.82)$$

$$M = \frac{h+1}{h-1}. \quad (12.83)$$

Эти формулы связывают протяженность участка h с минимальным значением показателя колебательности,

который может быть получен при этой протяженности, или величину показателя колебательности M с минимальной протяженностью участка h , обеспечивающей этот показатель колебательности.

Из рис. 12.14 легко найти оптимальные параметры л. а. х.:

$$\tau_2 = \omega_0 T_2 = \sqrt{\sqrt{h} \cdot \sqrt{C}} = \sqrt{\sqrt{\frac{M+1}{M-1}} \sqrt{\frac{M^2}{M^2-1}}} = \sqrt{\frac{M}{M-1}}, \quad (12.84)$$

где $\sqrt{C}$ соответствует модулю, а $1/\sqrt{C}$ — относительной частоте, при которых запас по фазе (в запретной области) получается максимальным (см. формулу (8.88));

$$\tau_3 = \omega_0 T_3 = \frac{\tau_2}{h} = \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}. \quad (12.85)$$

Эти параметры соответствуют минимальному значению показателя колебательности при заданной протяженности участка h .

Следует заметить, что технически реализовать систему тем легче, чем меньше протяженность участка h . Это связано с необходимостью подъема на этом участке верхних частот, что во многих случаях затруднено вследствие наличия в системе внешних и внутренних высокочастотных помех. Поэтому с точки зрения оптимальности инженерного решения необходимо

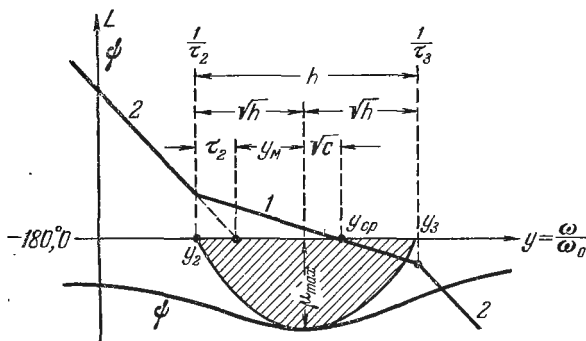


Рис. 12.14.

стремиться к реализации желаемых динамических качеств при минимальной требуемой протяженности участка h .

Для получения заданного показателя колебательности в замкнутой системе при фиксированной базовой частоте л. а. х. необходимо иметь следующие постоянные времени:

$$T_2 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}}, \quad (12.86)$$

$$T_3 = \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}. \quad (12.87)$$

Вместо базовой частоты ω_0 за точку, фиксирующую положение л. а. х. (рис. 12.13 и 12.14), можно принять, например, точку пересечения второй асимптоты л. а. х. с осью децибел, которой соответствует частота $\omega_{cp} = \omega_0 T_2$. Тогда вместо (12.86) и (12.87) получим выражения, которые при фиксированной частоте среза, а следовательно, и фиксированном положении запретной зоны для фазовой характеристики можно превратить в неравенства:

$$T_2 \geq \frac{1}{\omega_{cp}} \frac{M}{M-1}, \quad (12.88)$$

$$T_3 \leq \frac{1}{\omega_{cp}} \frac{M}{M+1}. \quad (12.89)$$

При равенстве левых частей правым показатель колебательности будет равен заданному значению M . При неравенстве левых и правых частей будет вводиться некоторый дополнительный запас устойчивости и показатель колебательности будет снижаться.

Эти формулы легко запоминаться, и они просто связаны с параметрами окружности — запретной зоны на комплексной плоскости (см. рис. 8.28).

В неравенство может быть превращена и формула (12.87). Формулу (12.86) лучше иметь в виде равенства, так как увеличение T_2 по сравнению с тем, что дает формула, в некоторых случаях может привести к ухудшению запаса устойчивости.

При использовании типовой передаточной функции (12.75) может быть предусмотрен дополнительный запас устойчивости для возможности иметь в усилительном канале некоторое количество не учитываемых при расчете малых постоянных времени. Дополнительный запас устойчивости создается уменьшением величины постоянной времени T_3 или, соответственно,

$$\tau_3 = \omega_0 T_3,$$

чтобы отодвинуть фазовую характеристику от запретной области (рис. 12.15).

На малые постоянные времени отводится обычно несколько градусов запаса по фазе. Так, например, в [10] предлагается отводить на эти цели величину, соответствующую сумме малых постоянных,

$$\Sigma T_m = \frac{0,1}{\omega_0}, \quad (12.90)$$

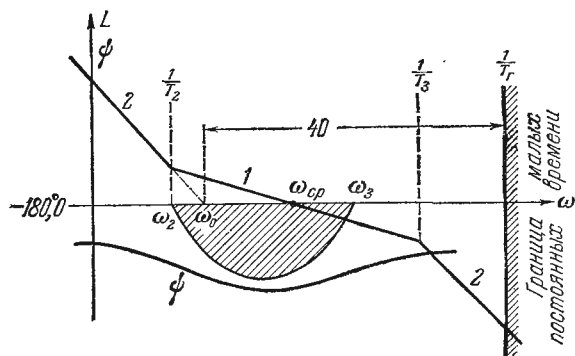


Рис. 12.15.

а число малых постоянных времени принимать равным $4 \div 6$. Тогда граница малых постоянных времени определяется значением

$$T_{\Gamma} = \frac{\Sigma T_{\text{м}}}{4} = \frac{0,025}{\omega_0}. \quad (12.91)$$

Если некоторая постоянная времени $T_{\text{м}}$ дает сопрягающую частоту $\omega_{\text{м}} = \frac{1}{T_{\text{м}}}$, которая больше граничной частоты (рис. 12.15)

$$\omega_{\Gamma} = \frac{1}{T_{\Gamma}} = 40\omega_0, \quad (12.92)$$

то эта постоянная может не учитываться при расчете.

Расчетная формула для определения допустимого значения постоянной времени T_2 (12.86) при этом сохраняется, а вместо формулы (12.87) должно использоваться выражение

$$T_3 \leq \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1} - 0,1 \right). \quad (12.93)$$

В более сложном случае передаточная функция разомкнутой системы может иметь произвольное число постоянных времени, входящих в ее знаменатель:

$$W(p) = \frac{K_{\varepsilon}(1+T_2p)}{p^2(1+T_3p)(1+T_4p)(1+T_5p)\dots}. \quad (12.94)$$

Этой передаточной функции соответствует л. а. х. типа 2—1—2—3—4...

Расчеты и здесь оказываются достаточно простыми. Для получения заданного показателя колебательности необходимо выполнение условия (12.86) для постоянной времени T_2 . Сумма всех остальных постоянных времени $\Sigma T = T_3 + T_4 + T_5 + \dots$, включая малые постоянные времени, должна удовлетворять неравенству

$$\Sigma T \leq \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}. \quad (12.95)$$

При использовании расчета по частоте среза для постоянной времени T_2 должно выполняться условие (12.88), а для суммы остальных постоянных времени — условие

$$\Sigma T \leq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1}. \quad (12.96)$$

В л. а. х. подобного типа легко учесть наличие звеньев постоянного запаздывания¹⁾. В этом случае время запаздывания τ должно учитываться при подсчете суммы постоянных времени ΣT .

Возможен случай, когда в передаточную функцию разомкнутой системы входит множитель, соответствующий колебательному звену с комплексными корнями:

$$W(p) = \frac{K_{\varepsilon}(1+T_2p)}{p^2(1+T_3p)(1+ap+bp^2)\dots}. \quad (12.97)$$

Допустить наличие такого множителя можно в том случае, если частота свободных колебаний звена значительно больше базовой частоты:

$$q_0 = \frac{1}{\sqrt{b}} \gg \omega_0. \quad (12.98)$$

Асимптотическая л. а. х. для этого случая изображена на рис. 12.16.

¹⁾ О звеньях постоянного запаздывания см. главу 14.

При выполнении условия (12.98) фазовый сдвиг, вносимый колебательным звеном в районе максимального запаса по фазе, можно принять равным $\arctg a \omega$. Поэтому коэффициент a должен входить в общую сумму постоянных времени (12.95) или (12.96).

Для того чтобы избежать появления второй запретной зоны в районе пика л. а. х. при $\omega \approx q_0$ (рис. 12.16), необходимо выполнение дополнительного условия, которое вытекает из неравенства (8.87):

$$\text{mod } W(jq_0) = A(q_0) < \frac{M}{M+1}. \quad (12.99)$$

Выполнение этого условия может быть легко проверено при построении л. а. х.

Более подробно этот вопрос рассмотрен для случая гироскопических следящих систем в [10].

Предельным случаем л. а. х. типа 2—1—2 или типа 2—1—2—3 является л. а. х. типа 2—1 (рис. 12.17), соответствующая случаю, когда $\Sigma T \rightarrow 0$.

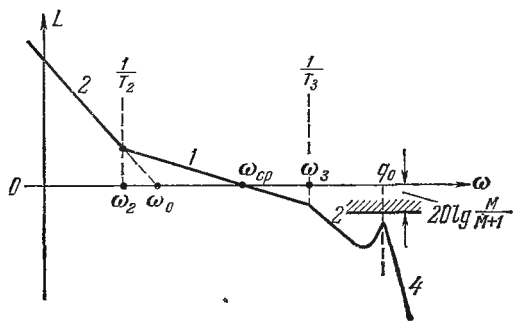


Рис. 12.16.

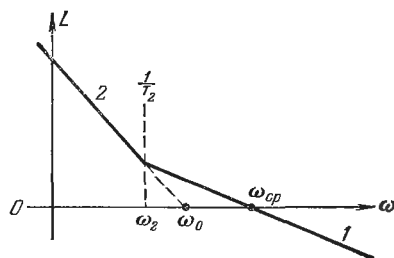


Рис. 12.17.

Тогда передаточная функция разомкнутой системы (12.94) приобретает вид

$$W(p) = \frac{K_{\varepsilon}(1+T_2 p)}{p^2} = \frac{K_{\varepsilon}}{p^2} + \frac{K_{\varepsilon} T_2}{p}. \quad (12.100)$$

Передаточная функция подобного вида соответствует издромному регулированию. Она может встречаться, например, в сглаживающих системах различного типа, построенных на электромеханических, электронных, гироскопических и тому подобных интеграторах.

Показатель колебательности для подобной передаточной функции может быть определен прямым отысканием максимума модуля частотной передаточной функции замкнутой системы

$$\left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|_{\max} = M.$$

Подстановка (12.100) и исследование получившегося выражения на максимум дает следующее условие, которое должно быть выполнено, чтобы показатель колебательности не превышал заданного значения:

$$T_2 \geq \frac{1}{\omega_0} \sqrt{2 \frac{M^2 - M \sqrt{M^2 - 1}}{M^2 - 1}}$$

или, в другом виде (при условии, что $\omega_{\text{ср}} > \omega_0$),

$$T_2 \geq \frac{2}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M^2 - M \sqrt{M^2 - 1}}{M^2 - 1}. \quad (12.101)$$

Типовые л. а. х. систем с астатизмом первого порядка. Следящие системы с астатизмом первого порядка представляют собой наиболее

распространенный тип систем, содержащих одно интегрирующее звено — исполнительный двигатель. В простейшем случае, когда следящая система состоит из безынерционного усилителя и исполнительного двигателя с постоянной времени T_1 и не имеет дополнительных корректирующих средств, кроме, возможно, жесткой тахометрической обратной связи, передаточная функция разомкнутой системы может быть сведена к виду

$$W(p) = \frac{K_\Omega}{p(1+T_1p)}. \quad (12.102)$$

Асимптотическая л. а. х. типа 1—2, соответствующая этой передаточной функции, изображена на рис. 12.18.

Определение допустимого значения постоянной времени может быть сделано прямым нахождением максимума амплитудной частотной характеристики замкнутой системы

$$\left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|_{\max} = M.$$

Подставляя (12.102) и исследуя полученное выражение на максимум, можно найти условие того, чтобы показатель колебательности не превышал заданного значения:

$$K_\Omega T_1 \leq \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2}. \quad (12.103)$$

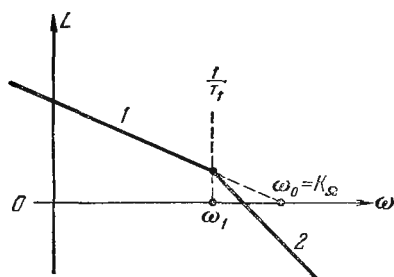


Рис. 12.18.

Последняя формула позволяет при заданном значении постоянной времени исполнительного двигателя легко определять максимальное значение добротности по скорости, которое можно иметь в следящей системе при данном значении показателя колебательности.

При заданном значении требуемой добротности по скорости эта же формула позволяет определять допустимое значение постоянной времени исполнительного двигателя и необходимый коэффициент усиления по петле жесткой тахометрической обратной связи, служащей для снижения постоянной времени двигателя. Определение коэффициента усиления для тахометрической обратной связи может производиться по формуле

$$T_1 = \frac{T_d}{1+k_{ос}},$$

где T_d — постоянная времени исполнительного двигателя, $k_{ос}$ — коэффициент усиления по петле тахометрической обратной связи.

В более сложном случае передаточная функция (12.102) может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{K_\Omega}{p(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)\dots}. \quad (12.104)$$

Этой функции соответствует л. а. х. типа 1—2—3—4...

Здесь может быть получена приближенная формула, ориентировочно связывающая сумму всех постоянных времени с добротностью по скорости:

$$K_\Omega(T_1 + T_2 + T_3 + \dots) \leq \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2} \quad (12.105)$$

при $M \leq 1,3$.

Приближенная формула (12.105) становится точной при $M = 1$ и любом числе постоянных времени либо при наличии только одной постоянной времени и любом значении M . В последнем случае она вырождается в форму-

лу (12.103). При значениях M , мало отличающихся от единицы, например при $M \leq 1,3$, формула (12.105) является достаточно точной и может использоваться для расчета при наличии любого числа постоянных времени, а также при наличии временного запаздывания τ , которое должно учитываться в общей сумме постоянных времени.

Л. а. х. рассмотренного типа может использоваться в простейших следящих системах с невысокими требованиями в отношении статической и динамической точности. При невозможности удовлетворить требованиям технического задания приходится переходить к более сложным типам л. а. х. На рис. 12.19 изображена асимптотическая л. а. х. типа 1—2—1—2—3... Она может быть получена из соответствующей л. а. х. типа 2—1—2—3... системы с астатизмом второго порядка (рис. 12.16) добавлением одного излома при сопрягающей частоте

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1}.$$

Этой л. а. х. соответствует передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K_\Omega (1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) \dots} \quad (12.106)$$

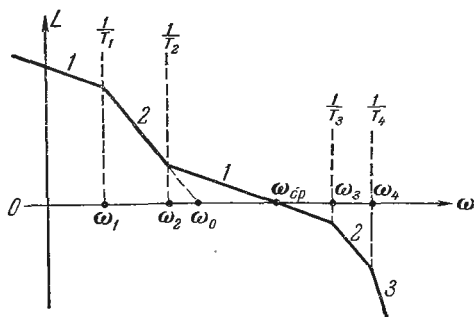


Рис. 12.19.

Так как обычно сопрягающая частота ω_1 значительно отличается от частоты в зоне максимума требуемого запаса по фазе, то с большой степенью точности расчет можно вести по формулам, полученным в предыдущем параграфе для систем с астатизмом второго порядка. В этом случае положение л. а. х., изображенной на рис. 12.19, определяется базовой частотой

$$\omega_0 = \sqrt{K_\varepsilon} = \sqrt{\frac{K_\Omega}{T_1}}.$$

В соответствии с формулами (12.86) и (12.95) имеем

$$T_2 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}}, \quad T_3 + T_4 + \dots \leq \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}$$

или в соответствии с формулами (12.88) и (12.96)

$$T_2 \geq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M-1}, \quad T_3 + T_4 + \dots \leq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1}.$$

Для уточнения расчета можно учесть то обстоятельство, что по сравнению с системой, имеющей астатизм второго порядка, здесь имеется дополнительный запас по фазе

$$\Delta\mu = \arctg \frac{1}{\omega T_1}. \quad (12.107)$$

Это позволяет немного увеличить допустимую сумму постоянных времени, которым соответствуют сопрягающие частоты правее частоты среза (формулы (12.95) и (12.96)), или немного уменьшить постоянную времени T_2 (формулы (12.86) и (12.88)). Однако подобное уточнение обычно не имеет практического значения [10] и почти всегда с достаточной степенью точности можно вести расчет параметров л. а. х. типа 1—2—1—2—3... по формулам, которые были получены для системы с астатизмом второго порядка (л. а. х. типа 2—1—2—3...).

Типовые л. а. х. статических систем. В простейшем случае передаточная функция разомкнутой статической системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{(1+T_0p)(1+T_1p)}, \quad (12.108)$$

где K — коэффициент усиления разомкнутой системы.

Соответствующая асимптотическая л. а. х. типа 0—1—2 изображена на рис. 12.20.

В районе пересечения л. а. х. оси нуля децибел передаточная функция может быть приближенно сведена к передаточной функции системы с астатизмом первого порядка

$$W(p) = \frac{\omega_0}{ip(1+T_1p)}, \quad (12.109)$$

где базовая частота л. а. х.

$$\omega_0 = \frac{K}{T_0}. \quad (12.110)$$

Это дает возможность использовать полученную выше формулу (12.103) для л. а. х. типа 1—2 (рис. 12.18) при замене K_Ω на ω_0 . Тогда можно получить условие обеспечения заданного показателя колебательности

$$\frac{KT_1}{T_0} \leq \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2}. \quad (12.111)$$

Для передаточной функции более сложного вида

$$W(p) = \frac{K}{(1+T_0p)(1+T_1p)(1+T_2p)\dots} \quad (12.112)$$

аналогично (12.105) имеем

$$\frac{K(T_1+T_2+\dots)}{T_0} \leq \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2} \quad (M \leq 1,3). \quad (12.113)$$

Из этих формул видно значение первой большой постоянной времени T_0 как фактора, увеличивающего запас устойчивости системы. Повышение

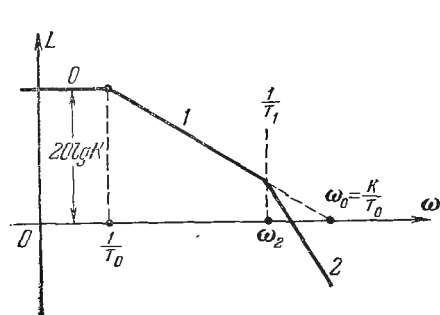


Рис. 12.20.

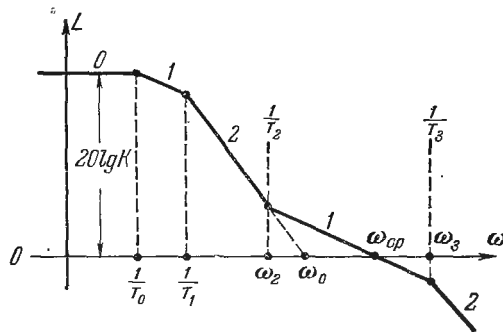


Рис. 12.21.

коэффициента усиления или повышение суммы остальных постоянных времени при заданном показателе колебательности может быть сделано при одновременном увеличении постоянной времени T_0 .

Отклонение передаточной функции (12.109) от более точного выражения (12.108) в области низких частот дает некоторое увеличение запаса устойчивости, т. е. уменьшение колебательности. Учет этого обстоятельства обычно нецелесообразен ввиду незначительности получаемого эффекта [10].

При повышенных требованиях по статической и динамической точности могут применяться л. а. х. типа 0—1—2—1—2—3... (рис. 12.21), образован-

ные из л. а. х. типа 2—1—2—3... (рис. 12.13) систем с астатизмом второго порядка.

Таким л. а. х. соответствует передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K(1+T_2p)}{(1+T_0p)(1+T_1p)(1+T_3p)(1+T_4p) \dots} \quad (12.114)$$

Как и в случае систем с астатизмом первого порядка, здесь можно с достаточной степенью точности пользоваться универсальными формулами (12.86)—(12.89) и (12.95), (12.96).

Учет звеньев постоянного запаздывания и колебательных звеньев, а также введение границы малых постоянных времени может делаться аналогично изложенному выше.

Переходные процессы, соответствующие типовым л. а. х. Для л. а. х. типа 2—1—2 можно показать, что при заданной протяженности h асимптоты с единичным наклоном (рис. 12.13) выбор параметров, при котором обеспечивается минимальное значение показателя колебательности (12.83), вместе с тем соответствует некоторому оптимальному протеканию переходных процессов. При этом будет иметь место максимальное приближение кривой переходного процесса к некоторой экстремали, которая является экспонентой с постоянной времени $T = \omega_0^{-1}h^{-2}$.

Чем больше протяженность участка h , тем меньше показатель колебательности и тем более благоприятным будет протекание переходного процесса, так как постоянная времени экспоненты будет меньше.

Определим вид переходного процесса при единичном входном воздействии $\Phi_1 = 1(t)$ для случая использования л. а. х. типа 2—1—2 (рис. 12.13).

Для нормированной передаточной функции (12.77) изображение Лапласа выходной величины будет иметь вид

$$\Theta_2(q) = \frac{1 + \tau_2 q}{\tau_3 q^3 + q^2 + \tau_2 q + 1} \frac{1}{q}. \quad (12.115)$$

Задаваясь различными значениями показателя колебательности, можно найти относительные постоянные времени $\tau_2 = \omega_0 T_2$ и $\tau_3 = \omega_0 T_3$ и затем построить переходный процесс для выходной величины Φ_2 в функции безразмерного времени $\omega_0 t$. Переходные характеристики показаны на рис. 12.22.

Таблица 12.7

Параметры переходных процессов

M	1,1	1,3	1,5	1,7
$\sigma, \%$	13,8	26,5	37,2	44,6
$\omega_0 t_{\Pi}$	7,75	5,85	5,45	7,25

порядка (рис. 12.13), они с большой степенью точности могут использоваться для оценки переходных процессов при использовании л. а. х. других типов,

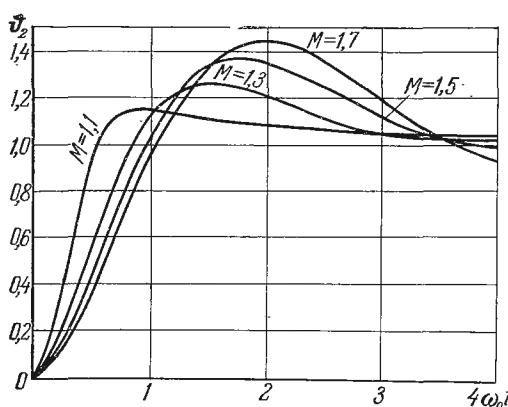


Рис. 12.22.

Параметры переходных процессов — перерегулирование $\sigma\%$ и относительное время переходного процесса $\omega_0 t_{\Pi}$ — для $|1 - \Phi_2(\omega_0 t)| < 0,05$ приведены в табл. 12.7.

Хотя эти кривые переходных процессов соответствуют л. а. х. типа 2—1—2 системы с астатизмом второго

изображенных, например, на рис. 12.16, 12.19 и 12.21, для которых характерным является наличие участка с наклоном -20 дб/дек в районе пересечения оси частот.

Различие будет наблюдаться в начальной части, если высокочастотная часть л. а. х. отличается от высокочастотной части л. а. х. типа 2—1—2, и в конечной части, если будут отличаться их низкочастотные части.

Таким образом, в случае нужды оценка переходных процессов может делаться по универсальным кривым, приведенным на рис. 12.22, во всяком случае для средней части кривой переходного процесса, которая показывает степень склонности системы к колебаниям.

В тех случаях, когда л. а. х. не имеет специального участка с наклоном -20 дб/дек при переходе оси частот (см., например, рис. 12.18 и 12.20), оценка переходных процессов может быть сделана следующим образом.

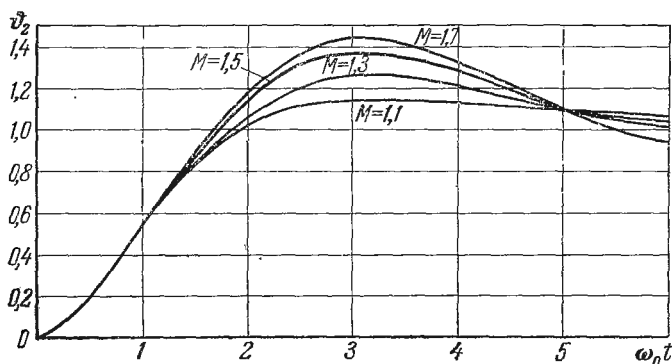


Рис. 12.23.

В качестве исходной примем л. а. х. типа 1—2 (рис. 12.18). Ей соответствует передаточная функция (12.102). Вводя единичное ступенчатое воздействие $\vartheta_1(t)$, можно аналогично изложенному выше построить нормированные переходные процессы в функции безразмерного времени $\omega_0 t$ (рис. 12.23). Здесь в качестве ω_0 принята частота пересечения асимптоты, имеющей наклон -20 дб/дек , с осью частот (рис. 12.18).

Эти же кривые переходного процесса могут использоваться для оценки переходного процесса в случае использования л. а. х. другого типа, например 1—2—3 или 0—1—2 (рис. 12.20). Как и в предыдущем случае, различие может наблюдаться только в начальной и конечной стадиях переходного процесса.

Построение низкочастотной области желаемой л. а. х. Построение желаемой л. а. х. начинается с низкочастотной области. Из условий требуемой точности работы определяется положение контрольной точки или запретной области (см. рис. 12.14). Низкочастотная часть л. а. х. должна проходить не ниже контрольной точки или так, чтобы не заходить в запретную область.

В следящих системах с астатизмом второго порядка положение первой низкочастотной асимптоты, имеющей наклон 40 дб/дек , определяется совершенно однозначно. Из условий облегчения задачи демпфирования выгодно сдвигать эту асимптоту как можно более влево, т. е. в сторону низких частот. Очевидно, что предельное положение первой асимптоты будет в том случае, когда она или пройдет через контрольную точку A_k , или сольется с правой границей запретной области (рис. 12.24).

Необходимое значение базовой частоты л. а. х. ω_0 и необходимый коэффициент усиления по разомкнутой цепи следящей системы определяются

из выражения (12.63):

$$\omega_0^2 = K_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1 \max}{\vartheta_{\max}} \left[\frac{1}{\text{сек}^2} \right].$$

В следящих системах с астатизмом первого порядка необходимо определить положение двух первых асимптот, что можно сделать различным

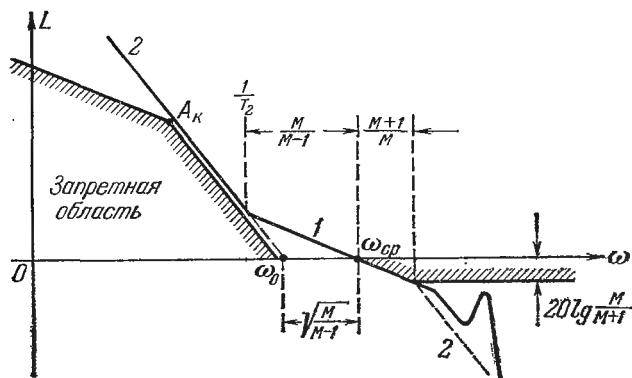


Рис. 12.24.

образом в зависимости от выбранного значения первой сопрягающей частоты $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$.

Если принять, что первая сопрягающая частота больше контрольной частоты ω_K не менее чем в 2—3 раза, то первые две асимптоты можно расположить так, чтобы через контрольную точку A_K прошла первая асимптота (рис. 12.25, а).

При этом коэффициент усиления по разомкнутой цепи или добротность по скорости K_{Ω} будет иметь минимальную возможную величину, равную предельному значению, определяемому из (12.62):

$$K_{\Omega} = \frac{\Omega_1 \max}{\vartheta_{\max}} \left[\frac{1}{\text{сек}} \right],$$

что является благоприятным. Однако частота точки пересечения второй асимптоты с осью нуля децибел ω_0 будет значительно больше минимального достижимого значения, определяемого по требуемому предельному коэффициенту усиления по ускорению (12.63). Это является нежелательным, так как вся л. а. х. будет сдвигаться в область более высоких частот, что затрудняет демпфирование вследствие относительного возрастания влияния всех постоянных времени системы.

Если теперь принять, что первая сопрягающая частота ω_1 меньше контрольной частоты ω_K по крайней мере в 2—3 раза, то первые две асимптоты

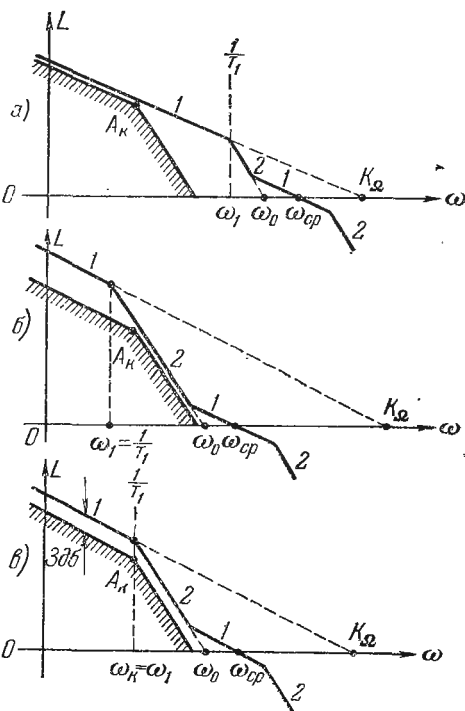


Рис. 12.25.

можно расположить так, чтобы через контрольную точку A_K прошла вторая асимптота (рис. 12.25, б). При этом частота пересечения второй асимптоты с осью нуля децибел ω_0 будет иметь минимальную возможную величину, определяемую предельным значением добротности по ускорению (12.63), что является благоприятным с точки зрения облегчения демпфирования системы. Однако при этом требуемый общий коэффициент усиления по разомкнутой цепи K_Ω будет в 2—3 раза превышать минимальное возможное значение, определяемое формулой (12.62). Увеличение общего коэффициента усиления может неблагоприятным образом сказаться на возрастании влияния помех и наводок на входе. Поэтому выбор того или иного расположения низкочастотной части л. а. х. относительно контрольной точки должен определяться конкретными условиями.

При отсутствии преобладания того или иного фактора оптимальным следует считать такое расположение низкочастотных асимптот (рис. 12.25, в), при котором первая сопрягающая частота ω_1 совпадает с контрольной частотой ω_K .

Так как истинная л. а. х. в точке $\omega = \omega_1$ проходит ниже точки пересечения двух асимптот на 3 дб , или на $\sqrt{2}$, то вся л. а. х. при $\omega_1 = \omega_K$ должна быть поднята вверх на 3 дб . При этом требуемое значение коэффициента усиления

$$K_\Omega = \sqrt{2} \frac{\Omega_{1 \max}}{\phi_{\max}}. \quad (12.116)$$

Точке пересечения второй асимптоты с осью нуля децибел соответствует частота

$$\omega_0 = \sqrt{K_\varepsilon} = \sqrt{\sqrt{2} \frac{\varepsilon_{1 \max}}{\phi_{1 \max}}}. \quad (12.117)$$

В статических следящих системах, а также в системах стабилизации построение низкочастотной части делается в соответствии с формулами (12.69)—(12.74).

Построение средне- и высокочастотной частей л. а. х. В системах с астатизмом второго порядка (рис. 12.24) необходимо осуществить типовой переход оси нуля децибел в соответствии с рис. 12.13. При этом известно значение базовой частоты ω_0 .

Требуемое значение постоянной времени T_2 определяется формулой (12.86).

Среднечастотной части л. а. х. соответствует асимптота с единичным наклоном, проходящая в интервале амплитуд

$$\frac{M}{M-1} > A(\omega) > \frac{M}{M+1}$$

или в интервале частот

$$\frac{1}{T_2} = \omega_{\text{ср}} \frac{M-1}{M} > \omega > \omega_{\text{ср}} \frac{M+1}{M}. \quad (12.118)$$

Часть л. а. х., лежащая правее частоты среза, может иметь, вообще говоря, произвольный вид, определяемый имеющимися в системе звеньями. Однако в соответствии с изложенным выше необходимо выполнение следующих условий.

1. Высокочастотная часть л. а. х. не должна заходить в запретную область, образованную асимптотой с единичным наклоном, пересекающей ось нуля децибел в точке $\omega = \omega_{\text{ср}}$, и горизонтальной прямой, соответствующей

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{M}{M+1}. \quad (12.119)$$

2. Сумма постоянных времени и коэффициентов при операторе в первой степени передаточных функций колебательных звеньев не должна превышать значения (12.95):

$$\sum_{i=1}^m T_i \leq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1} = \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}.$$

При построении желаемой л. а. х. в высокочастотной области вначале можно ориентироваться на наиболее простой ее вид и сформулировать ее при помощи одной асимптоты с наклоном 40 дБ/дек, положение которой определяется постоянной времени

$$T_3 = \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1} = \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}.$$

Эта л. а. х. показана в высокочастотной части на рис. 12.24 пунктирной линией. Она соответствует типу 2—1—2. При дальнейшем расчете вид высокочастотной части л. а. х. может уточняться. Однако два сформулированных выше условия не должны нарушаться. В окончательном виде высокочастотная часть л. а. х. может иметь произвольный вид, например показанный сплошной линией на рис. 12.24.

В следящих системах с астатизмом первого порядка необходимо вначале проверить возможность сведения желаемой л. а. х. к типу 1—2 или ее модификациям 1—2—3... Для этого необходимо исследовать возможность доведения суммы всех постоянных времени до значения, определяемого формулой (12.105):

$$T_1 + T_2 + T_3 + \dots \leq \frac{1}{K_{\Omega}} \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2} \quad (M \leq 1,3).$$

При отрицательном ответе необходимо сформировать переход оси нуля децибел асимптотой с единичным наклоном так, как показано на рис. 12.25. Весь расчет ведется аналогично изложенному выше для следящих систем с астатизмом второго порядка.

Исходные данные для расчета — базовая частота ω_0 и постоянная времени T_1 — известны по построению низкочастотной части л. а. х. (см. рис. 12.25).

Для статических систем расчет ведется аналогично расчету систем с астатизмом первого порядка. Вначале необходимо проверить возможность использования л. а. х. типа 0—1—2 (рис. 12.20) или ее модификации 0—1—2—3... по формуле (12.113). При отрицательном ответе необходимо сформировать переход оси нуля децибел аналогично рис. 12.24 и 12.25.

Расчет корректирующих (демпфирующих) средств. По наиболее простой схеме расчета следящих систем корректирующие средства определяются сравнением желаемой передаточной функции с передаточной функцией системы без корректирующих средств или сравнением л. а. х., соответствующих этим передаточным функциям.

Часто эта схема расчета оказывается слишком упрощенной, что затрудняет ее использование. Это объясняется главным образом трудностью непосредственного перехода в сложных случаях от имеющейся передаточной функции к желаемой, а также тем обстоятельством, что формирование высокочастотной части л. а. х. может быть выполнено неоднозначно. Если вид желаемой л. а. х. в низкочастотной части является вполне определенным, то для ее высокочастотной части могут быть сформулированы лишь общие требования в отношении допустимой суммы постоянных времени и отсутствия пиков, заходящих в запретную зону (см. рис. 12.24).

Поэтому более гибкой оказывается схема расчета, при которой построение желаемой л. а. х. и расчет корректирующих средств, обеспечивающих получение желаемой л. а. х., делаются в два этапа.

На первом этапе расчета на основании требований к точности строится желаемая л. а. х. и рассчитываются корректирующие средства, формирующие ее в низкочастотной части. При этом будет получена некоторая промежуточная система, имеющая требуемую точность, но не имеющая, возможно, требуемого запаса устойчивости.

В некоторых случаях возможно сформирование одновременно с низкочастотной частью л. а. х. ее средне-, а в простейших случаях и высокочастотной частей.

На втором этапе расчета уточняется вид и рассчитываются параметры корректирующих средств, формирующих средне- и высокочастотную части л. а. х. В результате должна быть получена система, обеспечивающая не только требуемую точность в типовых режимах, но и имеющая необходимый запас устойчивости.

§ 12.7. Об оптимальном синтезе

Под *оптимальной* системой автоматического регулирования или управления понимается система, которой тем или иным способом приданы наилучшие качества в каком-нибудь определенном смысле. Например, система может быть спроектирована так, чтобы она имела максимальную точность выполнения возложенной на нее задачи регулирования заданного объекта. Другим примером оптимизации является существование наиболее быстрого перехода системы из одного заданного состояния в другое или вообще из любого начального состояния в требуемое заданное при заданной ограниченной управляющей силе или мощности. Третьим примером оптимизации системы является обеспечение минимума затраты энергии на выполнение задачи управления при заданных внешних условиях. Четвертым примером может быть получение максимальной надежности работы аппаратуры системы при заданном ее весе. Пятым — достижение минимальной стоимости системы при заданном качестве выполнения ею определенной задачи управления и т. д.

Важно отметить четыре общих обстоятельства для любой оптимизации систем управления и регулирования.

При оптимизации системы в каждом отдельном случае должен быть правильно выбран *критерий оптимальности*, выраженный в той или иной математической форме. Например, при достижении максимальной точности системы критерием оптимальности может служить минимум ошибки регулирования, выраженный в виде интеграла

$$I = \int_0^{\infty} x^2(t) dt,$$

где $x(t)$ — отклонение регулируемой величины от требуемого значения. Величина I называется *функционалом*, так как она зависит от выбора функции $x(t)$ или, вернее, от неизвестного пока вида этой функции, который определится после расчета системы по минимуму функционала I . Критерием максимальной точности может являться также минимум статической ошибки при максимальном внешнем воздействии или минимум среднеквадратичной ошибки при случайном воздействии. В других случаях критерием будет минимум расхода энергии на выполнение управляемого процесса, максимум математического выражения какого-либо из показателей надежности и т. п. При этом всегда функционал конструируется таким образом, чтобы оптимальности системы соответствовал именно минимум его (а не максимум)

как в случае минимума, так и в случае максимума требуемого показателя качества системы. Это всегда можно сделать. Чаще всего критерий оптимальности задается в виде интегрального квадратичного функционала от нескольких функций:

$$I = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n c_i^2 y_i^2(t) dt, \quad \text{или} \quad I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n c_i^2 y_i^2(t) dt, \quad (12.120)$$

или вообще

$$I = \int_{l_1}^{l_2} C(y_i) dl = \int_{l_1}^{l_2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} y_i y_j dl, \quad (12.121)$$

где C — некоторая квадратичная форма от величин y_i , c_{ij} — весовые коэффициенты, l может быть не только временем, но и любой другой физической или даже условной комбинированной независимой переменной, а y_i может быть как любой физической величиной, так и любой количественной оценкой того или иного свойства создаваемой системы. Однако математическое выражение критериев оптимальности может иметь не только форму (12.121), но и любую другую форму:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(y_1, \dots, y_n) dt, \quad I = \int_{l_0}^{l_1} f(y_1, \dots, y_n) dl. \quad (12.122)$$

Функционал, минимум которого нужно получить, в общем случае может представлять любую желаемую комбинацию оценок различных качеств задаваемой системы. Заметим, что оптимальность системы по быстродействию является простейшим частным случаем для синтеза оптимальных систем, так как в этом случае в функционале (12.122) $f \equiv 1$, причем $I = t_1 - t_0$ (время перехода системы из начального состояния в новое, заданное при $t = t_1$).

Чаще всего в качестве подынтегральных функций в (12.122) используются положительно определенные квадратичные формы от фазовых координат x_i ($i = 1, \dots, n$) и управляющих величин u_q ($q = 1, \dots, k$), например, в виде

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{q,s=1}^k c_{qs} u_q u_s \right] dt. \quad (12.123)$$

Введя понятия критерия оптимальности, т. е., по сути дела, критерия качества системы, можно попытаться сформулировать задачу оптимального управления.

Пусть $x = \|x_i\|_{n \times 1}$ — матрица-столбец фазовых координат, а $u = \|u_q\|_{k \times 1}$ — матрица-столбец управляющих воздействий, которые принадлежат некоторому множеству $u(t) \in U$ и считаются допустимыми. Из множества допустимых управлений требуется выбрать такое, которое переводит управляемый объект из начального положения $x(t_0) = x^0$ в конечное $x(t_1) = x^1$ и минимизирует принятый функционал качества. Это управление и соответствующая ему траектория называются оптимальными. Однако эта формулировка является лишь возможной, распространенной, но не единственной (см., например, § 11.9).

В условии задачи оптимизации любого одного из качеств системы фигурируют некоторые ограничения других ее свойств в виде заданной управляю-

щей силы или мощности, заданного веса, заданных интервалов возможного изменения параметров регулятора и объекта и т. п. При достижении максимальной точности может быть задано ограничение стоимости, веса, внешних возмущений. При достижении максимальной надежности системы может быть, кроме указанных ограничений, задано ограничение ошибок системы, или пределы допустимого отклонения параметров реальных элементов системы от их номинальных (запроектированных) значений. Для практики учет ограничений при оптимизации системы чрезвычайно важен, так как всякая реальная система характеризуется ограниченной мощностью, инерционностью и всегда целым комплексом качеств (точность, устойчивость, быстродействие, надежность, стоимость, вес, простота эксплуатации и соответствие своему практическому назначению по целому ряду конкретных физико-химических свойств), которые надо соблюсти в определенных пределах при оптимизации одного, наиболее важного из них. Оптимизироваться может также не одно качество, а определенная комбинация качеств.

Рассмотрим основные виды ограничений.

1. Ограничения на фазовые координаты и управления

$$\left. \begin{aligned} |x_i| &\leq x_{i \max}, & i = 1, \dots, n, \\ |u_j| &\leq u_{j \max}, & j = 1, \dots, k. \end{aligned} \right\} \quad (12.124)$$

При отсутствии ограничений подобного рода говорят, что задача оптимизации относится к числу вариационных задач в открытой области. Введение подобных ограничений приводит к задаче в закрытой области, что значительно усложняет решение и часто делает невозможным использование классических вариационных методов (см. главу 23).

2. Ограничения типа голономных связей

$$G_k(x_1, \dots, x_n, t) = 0 \quad (k = 1, \dots, l), \quad (12.125)$$

где G_k — некоторые функции, которые в общем случае могут зависеть от времени.

3. Ограничения типа неголономных связей в виде дифференциальных уравнений

$$G_k(x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n; \dots) = 0 \quad (k = 1, \dots, l). \quad (12.126)$$

4. Изопериметрические ограничения в виде функционалов

$$I_k = \int_{t_0}^{t_1} G_k(t, x_1, \dots, x_n) dt \leq a_k \quad (k = 1, \dots, l), \quad (12.127)$$

где в правой части находятся некоторые постоянные числа, которые не должны превосходить. В качестве a_k могут фигурировать такие величины, как, например, предельная температура нагревания, количество выделившегося тепла, расход энергии или рабочего тела и т. п.

Отличие синтеза оптимальной системы от синтеза системы по заданным показателям качества, рассмотренного ранее, состоит в том, чтобы добиться не просто требуемых показателей, а наилучших показателей, т. е. «выжать» из системы все, что она может дать по определенному виду качества, наиболее важному для этой системы, при соблюдении заданных требований по всем необходимым другим ее свойствам. Поэтому задача оптимизации систем является в существе своем задачей вариационного типа, когда требуется подобрать программу и закон регулирования, а также и параметры системы управления (регулятора) таким образом, чтобы получить минимум функционала, который в данном случае служит критерием оптимальности системы.

При оптимизации систем управления и регулирования необходимо различать два класса задач, решаемых последовательно: *оптимизацию программы регулирования* (или *управления*) и *оптимизацию закона регулирования* (или *управления*). Первый из этих классов задач возникает не всегда, а лишь тогда, когда процессы в управляемой системе (например, движение управляемого объекта, ход физического или химического процесса) задаются определенной программой изменения регулируемой величины во времени или же когда выбирается определенная связь между переменными (координатами или другими физическими величинами), которая должна соблюдаться независимо от момента времени, другими словами, когда имеется либо временная, либо параметрическая программа управления.

Примером временной программы управления может служить программа изменения угла тангажа во времени при подъеме или спуске летательного аппарата. Примером параметрической программы управления могут служить методы автоматического наведения или самонаведения, например, по принципу параллельного сближения и др.

В случае оптимизации той или иной программы управления она не задается, а отыскивается в результате расчета по какому-либо критерию оптимальности, например по минимуму затраты энергии при желаемом маневре летательного аппарата в процессе его движения или при сближении двух аппаратов в процессе наведения.

Вторым самостоятельным классом задач, как указывалось, является оптимизация закона регулирования, т. е. наилучшее построение регулятора (системы управления) для осуществления заданной программы управления. Эта задача может иметь место во всех автоматических системах независимо от того, оптимизировалась ли программа управления или она была иначе задана, в том числе и в случае простого поддержания постоянного значения регулируемой величины и в случае любой обычной следящей системы. При оптимизации закона регулирования, как и обычно, рассматриваются уравнения динамики системы в отклонениях от требуемых величин (от программы).

В настоящее время одной из основных проблем в оптимальном синтезе стала проблема весовых коэффициентов в функционалах качества типа (12.121) или (12.123). Это связано с тем, что попытка введения более или менее сложного функционала качества, учитывающего весь комплекс требований к системе регулирования (точность, расход энергии, надежность, вес, технологичность и т. п.), неизбежно приводит к необходимости сопоставить между собой отдельные требования, что и должно делаться посредством весовых коэффициентов. Однако назначение этих коэффициентов пока осуществляется произвольно и, в лучшем случае, по некоторым экспертным оценкам, что иногда дает им субъективный характер.

В связи с необходимостью удовлетворения в процессе синтеза многим различным требованиям возникла трактовка оптимального синтеза как такого построения системы регулирования или управления, при котором все необходимые требования могут быть выполнены простейшим образом [10]. В качестве критерия простоты вводится, например, функционал в частотной области

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \omega^{2r} |W(j\omega)|^2 d\omega, \quad (12.128)$$

где r — степень астатизма системы, а $W(j\omega)$ — частотная передаточная функция разомкнутого канала управления.

В статических системах ($r = 0$) значение (12.128) совпадает с эквивалентной полосой пропускания разомкнутой системы, что разъясняет физи-

ческую сущность введенного функционала. Чем меньше требуется полоса пропускания при выполнении всех качественных требований (точность, запас устойчивости, быстродействие и т. п.), тем проще реализация этой системы. В [10] показано, в частности, что приведенный в § 12.6 метод синтеза эвристическим путем приводит к минимизации функционала (12.128). Подобный метод синтеза может быть назван *оптимальным синтезом по заданным качественным показателям*.

Существуют различные способы оптимизации или, иначе говоря, методы синтеза оптимальных систем, как аналитические, так и машинные. В основе этих способов лежат математические вариационные методы. Каждый из них сопровождается различными вариантами приемов доведения решения задачи до конца в числовом виде. Оказывается, что это последнее представляет во многих случаях особенно трудную задачу даже при наличии решения в принципиальном виде. Поэтому чаще всего (во всяком случае для систем высокого порядка) приходится применять вычислительные машины с использованием таких вычислительных методов, как метод градиента, метод наискорейшего спуска, и других специально разрабатываемых приемов. Для некоторых простейших задач имеются аналитические решения, иногда с привлечением изображений на фазовой плоскости. Заметим, что ранее (см. § 11.9) уже был рассмотрен метод синтеза линейной оптимальной системы при случайных воздействиях по минимуму среднеквадратичной ошибки (задача Винера). Поэтому в дальнейшем изложении эта задача уже фигурировать не будет.

Оптимальные законы регулирования при учете реально имеющихся ограничений часто получаются нелинейными (см. главу 23).

§ 12.8. Использование классических вариационных методов

Пусть в качестве критерия качества рассматривается функционал вида

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n; u_1, \dots, u_k; \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_k) dt \quad (12.129)$$

при заданных граничных условиях $x_i(t_0) = x_i^0$ и $x_i(t_1) = x_i^1$ ($i = 1, \dots, n$). В подынтегральное выражение (12.129) здесь не входят производные выше первой от координат x_i и управлений u_j . Если не наложено никаких ограничений, то x_i и u_j принадлежат открытым областям.

Решение задачи в этом случае дается *уравнениями Эйлера*, записанными для всех координат и всех управлений, входящих в (12.129):

$$\left. \begin{aligned} F'_{x_i} - \frac{d}{dt} F'_{\dot{x}_i} &= 0 \quad (i = 1, \dots, n), \\ F'_{u_j} - \frac{d}{dt} F'_{\dot{u}_j} &= 0 \quad (j = 1, \dots, k), \end{aligned} \right\} \quad (12.130)$$

где F' — частные производные от подынтегральной функции (12.129) по соответствующим переменным. Это решение определяет пучок интегральных кривых (*экстремалей*) $x_i(t)$, из которых необходимо выбрать траекторию, проходящую через заданные начальную и конечную точки.

При этом функции x_i и u_j должны принадлежать к так называемому классу функций C_{2m} , т. е. должны иметь $2m$ непрерывных производных. В рассматриваемом случае (12.129) наивысшая производная является первой ($m = 1$) и функции x_i и u_j должны иметь две непрерывные производные.

Кроме того, для установления факта минимизации функционала (12.129) необходимо удостовериться, что вдоль экстремалей выполняются условия

$F''_{x_i x_i} \geq 0$ и $F''_{u_j u_j} \geq 0$. Эти условия аналогичны требованию положительности второй производной в точке минимума функции $y = f(x)$.

Однако задача без ограничений не имеет смысла применительно к системам регулирования и управления. Введем ограничения в виде связей типа (12.125) или (12.126). Тогда в уравнениях (12.130) вместо функции F должна использоваться функция

$$H = F + \sum_{k=1}^l \lambda_k(t) G_k, \quad (12.131)$$

где $\lambda_k(t)$ — произвольные множители Лагранжа, в общем случае зависящие от времени t . Это будет вариационная задача на так называемый *условный экстремум* (т. е. при наличии наложенных связей).

При учете связей в виде дифференциальных уравнений класс функций C_{2m} должен определяться по наивысшей производной выражения (12.131).

Если рассматривается одна переменная $x(t)$, но функционал включает в себя производные $x(t)$ более высоких порядков и имеет, например, вид

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x}, \dots, x^{(m)}; u, \dot{u}) dt, \quad (12.132)$$

то уравнения Эйлера будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} F'_x - \frac{d}{dt} F'_x + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} F'_{x^{(n)}} &= 0, \\ F'_u - \frac{d}{dt} F'_u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.133)$$

Как и ранее, при наличии связей вместо функции F должна рассматриваться функция H , определяемая (12.131). Класс функций C_{2m} определяется по наивысшей производной (12.131) m -го порядка.

Отметим, что решение уравнений (12.130) или (12.133) часто приводит к корням характеристического уравнения, половина которых лежит в левой, а половина — в правой полуплоскости. Это наблюдается при использовании квадратичных функционалов и конечном времени регулирования $T = t_1 - t_0$.

Для устранения неустойчивости, которая получится в случае присоединения подобного регулятора к системе (если, конечно, не обеспечивается его отключение после завершения требуемого процесса перевода из одного состояния в другое), можно, например, действовать аналогично изложенному в § 11.9 и отбросить в решении те полюсы передаточной функции, которые лежат в правой полуплоскости. Это соответствует, вообще говоря, переходу к функционалу вида

$$I = \int_0^{\infty} F dt, \quad (12.134)$$

т. е. бесконечному времени регулирования.

В этом случае искомые функции должны принадлежать к классу C_m , причем производная m -го порядка может иметь разрыв первого рода в точке $t = 0$.

При использовании изопериметрических ограничений типа (12.127) задача оптимизации решается также в соответствии с уравнениями (12.131), но должна быть использована функция

$$H = F + \sum_{k=1}^l \lambda_k G_k, \quad (12.135)$$

где λ_h — произвольные постоянные множители Лагранжа. В этом случае для определения произвольных постоянных и множителей λ_h к граничным условиям должна добавляться совокупность условий (12.127).

Рассмотрим простейшие примеры. Пусть объект управления описывается уравнением

$$D(p)y = (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)y = u, \quad (12.136)$$

где $p = \frac{d}{dt}$.

Цель управления заключается в переводе объекта из состояния $y = 0$ при $t = 0$ в состояние $y = y_0$ при $t = T$. В качестве критерия качества прием минимизация функционала

$$I = \int_0^T [(y - y_0)^2 + \mu^2 u^2] dt, \quad (12.137)$$

где μ — некоторый весовой коэффициент.

Для функции (12.131)

$$H = (y - y_0)^2 + \mu^2 u^2 + \lambda [D(p)y - u]$$

определим производные

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= 2\mu^2 u - \lambda, & \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= 2(y - y_0) + \lambda a_n, & \frac{\partial H}{\partial y} &= \lambda a_{n-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial H}{\partial y^{(n)}} &= \lambda a_0. \end{aligned} \right\} \quad (12.138)$$

Далее в соответствии с (12.133) находим $\lambda = 2\mu^2 u$, а также

$$2y + 2\mu^2 [a_n - a_{n-1}p + \dots + (-1)^n a_0 p^n] = 2y_0. \quad (12.139)$$

Совместное решение (12.136) и (12.139) дает характеристическое уравнение

$$1 + \mu^2 (a_n + \dots + a_0 p^n) [a_n - a_{n-1}p + \dots + (-1)^n a_0 p^n] = 0. \quad (12.140)$$

Это уравнение содержит только четные степени p . Поэтому, если половина корней лежит в левой полуплоскости, то половина — в правой.

Упростим задачу и положим $D(p) = a_0 p + a_1$. Тогда получим характеристическое уравнение в виде

$$1 + \mu^2 (a_1 + a_0 p) (a_1 - a_0 p) = 1 + \mu^2 (a_1^2 - a_0^2 p^2) = 0.$$

Решение его дает корни

$$p_{1,2} = \pm \frac{1}{\mu a_0} \sqrt{1 + \mu^2 a_1^2} = \pm \alpha. \quad (12.141)$$

Теперь можно записать выражение для управляемой величины:

$$y(t) = y_0 1(t) + C_1 e^{-\alpha t} 1(t) + C_2 e^{\alpha t} 1(t), \quad (12.142)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Из начального и конечного условий можно определить, что $C_1 + C_2 = -y_0$, а также

$$C_1 = -\frac{y_0 e^{\alpha T}}{e^{\alpha T} - e^{-\alpha T}}, \quad C_2 = +\frac{y_0 e^{-\alpha T}}{e^{\alpha T} - e^{-\alpha T}}.$$

Если $T \rightarrow \infty$, то $C_2 = 0$, а $C_1 = -y_0$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= y_0 (1 - e^{-\alpha t}) \cdot 1(t), \\ \dot{y}(t) &= y_0 \alpha e^{-\alpha t} \cdot 1(t), \\ u(t) &= a_1 y(t) + a_0 \dot{y}(t) = y_0 [a_1 + (a_0 \alpha - a_1) e^{-\alpha t}] \cdot 1(t). \end{aligned} \right\} \quad (12.143)$$

Отметим, что принятие более сложного функционала

$$I = \int_0^T [(y - y_0)^2 + \tau^2 \dot{y}^2 + \mu^2 u^2] dt \quad (12.144)$$

не усложняет исследования и дает корни вместо (12.141) в виде

$$p_{1,2} = \pm \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \mu^2 a_1^2}{\tau^2 + \mu^2 a_0^2}}. \quad (12.145)$$

Пусть теперь в рассматриваемом примере функционал не содержит управляющей величины и имеет, например, вид

$$I = \int_0^T [(y - y_0)^2 + \tau^2 \dot{y}^2] dt. \quad (12.146)$$

Тогда для функции (12.131)

$$H = (y - y_0)^2 + \tau^2 \dot{y}^2 + \lambda [D(p) y - u]$$

имеем $H'_u = -\lambda$ и $H'_u = 0$. Отсюда следует, что $\lambda \equiv 0$. Тогда из уравнения Эйлера

$$H'_y - \frac{d}{dt} H'_y = 2y - 2\tau^2 \dot{y} - 2y_0 = 0$$

получаем характеристическое уравнение и корни:

$$4 - \tau^2 p^2 = 0, \quad p_{1,2} = \pm \frac{1}{\tau} = \pm \alpha. \quad (12.147)$$

Уравнение экстремали при $T \rightarrow \infty$

$$y = y_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot 1(t) \quad (12.148)$$

не зависит от вида полинома $D(p)$. Подобный результат был получен другим способом ранее в § 8.8, когда экстремаль была решением характеристического уравнения $1 + \tau p = 0$.

Однако при отсутствии ограничений на вид $D(p)$ реализация экстремали (12.148) может привести к физически не осуществимым регуляторам. Действительно, из (12.136) следует, что регулятор должен обеспечить управляющее воздействие вида

$$u(t) = a_n y(t) + a_{n-1} \dot{y}(t) + \dots + a_0 y^{(n)}(t).$$

Однако уже первая производная (12.148) имеет при $t = 0$ разрыв первого рода, а вторая и следующие производные содержат слагаемые типа δ -функции и ее производных:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= y_0 \alpha \cdot e^{-\alpha t} \cdot 1(t), \\ \ddot{y}(t) &= -y_0 \alpha^2 e^{-\alpha t} \cdot 1(t) + y_0 \alpha \delta(t), \\ \dddot{y}(t) &= y_0 \alpha^3 e^{-\alpha t} \cdot 1(t) - y_0 \alpha^2 \delta(t) + y_0 \alpha \frac{d}{dt} \delta(t), \\ &\dots \end{aligned}$$

Поэтому физическая реализация возможна для степени $D(p)$ не выше первой, но даже и в этом случае регулятор должен быть практически безынерционным.

Получение физически не реализуемого регулятора произошло вследствие отсутствия ограничений или учета управления в принятом функционале качества (12.146). Для получения возможности применения инерционных регуляторов в функционал качества можно вводить кроме управления и его производные. Однако в этом случае смысл функционала качества становится неясным.

Рассмотрим теперь замкнутую систему, у которой объект управления описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dt} = ay + cu \quad (12.149)$$

с начальным условием $y(0) = y_0$. Требуется определить оптимальное управление $u = -W_{\text{пер}}(p)y$, переводящее систему в состояние $y = 0$ с бесконечным временем регулирования и минимизирующее функционал

$$I = \int_0^{\infty} (y^2 + \tau^2 \dot{y}^2 + \mu^2 u^2) dt. \quad (12.150)$$

Рассматривая функцию (12.131)

$$H = y^2 + \tau^2 \dot{y}^2 + \mu^2 u^2 + \lambda (\dot{y} - ay - cu)$$

и используя уравнения (12.130) или (12.132), а также уравнение объекта (12.149), можно получить характеристическое уравнение замкнутой оптимальной системы в виде

$$(c^2 \tau^2 + \mu^2) p^2 - (c^2 + \mu^2 a^2) = 0. \quad (12.151)$$

Корень, лежащий в левой полуплоскости,

$$p_1 = -\alpha = -\sqrt{\frac{c^2 + \mu^2 a^2}{\mu^2 + c^2 \tau^2}}.$$

Уравнение экстремали, проходящей через граничные точки,

$$y = y_0 - y_0 (1 - e^{-\alpha t}) \cdot 1(t). \quad (12.152)$$

Предварительно определив

$$\dot{y} = -\alpha e^{-\alpha t} \cdot 1(t),$$

из (12.149) можно найти, что управление должно изменяться по закону

$$u = -c^{-1} (\dot{y} - ay) = y_0 c^{-1} [-(\alpha + a) e^{-\alpha t} \cdot 1(t) - a \{1 - 1(t)\}]. \quad (12.153)$$

Приняв $e^{-\alpha t}$ за неизвестную, входящую в два уравнения (12.152) и (12.153), можно записать условие их совместности:

$$\begin{vmatrix} y - y_0 [1 - 1(t)] & y_0 1(t) \\ u + y_0 a c^{-1} [1 - 1(t)] & (\alpha + a) y_0 c^{-1} \cdot 1(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получается уравнение регулятора

$$u = -\frac{\alpha + a}{c} y + \frac{\alpha}{c} y_0 [1 - 1(t)]. \quad (12.154)$$

Первое слагаемое в правой части (12.154) соответствует собственно искомого оптимальному закону регулирования

$$u = -W_{\text{пер}}(p)y = -\frac{\alpha + a}{c} y. \quad (12.155)$$

Второе слагаемое в правой части (12.154) соответствует постоянному значению управления $u = u_0 = \alpha y_0 c^{-1}$, которое необходимо искусственно создать на выходе регулятора, чтобы в замкнутой системе до момента времени $t = 0$ (т. е. при $t < 0$) управляемая величина была бы равна заданному значению y_0 . Как следует из (12.154), при $t = 0$ это постоянное управление снимается и система начнет приходить в согласованное положение.

Если при $t < 0$ рассматриваемая система была выключена и имела рассогласование $y = y_0$, то слагаемое u_0 не нужно и формула (12.154) сводится к (12.155).

Рассмотренный пример относится к так называемому аналитическому конструированию регуляторов, которое будет изложено более подробно в § 12.10.

§ 12.9. Динамическое программирование

Метод динамического программирования был разработан Р. Беллманом [5]. Он применим не только для решения задач оптимизации систем управления, но и для самых различных технических и экономических задач. При обосновании этого метода предполагается, что функционал качества является дифференцируемой функцией фазовых координат системы. Заметим, что это условие выполняется не всегда.

Пусть система описывается совокупностью n уравнений, записанных для фазовых координат:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_n) \quad (i=1, \dots, n), \quad (12.156)$$

где f_i — некоторые, в общем случае нелинейные функции фазовых координат и управлений. Число последних для общности принято равным числу фазовых координат.

Уравнения (12.156) можно представить также в матричной форме:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (12.157)$$

где x и u — матрицы-столбцы фазовых координат и управлений размером $n \times 1$.

В качестве критерия оптимальности примем минимум функционала

$$I = \int_0^T f_0(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_n) dt. \quad (12.158)$$

Функции f_0 и f_i , вообще говоря, могут содержать в явном виде текущее время t . Однако это не меняет принципиальной постановки задачи.

Целью управления является перевод системы из состояния $x_i = a_i$ при $t = 0$ в состояние $x_i = b_i$ при $t = T$ ($i = 1, \dots, n$). Такая задача управления называется *терминальной*, и она соответствует определению в фазовом пространстве оптимальной траектории с закрепленными концами.

Будем считать, что фазовые координаты и управления должны принадлежать некоторым замкнутым (ограниченным) пространствам, т. е.

$$\left. \begin{aligned} x(t) \in X, \quad x(0) = a \in G_0, \quad x(T) = b \in G_T, \\ u(t) \in U, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \quad (12.159)$$

Можно несколько расширить цель управления и считать, что конец траектории должен только находиться в заданной области $x(T) \in G_b$ при $t = T$. Это будет *задача со свободным концом траектории*.

Вместо исходной можно решать более общую задачу отыскания оптимального управления для произвольной временной точки $0 < t_0 < T$

и произвольной точки в фазовом пространстве $x(t_0) \in X_0$ в смысле минимума функционала

$$I_0 = \int_{t_0}^T f_0(x, u) dt. \quad (12.160)$$

Минимум функционала (12.160) зависит от начального момента времени t_0 и начальной точки $x_0 = x(t_0)$. Обозначим этот минимум через $\psi(x_0)$. Функция $\psi(x_0)$ для некоторой совокупности фазовых координат $x(t_0)$ может, вообще говоря, не существовать, так как может не существовать допустимого управления, удовлетворяющего (12.156).

Если найдены функция $\psi(x_0)$ и требуемое управление $u(t, x_0)$, то, положив $t_0 = 0$ и $x_0 = a$, где a — матрица-столбец начальных условий, мы получим решение исходной задачи.

Принцип оптимальности. Примем начальные условия: при $t = t_0$ $x(t_0) = a_0 \in G$, оптимальное управление $u(t, a_0)$ реализует минимум функционала (12.160), а $x(t, a_0)$ — оптимальная траектория в фазовом пространстве. Выберем произвольный момент времени t_1 , принадлежащий интервалу $t_0 - T$, и обозначим через a_1 точку $a_1 = x(t_1, a_0)$ на оптимальной траектории $x(t, a_0)$. Принцип оптимальности гласит следующее.

Если принять значения t_1 и a_1 за начальные, то на интервале $t_1 - T$ оптимальное управление $u(t, a_1)$ совпадет с оптимальным управлением $u(t, a_0)$ и, следовательно, участок оптимальной траектории $x(t, a_0)$ для задачи с начальной точкой (t_0, a_0) на интервале $t_1 - T$ совпадет с оптимальной траекторией для задачи с начальной точкой (t_1, a_1) . Доказательство достаточно очевидно. Оно исходит из того, что значение функционала качества на участке $t_1 - T$ должно быть одинаковым при управлениях $u(t, a_1)$ и $u(t, a_0)$. Если бы это было не так и значение функционала на этом интервале времени было бы, например, меньше для управления $u(t, a_1)$, то управление $u(t, a_0)$ можно было бы улучшить, заменив его на интервале $t_1 - T$ управлением $u(t, a_1)$, что противоречит принятому предположению об оптимальности управления $u(t, a_0)$.

Итак, в соответствии с изложенным введем функциональное уравнение

$$\psi[T, x(t_0)] = \min_{u \in U} \int_{t_0}^T f_0(x, u) dt, \quad (12.161)$$

на основании которого может быть найдено оптимальное управление $u(x)$.

Если на промежутке $t_0 - T$ выбрать промежуточную точку t_1 , то на основании принципа оптимальности

$$\psi[T, x(t_0)] = \min_{u \in U} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u) dt + \psi[T, x(t_1)] \right\}. \quad (12.162)$$

Функция ψ и оптимальное управление обычно не могут быть найдены аналитическим путем. Для этой цели применяются приближенные методы с использованием вычислительных машин. Рассмотрим идею приближенного расчета.

Пусть t — фиксированное значение времени, а Δt — малый отрезок времени, причем $0 < t + \Delta t < T$. Тогда

$$\psi(t, x) = \min_u \left\{ \int_t^{t+\Delta t} f_0(x, u) d\tau + \int_{t+\Delta t}^T f_0(x, u) d\tau \right\}, \quad (12.163)$$

где функции $x(\tau)$ и $u(\tau)$ связаны условиями (12.157).

Вид управления $u(\tau)$ на интервале $t + \Delta t$, T не оказывает влияния на первое слагаемое в правой части (12.163). Поэтому на рассматриваемом интервале времени следует так выбрать управление, чтобы минимизировать второе слагаемое в правой части (12.163) при выполнении условий

$$u(\tau) \in U, \quad x(\tau) \in X, \quad x(T) \in G_T, \quad t + \Delta t < \tau < T. \quad (12.164)$$

На основании принципа оптимальности перепишем (12.163) следующим образом:

$$\psi(t, x) = \min_u \left\{ \int_t^{t+\Delta t} f_0(x, u) d\tau + \psi[t + \Delta t, x(t + \Delta t)] \right\}. \quad (12.165)$$

На интервале $t, t + \Delta t$ управление $u(\tau)$ должно быть выбрано так, чтобы минимизировать правую часть (12.165). От этого выбора зависят оба слагаемых правой части.

Заменяем на малом интервале Δt матричную функцию $f(x, u)$ и функцию $f_0(x, u)$ их фиксированными значениями в точке t , а производную x отношением конечных разностей $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ и Δt . Тогда вместо (12.165) можно записать приближенно

$$\psi(t, x) \approx \min_u \{f_0(x, u) \Delta t + \psi(t + \Delta t, x + \Delta x)\}. \quad (12.166)$$

Кроме того, имеем

$$x + \Delta x = x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \cdot f[x(t), u(t)] = x + \Delta t \cdot f(x, u). \quad (12.167)$$

• На основании (12.166) и (12.167) можно найти приближенное значение $\psi(t, x)$. Для конечного момента времени T и любых $x \in G_T$ следует, что $\psi(T, x) = 0$. Поэтому вычисление $\psi(t, x)$ удобно начинать с конца, т. е. с момента времени $t = T$ и области G_T . На первом шаге расчета рассматривается момент времени $t = T - \Delta t$. При $t + \Delta t = T$ величина $x + \Delta x$ вследствие краевого условия принадлежит множеству G_T . Подставляя в (12.166) и (12.167) значение $t = T - \Delta t$ и учитывая, что $\psi(T, x) = 0$, имеем

$$\left. \begin{aligned} \psi(T - \Delta t, x) &= \min_u \{f_0[x, u(T - \Delta t)] \cdot \Delta t, \\ x + \Delta x &= x + \Delta t \cdot f[x, u(T - \Delta t)] \}. \end{aligned} \right\} \quad (12.168)$$

Далее фиксируется произвольное значение $x \in X$. Минимум правой части первого равенства (12.168) вычисляется по тем значениям $u(T - \Delta t)$ из множества U , для которых точка $x + \Delta x$, определяемая вторым равенством (12.168), соответствует значению $b \in G_T$. Если для какой-либо точки $\tilde{x} \in X$ таких значений $u(T - \Delta t)$ не существует, то функция $\psi(T - \Delta t, x)$ не определена в точке x .

Таким образом, по значению функции $\psi(T, x)$ можно приближенно определить значения функции $\psi(T - \Delta t, x)$ на некотором подмножестве X_1 из X . Так как на интервале $T - \Delta t, T$ управление $u(\tau)$ принято постоянным и равным $u(T - \Delta t)$, то одновременно с нахождением функции $\psi(T - \Delta t, x)$ приближенно найдено управление $u(T - \Delta t, x)$, которое реализует эту функцию.

На втором шаге рассматривается момент времени $t = T - 2\Delta t$. Из (12.166) и (12.167) можно получить

$$\left. \begin{aligned} \psi(T - 2\Delta t, x) &= \min_u \{f_0[x, u(T - 2\Delta t)] \Delta t + \psi(T - \Delta t, x + \Delta x)\}, \\ x + \Delta x &= x + \Delta t \cdot f[x, u(T - 2\Delta t)]. \end{aligned} \right\} \quad (12.169)$$

Далее фиксируется произвольная точка $x \in X$. Минимум правой части (12.169) вычисляется по тем значениям u ($T - 2\Delta t$) $\in U$, для которых точка $x + \Delta x$, определяемая вторым равенством (12.169), принадлежит подмножеству X_1 . Находится значение функции ψ ($T - 2\Delta t, x$) на некотором подмножестве X_2 из X_1 . На интервале $T - 2\Delta t, T - \Delta t$ управление $u(\tau)$ принимается постоянным и равным значению u ($T - 2\Delta t$), реализующим ψ ($T - 2\Delta t, x$). На интервале $T - \Delta t, T$ управление, как функция x ($T - \Delta t$), было определено после первого шага. Так как x ($T - \Delta t$) связано с x ($T - 2\Delta t$) вторым равенством (12.169), то после двух шагов оказывается определенным управление u ($T - 2\Delta t, x$) на интервале времени $T - 2\Delta t, T$. Это будет кусочно-постоянная функция с интервалами постоянства, равными Δt .

Последующие шаги рассчитываются аналогично. Если весь интервал управления T разбит на m шагов, то после m -го шага определяется функция ψ ($0, x$) на подмножестве X_m из X и управление u ($0, x$), как кусочно-постоянная функция с интервалами постоянства Δt . Если начальная точка x (0) = a принадлежит подмножеству X_m , для которого определена функция ψ ($0, x$), то, положив $x = a$, получаем ψ ($0, a$) — минимум функционала (12.161) исходной задачи управления и u ($0, a$) = u^* (τ) — оптимальное управление. Подставляя затем оптимальное управление в (12.156) или (12.157) и решая систему исходных дифференциальных уравнений, можно определить оптимальную траекторию движения x^* (τ).

Если x (0) = a не принадлежит подмножеству X_m , то задача не имеет решения. Надо учитывать при этом, что вся задача решалась приближенно, в том числе найдено было приближенно и подмножество X_m .

При использовании динамического программирования число шагов должно быть достаточно большим, чтобы получить приемлемую точность решения. В результате большой трудоемкости использование этого метода оказывается невозможным без применения вычислительных машин.

Серьезным недостатком метода является то, что с ростом размерности задачи (порядка n дифференциальных уравнения) весьма серьезно возрастают требования к быстродействию и объему памяти вычислительных машин. Действительно, на k -м шаге вычисляется функция ψ ($T - k\Delta t, x$), зависящая от переменных $x_1, \dots, x_n$ и определенная на множестве X_k . Ее надо хранить в памяти машины до тех пор, пока не будет вычислена функция ψ [$T - (k+1)\Delta t, x$]. Это значит, что в памяти машины должна храниться таблица, в которой записаны значения ψ ($T - k\Delta t, x$) для различных точек из X_k . Этих точек оказывается много, так как таблица должна достаточно точно и равномерно определять функцию ψ ($T - k\Delta t, x$). Кроме того, в памяти машины приходится запоминать кусочно-постоянную в общем случае n -мерную функцию управления u ($T - k\Delta t, x$), зависящую от $x_1, \dots, x_n$ и вычисленную при значениях аргумента τ с интервалом Δt .

В сложных системах объем вычислительных операций при реализации приближенного решения задачи динамического программирования оказывается непосильным даже для самых крупных и быстродействующих современных вычислительных машин.

Уравнение Беллмана. Введем предположение, что функция ψ имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам: $t, x_1, \dots, x_n$. Тогда в равенстве (12.166) функцию ψ ($t + \Delta t, x + \Delta x$) можно представить следующим образом:

$$\psi(t + \Delta t, x + \Delta x) = \psi(t, x) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} \right] \Delta t + \delta(\Delta t) \Delta t. \quad (12.170)$$

Здесь $\delta(\Delta t)$ — величина более высокого порядка малости, чем Δt . Входя-

щие в правую часть (12.170) производные $\dot{x}_i$ удовлетворяют (12.156). Поэтому

$$\psi(t + \Delta t, x + \Delta x) = \psi(t, x) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cdot f_i \right] \Delta t + \delta(\Delta t) \Delta t. \quad (12.171)$$

Подставим (12.171) в (12.166). Функция $\psi(t, x)$ не зависит от управления $u(t)$ в момент t . Поэтому ее можно вынести за знак минимума. Деля полученное равенство на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, имеем

$$\min_u \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} f_i[x(t), u(t)] + f_0[x(t), u(t)] \right\} = 0 \quad (12.172)$$

при условиях

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = a, \quad x(T) = b \in G_T, \quad x(t) \in X, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (12.173)$$

Уравнение (12.172) и представляет собой уравнение Беллмана с краевым условием $\psi(T, x) = 0$. Сумма первых двух членов (12.172) есть полная производная функции $\psi(t, x)$ по времени. Поэтому уравнение Беллмана можно записать в другом виде:

$$\min_u \left\{ \frac{d\psi}{dt} + f_0[x(t), u(t)] \right\} = 0. \quad (12.174)$$

Требование непрерывной дифференцируемости функции $\psi(t, x)$ является весьма жестким и во многих задачах не выполняется. В. Г. Болтянский показал [18], что можно ослабить требования к функции $\psi(t, x)$. В ней допускаются разрывы частных производных на некотором множестве точек.

Заметим, что если функции f_0 и f_i не зависят явно от времени, то решение уравнения (12.174) — функция ψ и оптимальное управление u , которое реализует минимум в (12.174), тоже не зависит явно от времени, т. е. $\psi = \psi(x)$ и $u = u(x)$, однако в общем случае $\psi(t, x)$ и $u = u(t, x)$.

Аналитическое нахождение функции ψ в явной форме удастся только в некоторых частных случаях. Один из таких случаев рассмотрен в следующем параграфе.

§ 12.10. Аналитическое конструирование регуляторов

Так называемая задача аналитического конструирования регуляторов была сформулирована и решена А. М. Летоным [77]. Эта задача развивалась также в работах А. А. Красовского [60] и Н. Н. Красовского [62, 63].

Скалярное управление. Пусть имеется стационарный объект, уравнения которого для фазовых координат, записанные в матричной форме, имеют вид

$$\dot{x} = Ax + Cu. \quad (12.175)$$

Здесь $x = \|x_i\|_{n \times 1}$ — матрица-столбец фазовых координат, $A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$ — квадратная матрица коэффициентов, $C = \|c_i\|_{n \times 1}$ — матрица-столбец коэффициентов, u — скаляр. Требуется определить оптимальное управление $u = u(x_1, \dots, x_n)$, минимизирующее функционал качества

$$I = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n b_i x_i^2 + \alpha u^2 \right) dt = \int_0^\infty V dt \quad (b_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \alpha > 0). \quad (12.176)$$

Задача управления заключается в переводе системы из начального состояния $x_i = a_i$ ($i = 1, \dots, n$) при $t = 0$ в конечное $x_i = 0$ при $t \rightarrow \infty$. Из формулировки задачи следует, что система должна быть при этом асимптотически устойчива.

В рассматриваемом случае уравнение Беллмана (12.172) имеет вид

$$\min_u \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + c_i u \right) + \sum_{j=1}^n b_j x_j^2 + \alpha u^2 \right] = 0. \quad (12.177)$$

Оказывается, что функция ψ , входящая в (12.177), является функцией Ляпунова, а функция V в функционале (12.176) — ее полной производной, т. е.

$$\frac{d\psi}{dt} = -V,$$

чем решается вопрос об устойчивости синтезируемой системы (см. ниже § 17.2).

Так как на управление u ограничения не накладываются и $\alpha > 0$, то минимум в (12.177) достигается в точке, где обращается в нуль производная по u , т. е. при

$$u = -\frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i}. \quad (12.178)$$

Подставим это значение в (12.177). В результате имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 - \frac{1}{4\alpha} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} c_i \right)^2 = 0. \quad (12.179)$$

Это — нелинейное уравнение в частных производных относительно функции ψ . Будем искать решение этого уравнения в виде квадратичной формы от фазовых координат:

$$\psi = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \gamma_{kr} x_k x_r = x' \Gamma x. \quad (12.180)$$

Здесь $\Gamma = \|\gamma_{kr}\|_{n \times n}$ — квадратная матрица коэффициентов, удовлетворяющая критерию Сильвестра

$$\gamma_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} \end{vmatrix} > 0, \quad (12.181)$$

причем матрица может быть принята симметричной, т. е. $\gamma_{kr} = \gamma_{rk}$. Функция (12.180) удовлетворяет граничному условию, так как при $x_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) имеем $\psi = 0$.

Дифференцируя (12.180), имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 2 \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} x_k.$$

Подставляя полученные выражения в (12.179), приходим к уравнению вида

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ik} a_{ij} x_k x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 - \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_i \gamma_{ik} x_k \right)^2 = 0. \quad (12.182)$$

В левой части (12.182) находится квадратичная форма переменных $x_1, \dots, x_n$. Она будет тождественно равна нулю при равенстве нулю всех ее коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\gamma_{ik}a_{ij} + \gamma_{ij}a_{ik}) - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n c_i \gamma_{ik} \sum_{i=1}^n c_i \gamma_{ij} &= 0 \quad (j \neq k), \\ 2 \sum_{i=1}^n \gamma_{ik}a_{ik} + b_k - \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{i=1}^n c_i \gamma_{ik} \right)^2 &= 0 \quad (j = k) \end{aligned} \right\} \quad (12.183)$$

($j, k = 1, \dots, n$).

В результате получена система из $0,5n(n+1)$ алгебраических уравнений, содержащих такое же количество неизвестных γ_{ik} (при учете равенства коэффициентов $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$).

После нахождения неизвестных коэффициентов γ_{ik} из (12.178) можно определить оптимальное управление

$$u = -\frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n d_k x_k, \quad d_k = \sum_{i=1}^n c_i \gamma_{ik}. \quad (12.184)$$

Аналогичный результат может быть получен при использовании классических методов вариационного исчисления (§ 12.8).

Решение обратной задачи. В полученных формулах для оптимального управления конструктору необходимо формировать управление в функции всех фазовых координат, так как в (12.184) все коэффициенты $d_k \neq 0$.

Если конструктор может использовать ограниченное число фазовых координат, то часть коэффициентов d_k в (12.184) должна быть тождественно равна нулю. В этом случае для формирования оптимального управления можно воспользоваться решением обратной задачи и отыскать допустимую форму функционала качества при неполном управлении. Для этого функционал качества (12.176) представим в измененном виде:

$$I = \alpha I_1 = \alpha \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n l_i x_i^2 + u^2 \right) dt, \quad l_i = \alpha^{-1} b_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (12.185)$$

Минимизация функционала I_1 вместо I не меняет задачи.

Будем считать отличные от нуля коэффициенты d_k известными числами, а коэффициенты l_i — неизвестными. Тогда совокупность уравнений (12.183) может быть представлена в виде

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\gamma_{ik}a_{ij} + \gamma_{ij}a_{ik}) &= d_j d_k \quad (j \neq k), \\ 2 \sum_{i=1}^n \gamma_{ik}a_{ik} + b_k &= d_k^2 \quad (j = k) \end{aligned} \right\} \quad (12.186)$$

($j, k = 1, \dots, n$).

Эта система содержит $0,5n(n+1)$ неизвестных коэффициентов γ_{ik} и n неизвестных коэффициентов функционала I_1 . Добавляя к уравнениям (12.186) n уравнений из (12.184)

$$\sum_{i=1}^n c_i \gamma_{ik} = d_k, \quad (12.187)$$

получим систему уравнений, которая в принципе может быть разрешена относительно искомых неизвестных. Если система уравнений (12.186) и (12.187) имеет решение, при котором коэффициенты γ_{ik} удовлетворяют критерию Сильвестра (12.181), а коэффициенты функционала $l_k > 0$, то задача аналитического конструирования при заданном неполном управлении имеет смысл.

Так как коэффициенты функционала получаются в виде $l_k = l_k(d_1, \dots, d_n)$, то найденный ответ дает и решение прямой задачи. Варьируя коэффициенты управления d_k в пределах, допускаемых условиями Сильвестра и условиями $l_k \geq 0$, можно выбрать подходящий критерий качества и оптимальное управление.

Методика обратного решения аналитического конструирования может оказаться полезной и при возможности использования полного управления (в функции всех фазовых координат). Это объясняется тем, что система уравнений (12.186) и (12.187) оказывается линейной относительно коэффициентов γ_{ik} и l_k и решается проще, чем система уравнений (12.183), которая нелинейна относительно искомых коэффициентов γ_{ik} .

Векторное управление. В работах В. И. Зубова [46] рассматривается более общая задача, когда дан нестационарный объект, описываемый матричным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + C(t)u, \quad (12.188)$$

где $A(t)$ и $C(t)$ — квадратные матрицы коэффициентов $n \times n$, а x и u — матрицы-столбцы фазовых координат и управлений.

Вводится квадратичный функционал вида

$$I = \int_0^{\infty} (x'Bx + u'E u) dt, \quad (12.189)$$

где $B = \|b_{ik}\|_{n \times n}$ и $E = \|e_{ik}\|_{n \times n}$ — заданные квадратные матрицы, а $x'Bx$ и $u'E u$ — положительно определенные квадратичные формы.

Решение задачи сводится к линейному управлению вида

$$u = -Dx = -E^{-1}C^{-1}\Gamma x. \quad (12.190)$$

Матрица Γ определяется решением нелинейного матричного уравнения

$$\dot{\Gamma} = A'\Gamma + \Gamma A + \Gamma C E^{-1} C' \Gamma - B. \quad (12.191)$$

Для стационарных объектов матрицы A и C не зависят от времени и уравнение (12.191) принимает вид

$$A'\Gamma + \Gamma A + \Gamma C E^{-1} C' \Gamma - B = 0. \quad (12.192)$$

В большинстве случаев результаты, полученные при аналитическом конструировании регуляторов, не могут быть реализованы точно вследствие необходимости использовать для управления все фазовые координаты. Поэтому приходится говорить лишь о приближенной реализации полученных условий оптимальности. Другие подходы к проблеме аналитического конструирования регуляторов содержатся в работах [46, 60, 62, 77, 133].

ОСОБЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

ГЛАВА 13

СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

§ 13.1. Основные понятия

Линейными системами с *переменными параметрами* называются системы, движение которых описывается линейными дифференциальными уравнениями с переменными во времени коэффициентами:

$$\begin{aligned} a_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t) x = \\ = b_0(t) \frac{d^m f(t)}{dt^m} + \dots + b_{m-1}(t) \frac{df(t)}{dt} + b_m(t) f(t). \end{aligned} \quad (13.1)$$

Коэффициенты $a_0, \dots, a_n$ и $b_0, \dots, b_m$ являются функциями времени, которые задаются либо графиками, построенными на основании эксперимента, либо аналитически.

Переменные коэффициенты в уравнении системы автоматического регулирования (13.1) возникают вследствие наличия переменных коэффициентов хотя бы в одном звене системы.

Так, например, у подвижного объекта (корабля, самолета, ракеты) с течением времени вследствие выгорания топлива происходит изменение массы и моментов инерции. Если объект при своем движении меняет скорость и высоту, то возможно изменение его аэродинамических коэффициентов.

Рассмотрим переходную функцию и функцию веса системы с переменными параметрами. Так как коэффициенты уравнения (13.1) меняются с течением времени, то эти функции будут зависеть от момента приложения единичного скачка или единичного импульса на входе. На рис. 13.1, а изображен график изменения одного из коэффициентов уравнения (13.1) и переходная функция

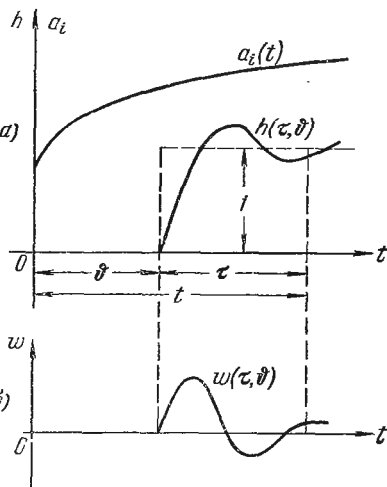


Рис. 13.1.

$$h(t - \theta, \theta) = h(\tau, \theta), \quad (13.2)$$

где t — текущее время, отсчитываемое от некоторого момента, соответствующего, например, включению системы регулирования или началу изменения переменных параметров; θ — время, соответствующее поступлению на вход единичной ступенчатой функции; τ — текущее время, отсчитываемое от момента приложения ступенчатой функции.

Если теперь на вход подать единичную импульсную функцию, которую можно представить как предел отношения

$$\delta(t - \vartheta) = \lim_{\Delta\vartheta \rightarrow 0} \frac{1(t - \vartheta) - 1[t - (\vartheta + \Delta\vartheta)]}{\Delta\vartheta},$$

то процесс на выходе, т. е. функцию веса, в силу принципа суперпозиции можно представить в виде разности двух смещенных на $\Delta\vartheta$ переходных функций с измененным в $1/\Delta\vartheta$ раз масштабом:

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = \lim_{\Delta\vartheta \rightarrow 0} \frac{h[t - \vartheta, \vartheta] - h[t - (\vartheta + \Delta\vartheta), \vartheta + \Delta\vartheta]}{\Delta\vartheta}.$$

Правая часть этого выражения представляет собой производную от переходной функции по аргументу ϑ , взятую с обратным знаком. Таким образом, для функции веса получаем (рис. 13.1, б)

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = w(\tau, \vartheta) = -\frac{\partial}{\partial \vartheta} h(t - \vartheta, \vartheta). \quad (13.3)$$

Как следует из (13.3), функция веса является функцией двух переменных: времени ϑ , соответствующего моменту поступления на вход системы единичного импульса, и текущего времени t (или $\tau = t - \vartheta$). В связи с этим функцию веса можно изобразить в виде некоторой поверхности (рис. 13.2).

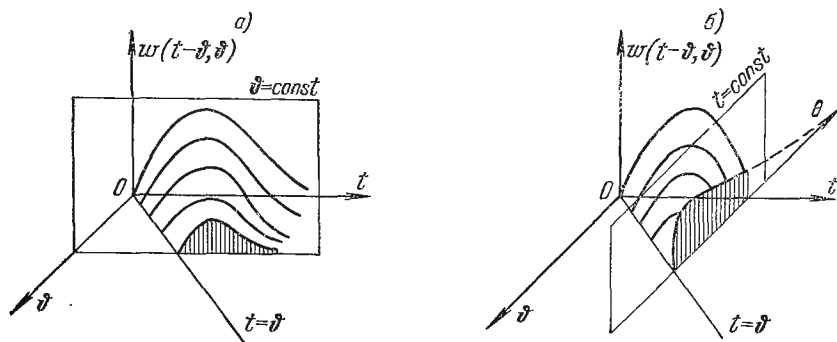


Рис. 13.2.

Эта поверхность переходит в плоскость $tO\vartheta$ при $t < \vartheta$. Границе перехода поверхности в плоскость соответствует биссектриса $t = \vartheta$. Это обстоятельство объясняется тем, что в реальных системах реакция не может появиться ранее приложения на входе системы импульса. Поэтому при $t < \vartheta$ функция веса должна быть тождественно равна нулю.

Сечение поверхности весовой функции вертикальной плоскостью, параллельной оси t (рис. 13.2, а), дает весовую функцию для фиксированного момента приложения единичного импульса на входе системы ($\vartheta = \text{const}$). Эта функция называется *нормальной* весовой функцией системы с переменными параметрами:

$$w(t - \vartheta, \vartheta), \quad \vartheta = \text{const}. \quad (13.4)$$

Она является параметрической функцией, так как в нее входит фиксированный параметр $\vartheta = \text{const}$.

Нормальная весовая функция может быть сделана зависящей от аргумента $\tau = t - \vartheta$ подстановкой $t = \vartheta + \tau$. В результате получаем функцию

$$w(\tau, \vartheta), \quad \vartheta = \text{const}. \quad (13.5)$$

Сечение поверхности весовой функции вертикальной плоскостью, параллельной оси ϑ , дает кривую, образованную ординатами семейства нормальных весовых функций для фиксированного значения времени $t = \text{const}$ (рис. 13.2, б). Эта кривая может быть получена путем обработки семейства нормальных весовых функций, построенных для различных моментов приложения единичного входного импульса ϑ (рис. 13.3). Получающуюся зависимость будем называть *сопряженной функцией веса*:

$$w(t - \vartheta, \vartheta), \quad t = \text{const}. \quad (13.6)$$

Она также является параметрической функцией, так как содержит параметр $t = \text{const}$.

Сопряженная функция веса является функцией смещения ϑ , но может быть представлена также как функция аргумента $\theta = t - \vartheta$ (рис. 13.2, б), называемого реверс-смещением, поскольку θ отсчитывается от точки $\vartheta = t$ в сторону, противоположную смещению ϑ . Это осуществляется подстановкой в сопряженную весовую функцию значения $\vartheta = t - \theta$ при $t = \text{const}$. В результате получаем

$$w(\theta, t - \theta), \quad t = \text{const}. \quad (13.7)$$

Проиллюстрируем все сказанное примером. Пусть функция веса системы с переменными параметрами имеет вид

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = \frac{e^{-\alpha(t - \vartheta)}}{t}.$$

Зафиксировав смещение и положив, например, $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$, получаем нормальную функцию веса:

$$w(t - \vartheta_0, \vartheta_0) = e^{\alpha\vartheta_0} \frac{e^{-\alpha t}}{t}$$

или в другом виде, при переходе к аргументу $\tau = t - \vartheta$:

$$w(\tau, \vartheta_0) = \frac{e^{-\alpha\tau}}{\vartheta_0 + \tau}.$$

Зафиксировав текущее время и положив, например, $t = t_0 = \text{const}$, получаем сопряженную функцию веса

$$w(t_0 - \vartheta, \vartheta) = \frac{e^{-\alpha t_0}}{t_0} e^{\alpha\vartheta}.$$

Перейдя к реверс-смещению $\theta = t - \vartheta$, имеем

$$w(\theta, t_0 - \theta) = \frac{e^{-\alpha\theta}}{t_0}.$$

Заметим, что в системах с постоянными параметрами весовая функция является функцией только времени $\tau = t - \vartheta$ и не зависит от момента приложения ϑ входного импульса. Рельеф функции веса (рис. 13.2) в этом случае получается цилиндрическим, а оба рассмотренных выше сечения (рис. 13.2, а и б) совпадают по форме и отличаются только знаками аргументов. При

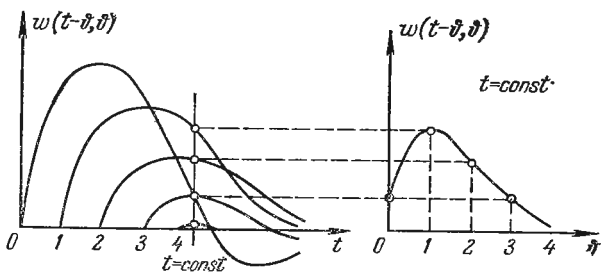


Рис. 13.3.

переходе к реверс-смещению получаем полное совпадение двух функций веса — нормальной и сопряженной: $w(\tau) = w(\theta)$.

Пусть на систему (13.1) с функцией веса $w(t - \theta, \theta)$ действует входной сигнал $f(t)$. Элементарная реакция на выходе системы в произвольный момент времени $t \geq \theta$ будет

$$dx(t) = w(t - \theta, \theta) f(\theta) d\theta. \quad (13.8)$$

Полный сигнал на выходе линейной системы определяется как суперпозиция элементарных реакций интегрированием (13.8) в пределах от 0 до t :

$$x(t) = \int_0^t w(t - \theta, \theta) f(\theta) d\theta. \quad (13.9)$$

Так как при $\theta > t$ функция веса равна нулю, то выражение (13.9) можно также записать в виде

$$x(t) = \int_0^\infty w(t - \theta, \theta) f(\theta) d\theta. \quad (13.10)$$

Из двух последних выражений видно, что в интегральном уравнении связи между входной и выходной величинами используется сопряженная функция веса (13.6), т. е. разрез рельефа функции веса (рис. 13.2, б) вдоль аргумента θ .

Если использовать реверс-смещение $\theta = t - \theta$, то интегральная связь (13.9) может быть представлена в виде интеграла свертки

$$x(t) = \int_0^t w(\theta, t - \theta) f(t - \theta) d\theta. \quad (13.11)$$

Как уже отмечалось, в случае постоянства параметров системы функция веса зависит только от времени $(t - \theta)$. В этом случае формула (13.11) переходит в интеграл свертки (7.44)

$$x(t) = \int_0^t w(\theta) f(t - \theta) d\theta = \int_0^t w(\tau) f(t - \tau) d\tau.$$

§ 13.2. Нахождение функции веса и построение переходных процессов

Функция веса системы с переменными параметрами является исчерпывающей характеристикой этой системы, и нахождение ее важно по следующим соображениям. Функция веса характеризует протекание временных процессов в системе регулирования, и по ее виду можно судить о качестве регулирования, аналогично тому, как это делалось для систем с постоянными параметрами (§ 8.4). По имеющейся функции веса можно определить время протекания переходного процесса, как характеристику быстродействия, и склонность системы к колебаниям.

Кроме того, по имеющейся функции веса можно строить процесс на выходе системы регулирования при заданных входных воздействиях, не производя при этом каждый раз полного решения исходного уравнения (13.1). В соответствии с формулами (13.9) и (13.11) для этой цели необходимо иметь сопряженные функции веса.

Ввиду сложности проблемы существующие методы позволяют пока решать задачу нахождения функции веса в численном виде. Только для систем регулирования, описываемых дифференциальными уравнениями первого и иногда второго порядков, удастся решать задачу в общем виде. Поэтому в некоторых случаях приходится сложную систему с переменными параметрами приближенно сводить к более простой системе, движение которой описывается уравнением не выше второго порядка.

Следует заметить, что большинство систем регулирования с переменными параметрами относится к так называемым квазистационарным системам, или системам, параметры которых меняются сравнительно медленно. В подобных системах коэффициенты дифференциального уравнения (13.1) мало меняются в течение времени переходного процесса, определяемого временем затухания нормальной функции веса.

Дифференциальное уравнение первого порядка. В некоторых случаях для оценки вида переходных процессов системы с переменными параметрами ее уравнение приближенно можно свести к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t). \quad (13.12)$$

Это уравнение имеет аналитическое решение

$$x(t) = e^{-S(t)} \left[\int Q(t) e^{S(t)} dt + C \right], \quad (13.13)$$

где

$$S(t) = \int P(t) dt,$$

а C — постоянная интегрирования.

Пусть, например, имеется уравнение

$$t \frac{dx}{dt} + a_1 x = f(t). \quad (13.14)$$

Определим для него семейство переходных характеристик $h(t - \vartheta, \vartheta) = h(\tau, \vartheta)$. Для единичной ступенчатой функции при $\vartheta \neq 0$ уравнение (13.14) можно записать в следующем виде:

$$t \frac{dx}{dt} + a_1 x = 1(t - \vartheta).$$

Приведем его к виду (13.12):

$$\frac{dx}{dt} + \frac{a_1}{t} x = \frac{1(t - \vartheta)}{t}.$$

Далее получаем:

$$P(t) = \frac{a_1}{t}, \quad S(t) = \int P(t) dt = \int \frac{a_1}{t} dt = a_1 \ln t, \\ e^{S(t)} = t^{a_1}, \quad e^{-S(t)} = t^{-a_1}, \quad Q(t) = \frac{1(t - \vartheta)}{t}, \quad \int Q(t) e^{S(t)} dt = \frac{t^{a_1}}{a_1}.$$

На основании формулы (13.13) получаем

$$h(t - \vartheta, \vartheta) = t^{-a_1} \left[\frac{t^{a_1}}{a_1} + C \right] = \frac{1}{a_1} + \frac{C}{t^{a_1}}.$$

При нулевых начальных условиях (для $t = \vartheta$) должно быть $h(0, \vartheta) = 0$. Отсюда определяется постоянная интегрирования

$$C = -\frac{\vartheta^{a_1}}{a_1}.$$

Окончательно получаем

$$h(t - \vartheta, \vartheta) = \frac{1}{a_1} \left[1 - \left(\frac{\vartheta}{t} \right)^{a_1} \right].$$

Дифференцируя последнее выражение по ϑ , можно получить функцию веса:

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = -\frac{\partial}{\partial \vartheta} h(t - \vartheta, \vartheta) = \frac{\vartheta^{a_1-1}}{t^{a_1}}$$

или в ином виде:

$$w(\tau, \vartheta) = \frac{\vartheta^{a_1-1}}{(\vartheta + \tau)^{a_1}}.$$

Для дифференциального уравнения (13.12) можно сразу найти функцию веса из общего решения (13.13), если положить в (13.12) входной сигнал равным единичному смещенному импульсу $Q(t) = \delta(t - \vartheta)$. Проведем необходимые выкладки, получаем¹

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = e^{-R(t, \vartheta)}, \quad (13.15)$$

где

$$R(t, \vartheta) = \int_{\vartheta}^t P(t) dt.$$

Распространим этот результат на более общий случай записи дифференциального уравнения в виде

$$a_0(t) \frac{dx}{dt} + a_1(t) x = b_0(t) f(t). \quad (13.16)$$

Приведем его к виду (13.12):

$$\frac{dx}{dt} + \frac{a_1(t)}{a_0(t)} x = \frac{b_0(t)}{a_0(t)} f(t). \quad (13.17)$$

Положив $f(t) = \delta(t - \vartheta)$, получим для функции веса решение в виде

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = \frac{b_0(\vartheta)}{a_0(\vartheta)} e^{-R(t, \vartheta)}, \quad (13.18)$$

где

$$R(t, \vartheta) = \int_{\vartheta}^t \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt.$$

Рассмотрим снова в качестве примера уравнение (13.14). Приведем его к виду (13.17):

$$\frac{dx}{dt} + \frac{a_1}{t} x = \frac{1}{t} f(t).$$

Обратившись к формуле (13.18), находим

$$R(t, \vartheta) = \int_{\vartheta}^t \frac{a_1}{t} dt = a_1 \ln \frac{t}{\vartheta}$$

и функцию веса

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = \frac{1}{\vartheta} e^{-a_1 \ln \frac{t}{\vartheta}} = \frac{\vartheta^{a_1-1}}{t^{a_1}},$$

что совпадает с полученным ранее выражением.

Дифференциальное уравнение второго порядка. Рассмотрим случай, когда дифференциальное уравнение (13.1) сводится к уравнению второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + P(t) \frac{dx}{dt} + Q(t)x = f(t). \quad (13.19)$$

При помощи подстановки

$$x(t) = u(t) e^{-\frac{1}{2} \int_0^t P(t) dt} \quad (13.20)$$

это уравнение приводится к виду

$$\frac{d^2u}{dt^2} + F(t)u = f(t) e^{\frac{1}{2} \int_0^t P(t) dt} = f_1(t). \quad (13.21)$$

Здесь введено обозначение

$$F(t) = Q(t) - \frac{1}{2} \frac{dP(t)}{dt} - \frac{P^2(t)}{4}. \quad (13.22)$$

При действии единичного импульса $f(t) = \delta(t - \vartheta)$ для уравнения (13.21) получится решение $\bar{u} = z(t - \vartheta, \vartheta)$, которое связано с весовой функцией $w(t - \vartheta, \vartheta)$ исходного уравнения (13.19) на основании формулы (13.20) соотношением

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = z(t - \vartheta, \vartheta) e^{-\frac{1}{2} \int_0^t P(t) dt}. \quad (13.23)$$

Если же положить $f_1(t) = \delta(t - \vartheta)$, то для уравнения (13.21) будет получена весовая функция $r(t - \vartheta, \vartheta)$, которая на основании (13.9) связана с решением $z(t - \vartheta, \vartheta)$ зависимостью

$$z(t - \vartheta, \vartheta) = \int_0^t r(t - u, u) e^{\frac{1}{2} \int_0^u P(u) du} \delta(u - \vartheta) du.$$

Эта зависимость на основании свойства дельта-функции может быть представлена в виде

$$z(t - \vartheta, \vartheta) = r(t - \vartheta, \vartheta) e^{\frac{1}{2} \int_0^{\vartheta} P(\vartheta) d\vartheta}. \quad (13.24)$$

В результате из (13.23) и (13.24) получаем

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = r(t - \vartheta, \vartheta) e^{-\frac{1}{2} \int_0^t P(t) dt}. \quad (13.25)$$

Таким образом, для отыскания функции веса $w(t - \vartheta, \vartheta)$ необходимо предварительно решить уравнение (13.21), которое приобретает вид

$$\frac{d^2u}{dt^2} + F(t)u = \delta(t - \vartheta), \quad (13.26)$$

с нулевыми начальными условиями: $u(t) = 0$ и $\dot{u}(t) = 0$ при $t = \vartheta$. Полученную при решении весовую функцию $u = r(t - \vartheta, \vartheta)$ необходимо затем подставить в (13.25) и найти $w(t - \vartheta, \vartheta)$.

Решение уравнения (13.26) может быть произведено при помощи использования функций Бесселя [118]. Для этого функция $F(t)$ должна быть аппроксимирована отрезками прямых линий, уравнение которых сводится к виду $a_i + b_i t$. Однако это решение является сравнительно сложным.

Ограничимся рассмотрением так называемого аппроксимирующего решения, которое может применяться, если функция $F(t)$ мало изменяется относительно своего среднего большого значения F_{cp} (рис. 13.4). Это решение называется аппроксимацией Бриллюина — Вентцеля — Крамера [118].

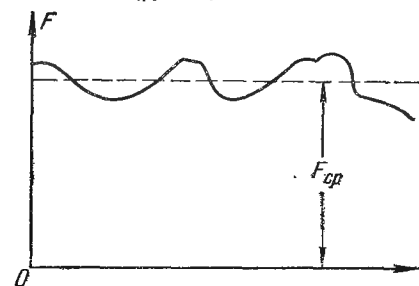


Рис. 13.4.

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + F(t) u = 0. \quad (13.27)$$

Предположим теперь, что для некоторого однородного дифференциального уравнения второго порядка получено частное решение

$$u_1(t) = \frac{1}{\sqrt{N(t)}} e^{-jS(t)}, \quad (13.28)$$

где

$$S(t) = \int_0^t N(t) dt. \quad (13.29)$$

Найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет решение (13.28). Продифференцировав его дважды и исключив промежуточные переменные, получаем

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \left[N^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{N}}{N} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\ddot{N}}{N} \right] u_1 = 0. \quad (13.30)$$

Сравнивая (13.30) и (13.27), видим, что выражение (13.28) будет частным решением уравнения (13.27), если выполняется тождество

$$F(t) = N^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{N}}{N} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\ddot{N}}{N}. \quad (13.31)$$

Решение уравнения (13.31) и отыскание функции $N(t)$ является сложной задачей вследствие наличия нелинейностей в (13.31). Однако может быть найдено приближенное решение (13.31) в виде ряда, если удовлетворяются неравенства

$$\left| \frac{\dot{N}}{N^2} \right|^2 < \varepsilon, \quad \left| \frac{\ddot{N}}{N^3} \right| < \varepsilon^2, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Тогда решение (13.21) можно представить в виде

$$N = N_0 + N_1 + N_2 + \dots \quad (13.32)$$

Подставляя этот ряд в (13.31), получаем формулы для определения членов ряда:

$$\left. \begin{aligned} N_0(t) &= \sqrt{F(t)}, \\ 2N_0N_1 &= \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{N}_0}{N_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\ddot{N}_0}{N_0}, \\ 2N_0N_2 + N_1^2 &= \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{N}_0}{N_0} \right)^2 \left(\frac{\dot{N}_1}{N_0} - \frac{N_1}{N_0} \right) - \frac{1}{2} \frac{\ddot{N}_0}{N_0} \left(\frac{\dot{N}_1}{N_0} - \frac{N_1}{N_0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13.33)$$

Часто можно ограничиться только первым членом ряда (13.22), что будет справедливым, если функция $F(t)$ изменяется медленно, оставаясь в среднем большой (рис. 13.4). Тогда

$$N(t) = \sqrt{F(t)}. \quad (13.34)$$

При выполнении условия $F(t) > 0$ в качестве второго частного решения можно взять комплексно-сопряженную величину (13.29)

$$u_2(t) = \frac{1}{\sqrt{N(t)}} e^{iS(t)}. \quad (13.35)$$

Тогда можно показать, что решение уравнения (13.26) будет

$$r(t - \vartheta, \vartheta) = - \frac{u_1(t) u_2(\vartheta) - u_1(\vartheta) u_2(t)}{u_1(\vartheta) \dot{u}_2(\vartheta) - \dot{u}_1(\vartheta) u_2(\vartheta)} = \frac{u_1(t) u_2(\vartheta) - u_1(\vartheta) u_2(t)}{2j} \quad (13.36)$$

или, после подстановки (13.28) и (13.35),

$$r(t - \vartheta, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{F(t)F(\vartheta)}} \sin[S(t) - S(\vartheta)]. \quad (13.37)$$

В предельном случае постоянства параметров $F(t) = \Omega^2 = \text{const.}$ Тогда $S(t) = \Omega t$ и $S(\vartheta) = \Omega \vartheta$. В результате из формулы (13.37) можно получить функцию веса консервативного звена

$$r(t - \vartheta, \vartheta) = \frac{1}{\Omega} \sin \Omega(t - \vartheta) = \frac{1}{\Omega} \sin \Omega \tau.$$

Для исходного дифференциального уравнения (13.19) на основании (13.25) и (13.37) получаем искомую функцию веса

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{F(t)F(\vartheta)}} e^{-\frac{1}{2} \int_{\vartheta}^t P(t) dt} \sin[S(t) - S(\vartheta)]. \quad (13.38)$$

Критерием медленности изменения функции $F(t)$ и, следовательно, применимости полученного выражения может служить неравенство

$$\left| -\frac{1}{2} \cdot \frac{[\dot{F}(t)]^2}{F^3(t)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\ddot{F}(t)}{F_2(t)} \right| \ll 1, \quad (13.39)$$

которое получается из (13.31) и (13.34).

Метод последовательных приближений. Рассмотрим уравнение (13.1):

$$a_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_n(t) x = b_0(t) \frac{d^m f}{dt^m} + \dots + b_m(t) f.$$

Ограничиваясь случаем квазистационарных систем и полагая, что коэффициенты $a_i(t)$ меняются медленно, найдем функцию веса для этого уравнения.

Переменные коэффициенты в левой части исходного уравнения представим в виде суммы постоянной и изменяющейся частей:

$$a_i(t) = a_i^0 + a_i^* = a_i(\vartheta) + a_i^*(t - \vartheta), \quad (13.40)$$

где $a_i^0 = a_i(\vartheta)$ — переменный коэффициент, зафиксированный для момента приложения входной величины $t = \vartheta$.

Тогда исходное дифференциальное уравнение (13.4) можно представить в виде

$$a_0^0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1^0 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n^0 x = f_0(t) - y(t), \quad (13.41)$$

где

$$f_0(t) = b_0(t) \frac{d^m f}{dt^m} + \dots + b_m(t) f, \quad (13.42)$$

$$y(t) = a_0^* \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_n^* x. \quad (13.43)$$

Поскольку мы предположили, что коэффициенты $a_i(t)$ меняются медленно, то функция $y(t)$ мала по сравнению с левой частью (13.41). Эту функцию можно рассматривать как возмущение, и тогда к уравнению (13.41) можно применить метод последовательных приближений.

В уравнении (13.41) можно перейти к изображениям по Лапласу. Тогда получим

$$X(p) = \Phi(p) F_0(p) - \Phi(p) Y(p). \quad (13.44)$$

Здесь введено обозначение

$$\Phi(p) = \frac{1}{a_0^0 p^n + a_1^0 p^{n-1} + \dots + a_n^0}. \quad (13.45)$$

Решение уравнения (13.41) или (13.44) можно записать в виде ряда

$$x(t) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots \quad (13.46)$$

Для получения первого приближения x_1 зафиксируем переменные коэффициенты $a_i(t) = a_i(\vartheta)$. Тогда первое приближение может быть найдено как решение дифференциального уравнения

$$a_0^0 \frac{d^n x_1}{dt^n} + \dots + a_n^0 x_1 = f_0(t). \quad (13.47)$$

Решение этого уравнения можно получить, используя обычные методы (см. главу 7), в том числе путем нахождения оригинала, соответствующего изображению (13.44) при $Y(p) = 0$:

$$X_1(p) = \Phi(p) F_0(p). \quad (13.48)$$

Для получения второго приближения в правую часть (13.41) или (13.44) подставляется первое приближение $x = x_1$, а в левую часть $-x = x_1 + x_2$. Тогда получается уравнение с фиксированными коэффициентами для определения поправки:

$$a_0^0 \frac{d^n x_2}{dt^n} + \dots + a_n^0 x_2 = - \left[a_0^* \frac{d^n x_1}{dt^n} + \dots + a_n^* x_1 \right]. \quad (13.49)$$

Это уравнение также может быть решено с использованием преобразования Лапласа посредством нахождения оригинала изображения

$$X_2(p) = -\Phi(p) Y_1(p),$$

где $Y_1(p)$ — изображение $y(t)$ при подстановке в формулу (13.43) $x = x_1$.

Повторяя этот процесс многократно, можно найти рекуррентное соотношение для определения k -го члена ряда (13.46):

$$a_0^0 \frac{d^n x_k}{dt^n} + \dots + a_n^0 x_k = - \left[a_0^* \frac{d^n x_{k-1}}{dt^n} + \dots + a_n^* x_{k-1} \right]. \quad (13.50)$$

Ряд (13.46) сходится тем быстрее, чем медленнее изменяются коэффициенты $a_i(t)$. Рассмотренный метод может использоваться как для нахождения

ния функции веса и переходной функции, так и для построения переходного процесса при любом известном воздействии $f(t)$.

Численно-графический метод. Численно-графический метод Д. А. Башкирова [98] разработан также применительно к системам с переменными во времени параметрами, причем можно вводить любое переменное возмущающее или задающее воздействие и произвольные начальные условия.

Неоднородные уравнения первого порядка с переменными коэффициентами. Пусть требуется построить решение уравнения

$$a_0(t) \dot{x} + a_1(t) x = f_1(t)$$

с начальным условием $x = x_0$ при $t = 0$. Разделив его на $a_1(t)$, приведем уравнение к виду

$$T(t) \dot{x} + x = f(t), \quad (13.51)$$

где

$$T(t) = \frac{a_0(t)}{a_1(t)}, \quad f(t) = \frac{f_1(t)}{a_1(t)}.$$

Уравнение (13.51) можно решать графически, если считать T постоянным и равным $T\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)$ внутри каждого интервала времени $(t, t + \Delta t)$, но различным для разных интервалов. Формула для решения в этом случае будет

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - x(t)}{T\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\Delta t}{2}},$$

а процесс построения сводится к следующему. Наносим заданные кривые $f(t)$ и $T(t)$ (рис. 13.5). Из точки E кривой $f(t)$, взятой в середине первого интервала Δt , откладываем по горизонтали отрезок $EM = T\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$, величина которого берется равной ординате точки H заданной кривой $T(t)$, т. е. тоже в середине первого интервала Δt . Полученная точка M соединяется прямой линией с заданной начальной точкой процесса A . В результате получается новая точка B искомой кривой $x(t)$. Затем аналогично берется ордината точки I , откладывается в виде отрезка FN и проводится прямая NB , дающая новую точку C решения $x(t)$, и т. д.

Неоднородные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Требуется построить решение уравнения

$$a_0(t) \ddot{x} + a_1(t) \dot{x} + a_2(t) x = f_1(t),$$

которое можно записать также в виде

$$T_1(t) T_2(t) \ddot{x} + T_2(t) \dot{x} + x = f(t), \quad (13.52)$$

где

$$T_1(t) = \frac{a_0(t)}{a_1(t)}, \quad T_2(t) = \frac{a_1(t)}{a_2(t)}, \quad f(t) = \frac{f_1(t)}{a_2(t)},$$

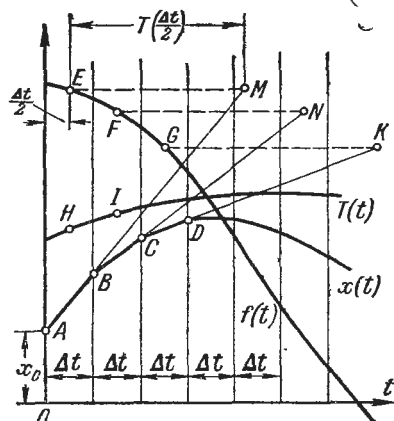


Рис. 13.5.

с начальными условиями $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$. Если в правой части (13.52) имеется операторное выражение, то предварительно производим вычисление правой части и сводим ее к $f(t)$.

Если обозначить $x_1 = T_2(t)x$, то уравнение (13.52) разобьется на два:

$$\left. \begin{aligned} T_1(t)\dot{x}_1 + x_1 &= f(t) - \varphi(t), \\ T_2(t)\dot{x} &= x_1, \end{aligned} \right\} \quad (13.53)$$

где

$$\varphi(t) = x - T_3(t)\dot{x}, \quad T_3(t) = T_1(t) \frac{dT_2(t)}{dt}, \quad (13.54)$$

а начальные условия будут

$$x = x_0, \quad x_1 = x_{10} = T_2(0)\dot{x}_0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Формулы для решения уравнений (13.53) согласно [64, 78] будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta x_1}{\Delta t} &= \frac{f\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - \varphi\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - x_1(t)}{T_1\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\Delta t}{2}}, \\ \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{x_1(t + \Delta t)}{T_2(t + \Delta t)}, \end{aligned} \right\} \quad (13.55)$$

где

$$\varphi\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = x\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - T_3\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\dot{x}(t),$$

причем во второй из формул (13.55) значения Δx берутся со сдвигом на $\Delta t/2$ вправо по сравнению с Δx_1 .

Отсюда вытекает следующее построение. Наносим заданные кривые $T_1(t)$ и $T_2(t)$, а также кривую $T_3(t)$, ординаты которой определяются по второй из формул (13.54). Они показаны на графике (рис. 13.6, а).

На другом графике наносим заданное $f(t)$ (рис. 13.6, б). На основании заданных начальных условий (см. выше) наносим

на последнем графике точки x_0 , x_{10} и в середине первого интервала Δt (как в § 7.6) еще точку A с ординатой (7.76), т. е.

$$x\left(\frac{\Delta t}{2}\right) = x_0 + \frac{\Delta t}{2} \dot{x}_0.$$

Из точки E_1 в середине первого интервала Δt на кривой $f(t)$ откладываем вниз отрезок

$$E_1 E_2 = \varphi\left(\frac{\Delta t}{2}\right) = x\left(\frac{\Delta t}{2}\right) - T_3\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\dot{x}_0$$

(вниз, когда он положителен, и вверх, когда он отрицателен). При этом величина $x\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ берется как ордината уже имеющейся точки A , величина $T_3\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ берется из графика $T_3(t)$, а величина $\dot{x}_0$ — из заданных начальных

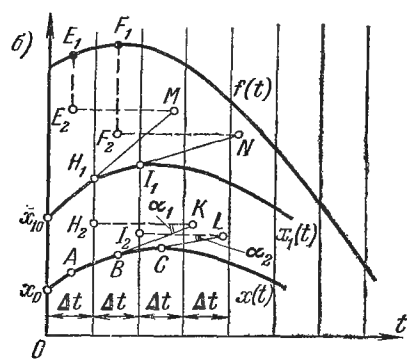


Рис. 13.6.

условий. Из полученной точки E_2 откладываем горизонтальный отрезок

$$E_2M = T_1 \left(\frac{\Delta t}{2} \right),$$

размер которого берется из графика $T_1(t)$. Точку M соединяем прямой линией с точкой x_{10} , что дает новую точку H_1 кривой $x_1(t)$ при $t = \Delta t$.

Из точки H_1 откладываем вниз отрезок

$$H_1H_2 = x \left(\frac{\Delta t}{2} \right),$$

равный ординате точки A . Из точки H_2 проводим горизонтальный отрезок

$$H_2K = T_2(\Delta t),$$

размер которого берется из графика $T_2(t)$. Точку K соединяем с точкой A , что дает новую точку B искомой кривой $x(t)$ в середине второго интервала Δt .

Опишем еще второй шаг интегрирования. Из точки F_1 кривой $f(t)$ в середине второго интервала Δt откладывается вниз отрезок

$$F_1F_2 = \Phi_1^* \left(\Delta t + \frac{\Delta t}{2} \right) = x_B - T_3 \left(\Delta t + \frac{\Delta t}{2} \right) \operatorname{tg} \alpha_1,$$

где x_B — ордината точки B , полученной выше; $\operatorname{tg} \alpha_1$ — тангенс угла наклона прямой KA , проведенной ранее (он дает требуемое значение x). Откладываем отрезок

$$F_2N = T_1 \left(\Delta t + \frac{\Delta t}{2} \right)$$

и проводим прямую NH_1 , получая при этом новую точку I_1 кривой $x_1(t)$.

Из точки I_1 откладываем вниз

$$I_1I_2 = x_B,$$

а затем вправо

$$I_2L = T_2(2\Delta t),$$

после чего проводим прямую LB . Это дает новую точку C искомой кривой $x(t)$ и т. д. Все описанные построения можно заменить числовыми расчетами.

§ 13.3. Передаточные функции

Связь между входной и выходной величинами в системе с переменными параметрами определяется интегральной зависимостью (13.9):

$$x(t) = \int_0^t w(t-\vartheta, \vartheta) f(\vartheta) d\vartheta.$$

Предположим, что к входному сигналу $f(t)$ можно применить преобразование Фурье (7.15). Тогда его можно представить в виде (7.16):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Объединяя записанные выше две формулы, получаем

$$x(t) = \int_{-\infty}^t w(t-\vartheta, \vartheta) d\vartheta \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega\vartheta} d\omega. \quad (13.56)$$

Здесь в первом интеграле нижний предел взят равным $-\infty$. Это отражает тот факт, что входное воздействие может начаться в любой момент времени при $t < 0$, в том числе и при $t \rightarrow -\infty$. Меняя в (13.56) порядок интегрирования и умножая правую часть на $e^{j\omega t} e^{-j\omega t} = 1$, получаем

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^t w(t-\vartheta, \vartheta) e^{-j\omega(t-\vartheta)} d\vartheta = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(j\omega, t) F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (13.57)$$

Здесь введена частотная передаточная функция системы с переменными параметрами

$$W(j\omega, t) = \int_{-\infty}^t w(t-\vartheta, \vartheta) e^{-j\omega(t-\vartheta)} d\vartheta. \quad (13.58)$$

Ее можно представить также в следующем виде:

$$W(j\omega, t) = \int_0^{\infty} w(\theta, t-\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta, \quad (13.59)$$

где $\theta = t - \vartheta$ — реверс-смещение, а $w(\theta, t - \theta)$ — сопряженная функция веса (13.7).

Величина, находящаяся в правой части (13.57) под знаком интеграла, представляет собой изображение Фурье функции времени $x(t)$. Поэтому вместо (13.57) можно записать

$$X(j\omega, t) = W(j\omega, t) F(j\omega). \quad (13.60)$$

Таким образом, изображение Фурье выходной величины системы с переменными параметрами можно представить как изображение Фурье входной величины, умноженное на частотную передаточную функцию. Разница по сравнению с системой, имеющей постоянные параметры, заключается в том, что выражение (13.60) записано для некоторого фиксированного момента времени $t = \text{const}$. В связи с этим в частотную передаточную функцию $W(j\omega, t)$ входит параметр t , вследствие чего она называется *параметрической частотной передаточной функцией*.

Переходя в формуле (13.57) к преобразованию Лапласа, получим

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} W(p, t) F(p) e^{pt} dp, \quad (13.61)$$

где параметрическая передаточная функция

$$W(p, t) = \int_{-\infty}^t w(t-\vartheta, \vartheta) e^{-p(t-\vartheta)} d\vartheta = \int_0^{\infty} w(\theta, t-\theta) e^{-p\theta} d\theta. \quad (13.62)$$

Отыскание параметрической передаточной функции. Использование интегральной связи (13.62) для нахождения параметрической передаточной функции является нерациональным, так как требует знания функции веса, что усложняет задачу. Более удобно находить параметрическую передаточную функцию непосредственно из исходного дифференциального уравнения (13.4). Положим в нем $f(t) = \delta(t - \vartheta)$. Тогда решение этого уравнения будет соответствовать функции веса $w = w(t - \vartheta, \vartheta)$. Подставим эти

значения в (13.1):

$$\begin{aligned} \left[a_0(t) \frac{d^n}{dt^n} + \dots + a_n(t) \right] w(t - \vartheta, \vartheta) = \\ = \left[b_0(t) \frac{d^m}{dt^m} + \dots + b_m(t) \right] \delta(t - \vartheta). \end{aligned} \quad (13.63)$$

Умножим левую и правую части (13.63) на $e^{p\vartheta}$ и проинтегрируем по ϑ в пределах от $-\infty$ до t :

$$\begin{aligned} a_0(t) \frac{d^n}{dt^n} \left[\int_{-\infty}^t w(t - \vartheta, \vartheta) e^{p\vartheta} d\vartheta \right] + \dots + a_n(t) \left[\int_{-\infty}^t w(t - \vartheta, \vartheta) e^{p\vartheta} d\vartheta \right] = \\ = [b_0(t) p^m + \dots + b_m(t)] e^{pt}. \end{aligned} \quad (13.64)$$

На основании (13.62) величины, находящиеся в квадратных скобках, можно представить в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^t w(t - \vartheta, \vartheta) e^{p\vartheta} d\vartheta = W(p, t) e^{pt}.$$

В результате вместо (13.64) можно записать

$$\begin{aligned} a_0(t) \frac{d^n}{dt^n} [W(p, t) e^{pt}] + \dots + a_n(t) [W(p, t) e^{pt}] = \\ = [b_0(t) p^m + \dots + b_m(t)] e^{pt}. \end{aligned} \quad (13.65)$$

Продифференцировав левую часть и сократив на e^{pt} , получим

$$A(p, t) W(p, t) + \frac{dA}{dp} \frac{dW}{dt} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n A}{dp^n} \frac{d^n W}{dt^n} = B(p, t). \quad (13.66)$$

Здесь введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A(p, t) &= a_0(t) p^n + \dots + a_n(t), \\ B(p, t) &= b_0(t) p^m + \dots + b_m(t). \end{aligned} \right\} \quad (13.67)$$

Таким образом, параметрическая передаточная функция может быть получена в результате решения дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (13.66).

Заметим, что в системах с постоянными параметрами передаточная функция не зависит от времени и уравнение (13.66) приобретает вид

$$A(p) W(p) = B(p). \quad (13.68)$$

Передаточная функция в случае постоянства параметров будет

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 p^m + \dots + b_m}{a_0 p^n + \dots + a_n}. \quad (13.69)$$

В случае переменных параметров уравнение (13.66) может быть решено методом последовательных приближений [118]. Для этого представим его в виде

$$A(p, t) W(p, t) = B(p, t) + N\{W(p, t)\}, \quad (13.70)$$

$$N\{W(p, t)\} = - \left[\frac{dA}{dp} \frac{dW}{dt} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n A}{dp^n} \frac{d^n W}{dt^n} \right]. \quad (13.71)$$

Будем искать решение в виде ряда

$$W(p, t) = W_0(p, t) + W_1(p, t) + \dots \quad (13.72)$$

Первое приближение можно получить, положив $N = 0$ в (13.70):

$$W_0(p, t) = \frac{B(p, t)}{A(p, t)}. \quad (13.73)$$

Это будет передаточная функция системы с «замороженными» коэффициентами.

Для вычисления первой поправки $W_1(p, t)$ подставим полученное из (13.73) первое приближение в правую часть (13.70). Тогда получим для первой поправки

$$W_1(p, t) = -\frac{N\{W_0(p, t)\}}{A(p, t)}. \quad (13.74)$$

Формула для k -й поправки будет иметь вид

$$W_k(p, t) = -\frac{N\{W_{k-1}(p, t)\}}{A(p, t)}. \quad (13.75)$$

Таким образом, последующий член ряда (13.72) получается посредством дифференцирования предыдущего члена в соответствии с (13.71) и подстановки его в (13.75).

Ряд (13.72) сходится тем быстрее, чем медленнее изменяются коэффициенты исходного дифференциального уравнения (13.1).

По найденной функции $W(p, t)$ может быть получена параметрическая частотная передаточная функция $W(j\omega, t)$ подстановкой $p = j\omega$.

Использование параметрических передаточных функций. В соответствии с формулой (13.61) изображение Лапласа выходной величины системы с переменными параметрами можно найти как произведение изображения воздействия на параметрическую передаточную функцию:

$$X(p, t) = W(p, t) F(p). \quad (13.76)$$

Это дает возможность находить переходные процессы в системе с переменными параметрами посредством использования преобразования Лапласа (или Карсона — Хевисайда). Для этой цели по формуле (13.76) отыскивается изображение выходной величины, а затем делается переход к оригиналу $x(t)$.

Для этой цели могут использоваться существующие таблицы изображений Лапласа функций времени. Так, например, пусть изображение выходной величины равно

$$X(p, t) = W(p, t) F(p) = \frac{k}{p(p+bt+ct^2)}.$$

Полагая в этом выражении время t фиксированным параметром, по таблице (см., например, табл. 7.2) находим

$$x(t) = \frac{k}{bt+ct^2} [1 - e^{-(bt+ct^2)t}].$$

Если изображение представляет собой сложную дробно-рациональную функцию, то можно использовать теорему разложения (см. § 7.4). При отсутствии нулевых корней знаменателя изображения

$$X(p) = \frac{X_1(p)}{X_2(p)} \quad (13.77)$$

аналогично формуле (7.37) получаем

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{X_1(p_k, t)}{\left[\frac{d}{dp} X_2(p, t) \right]_{p=p_k}} e^{p_k t}. \quad (13.78)$$

При наличии одного нулевого корня знаменателя изображения

$$X(p, t) = \frac{X_1(p, t)}{p X_2(p, t)} \quad (13.79)$$

аналогично формуле (7.39) получаем

$$x_1(t) = \frac{X_1(0)}{X_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{X_1(p_k, t)}{p_k \left[\frac{d}{dp} X_2(p, t) \right]_{p=p_k}} e^{p_k t}. \quad (13.80)$$

В формулах (13.78) и (13.80) корни знаменателя предполагаются не кратными.

Для построения переходного процесса может также использоваться вещественная частотная характеристика (см. § 7.5). Для общего случая воздействия произвольной формы из (13.57), аналогично проделанному в § 7.5, можно получить расчетную формулу, являющуюся обобщением формулы (7.52):

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_{\varphi}(\omega, t) \sin \omega t}{\omega} d\omega, \quad (13.81)$$

где $P_{\varphi}(\omega, t)$ — вещественная часть частотного изображения искомой функции $x(t)$, полученного подстановкой в преобразование Карсона — Хевисайда $p = j\omega$.

В частном случае, когда входное воздействие представляет собой единичную ступенчатую функцию, из (13.57), аналогично проделанному в § 7.5, получается расчетная формула, являющаяся обобщением формулы (7.53) для переходной функции рассматриваемой динамической системы:

$$x(t) = h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega, t) \sin \omega t}{\omega} d\omega, \quad (13.82)$$

где $P(\omega, t)$ — вещественная часть параметрической частотной передаточной функции (13.58).

Построение переходного процесса проводится, аналогично изложенному в § 7.5, по h -функциям. Разница будет заключаться в том, что построение переходного процесса будет справедливым только для того момента времени $t = \text{const}$, который вошел в качестве параметра в параметрическую передаточную функцию. Поэтому необходимо построить серию кривых (рис. 13.7) для различных фиксированных моментов времени t_1, t_2, t_3 и т. д., а затем через точки, соответствующие этим значениям времени, провести плавную кривую.

Указанное обстоятельство значительно увеличивает объем вычислительной работы по сравнению с построением кривой переходного процесса в системе с постоянными параметрами.

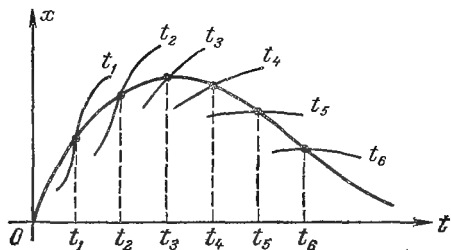


Рис. 13.7.

§ 13.4. Устойчивость и качество регулирования

Для систем с переменными параметрами понятие устойчивости имеет некоторую специфику. Если система работает ограниченный интервал времени, то понятие асимптотической устойчивости (см. § 6.1) практически теряет свой смысл. Однако для квазистационарных систем при сравнительно медленном изменении коэффициентов уравнения (13.1) представляется возможным сформулировать понятие устойчивости следующим образом.

Будем считать систему с переменными параметрами устойчивой на заданном интервале времени T , если ее нормальная функция веса (13.4) или

(13.5) затухает во времени для всех фиксированных значений ϑ , лежащих внутри этого интервала. Это условие можно записать следующим образом:

$$I_t = \int_{\vartheta}^{\infty} |w(t - \vartheta, \vartheta)| dt = \int_0^{\infty} |w(\tau, \vartheta)| d\tau < \infty, \quad 0 < \vartheta < T. \quad (13.83)$$

Если для системы получена нормальная функция веса, то вид ее и определяет устойчивость системы.

Однако в некоторых случаях имеется сопряженная функция веса (13.6) или (13.7), которая связана преобразованием Лапласа с параметрической передаточной функцией (13.62) и преобразованием Фурье с параметрической частотной передаточной функцией (13.58) или (13.59). Поэтому более просто можно исследовать вопрос затухания функции веса вдоль аргументов ϑ (смещение) или θ (реверс-смещение). Условие затухания вдоль этих аргументов можно записать следующим образом:

$$I_{\vartheta} = \int_{-\infty}^t |w(t - \vartheta, \vartheta)| d\vartheta = \int_0^{\infty} |w(\theta, t - \theta)| d\theta < \infty, \quad 0 < t < T. \quad (13.84)$$

Однако затухание сопряженной функции веса и выполнение условия (13.84) еще не означает затухания нормальной функции веса и выполнения условия (13.83). Заметим, что в системах с постоянными параметрами не наблюдается такой неопределенности, так как для них совпадают оба разреза рельефа функции веса: $w(\tau) = w(\theta)$, и оба интеграла: $I_t = I_{\vartheta}$, определяемые формулами (13.83) и (13.84).

Можно показать [118], что для систем, описываемых дифференциальным уравнением вида

$$a_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_n(t) x = f(t),$$

выполнение условия (13.84) практически обеспечивает выполнение условия (13.83). В этих системах исследование устойчивости может быть проведено на базе параметрической передаточной функции.

Исследование затухания сопряженной функции веса может производиться как по ее виду, если она известна для рассматриваемой системы, так и на основании отсутствия полюсов параметрической передаточной функции замкнутой системы в правой полуплоскости и на мнимой оси. Для этой цели могут привлекаться известные критерии устойчивости, например критерий Михайлова, критерии Найквиста и др.

Формулы главы 5, дающие связь между передаточными функциями замкнутой системы $\Phi(p)$, разомкнутой системы $W(p)$ и передаточной функцией по ошибке $\Phi_x(p)$, сохраняют свою силу и для параметрических передаточных функций.

Качество регулирования может быть оценено по виду переходного процесса (переходной функции или функции веса) в соответствии с § 8.4. Для этой цели должны использоваться нормальная функция веса и нормальная переходная функция, определяемые для фиксированного момента времени $0 < \vartheta < T$.

Рассмотрим теперь точность воспроизведения задающего воздействия в следящих системах. Составим дифференциальное уравнение (13.1) так, чтобы в левой части находилась ошибка $x(t)$, а в правой — задающее воздействие $g(t)$:

$$a_0(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_n(t) x(t) = b_0(t) \frac{d^m g(t)}{dt^m} + \dots + b_m(t) g(t). \quad (13.85)$$

Реакция системы на дельта-функцию в правой части $g(t) = \delta(t - \vartheta, \vartheta)$ представляет собой функцию веса ошибки $w_x(t - \vartheta, \vartheta)$.

В соответствии с формулой (13.11) ошибку системы можно представить в виде

$$x(t) = \int_0^t w_x(\theta, t-\theta) g(t-\theta) d\theta. \quad (13.86)$$

Разлагая задающее воздействие в ряд Тейлора около точки t и подставляя его в (13.86), получаем

$$x(t) = g(t) \int_0^t w_x(\theta, t-\theta) d\theta - \dot{g}(t) \int_0^t w_x(\theta, t-\theta) \theta d\theta + \\ + \frac{\ddot{g}(t)}{2!} \int_0^t w_x(\theta, t-\theta) \theta^2 d\theta + \dots \quad (13.87)$$

Ограничимся случаем, когда $t > t_n$, где t_n — время затухания функции веса. Тогда верхний предел интегрирования в (13.87) можно положить равным бесконечности. В результате (13.87) можно представить в виде

$$x(t) = c_0(t) g(t) + c_1(t) \dot{g}(t) + \frac{c^2(t)}{2!} \ddot{g}(t) + \dots \quad (13.88)$$

Здесь введено понятие коэффициентов ошибок, определяемых выражением

$$(-1)^k c_k(t) = \int_0^\infty w_x(\theta, t-\theta) \theta^k d\theta. \quad (13.89)$$

В отличие от коэффициентов ошибок системы с постоянными параметрами здесь они получаются зависящими от времени.

Коэффициенты ошибок можно вычислить с помощью параметрической передаточной функции по ошибке $W_x(p, t)$. Из (13.62) следует

$$[W_x(p, t)]_{p=0} = \left[\int_0^\infty w_x(\theta, t-\theta) e^{-p\theta} d\theta \right]_{p=0} = \int_0^\infty w_x(\theta, t-\theta) d\theta = c_0(t). \quad (13.90)$$

Дифференцируя $W_x(p, t)$ по p и положив затем $p = 0$, получаем формулу для определения k -го коэффициента:

$$c_k(t) = \left[\frac{d^k W_x(p, t)}{dp^k} \right]_{p=0}. \quad (13.91)$$

Коэффициенты ошибок могут быть также получены делением числителя $W_x(p, t)$ на знаменатель так, чтобы получить ряд по возрастающим степеням p .

Коэффициенты ошибок могут также определяться для возмущающего воздействия по соответствующей функции веса или по параметрической передаточной функции относительно возмущающего воздействия.

§ 13.5. О синтезе систем с переменными параметрами

Ввиду сложности математического решения синтез систем регулирования с переменными параметрами, как правило, должен осуществляться при помощи вычислительных машин непрерывного или дискретного действия, а также посредством реального моделирования. Вычислительные машины позволяют просмотреть все наиболее важные режимы работы системы, оценить ее качественные показатели и подобрать необходимые корректирующие средства.

Однако во многих случаях, особенно для квазистационарных систем, можно провести синтез расчетным путем. Это позволяет более сознательно подойти к определению структуры проектируемой системы и параметров корректирующих средств, что значительно сокращает объем последующих исследований и проверок на вычислительных машинах и моделях.

Метод замороженных коэффициентов. Одним из наиболее простых способов является замораживание переменных во времени параметров в какой-то фиксированный момент времени $t = \vartheta$, что ведет к замораживанию коэффициентов дифференциального уравнения (13.1). В этом случае система с переменными параметрами сводится к системе с постоянными параметрами, что позволяет применять для нее известные методы синтеза (см. главу 12).

Разница по сравнению с системами, имеющими постоянные коэффициенты, заключается в том, что исследование системы с замороженными коэффициентами должно быть последовательно проведено для различных моментов времени $t = \vartheta$, лежащих в интервале $0 < \vartheta < T$, где T — время работы системы.

Если во всем рабочем интервале времени от 0 до T качество системы регулирования оказывается приемлемым, то ее считают работоспособной и при изменении коэффициентов уравнения в исследованных пределах.

Этот метод будет давать правильные результаты, если в течение времени переходного процесса (пока функция веса не затухнет практически до нуля) коэффициенты уравнения (13.1) успеют мало изменить свое значение.

Следует заметить, что эффективность рассматриваемого метода может зависеть от правильного выбора фиксированных моментов времени, для которых производится замораживание коэффициентов. Необходимо так выбирать эти моменты времени, чтобы охватить все возможные варианты значений коэффициентов, обратив особое внимание на «опасные» точки, в которых происходит значительное изменение коэффициента, смена его знака и т. п. Безусловно, что правильный выбор рассматриваемых моментов времени во многом зависит от опыта проектировщика.

Метод замороженных реакций. Во многих случаях переменными параметрами обладает не вся система регулирования, а одно из ее звеньев. Чаще

всего таким звеном оказывается объект регулирования. Задача синтеза будет сильно упрощена, если звено с переменными параметрами исследовать отдельно, а затем приблизительно заменить его в окрестностях некоторой точки ϑ_0 эквивалентным звеном с постоянными параметрами.

Задача оказывается более простой вследствие того, что в большинстве случаев дифференциальное уравнение звена с переменными параметрами может быть сведено к уравнению первого или второго порядка.

Этот метод оказывается более точным, чем метод замороженных коэффициентов, так как при замене звена с переменными параметрами эквивалентным звеном с постоянными параметрами учитывается факт переменности параметров исходного звена, что будет определять вид и параметры эквивалентного звена.

Идея метода заключается в следующем. Пусть имеется некоторая система регулирования (рис. 13.8), содержащая в своем составе звено с переменными параметрами. Часть системы, соответствующая постоянным параметрам, выделена в отдельное звено.

Для звена с постоянными параметрами может быть определена весовая функция $w_1(\tau)$, которая зависит только от времени $\tau = t - \vartheta$ (рис. 13.1),



Рис. 13.8.

и соответствующая ей передаточная функция

$$W_1(p) = \int_0^{\infty} w_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau. \quad (13.92)$$

Для звена с переменными параметрами определим весовую функцию $w_2(t - \vartheta, \vartheta) = w_2(\tau, \vartheta)$. Эта весовая функция может быть найдена точно, если дифференциальное уравнение звена имеет первый или второй порядок, или приближенными методами в соответствии с изложенным в § 13.2 и § 13.3. Для ее нахождения могут быть также использованы вычислительные машины с последующей аппроксимацией решения.

После нахождения весовой функции w_2 заморозим ее для некоторого фиксированного момента времени $t = \vartheta_0$, полагая при этом, что весовая функция на небольшом интервале времени вблизи точки $t = \vartheta_0$ зависит только от времени $\tau = \tau - \vartheta$ и не зависит от зафиксированного значения смещения. Таким образом, мы получим функцию

$$w_2(t - \vartheta, \vartheta_0) = w_2(\tau, \vartheta_0). \quad (13.93)$$

Заметим при этом, что мы фиксируем аргумент ϑ не полностью, а только в той его части, которая делает рельеф функции веса нецилиндрическим. В результате этого оба разреза (рис. 13.2) получаются одинаковыми, т. е. весовые функции (13.5) и (13.7) совпадают.

Для весовой функции (13.93) может быть найдена передаточная функция

$$W_2(p, \vartheta_0) = \int_0^{\infty} w_2(\tau, \vartheta_0) e^{-p\tau} d\tau. \quad (13.94)$$

Эта передаточная функция по своей сущности является параметрической, так как в нее входит фиксированный параметр ϑ_0 . Однако по своим свойствам она полностью совпадает с передаточной функцией звена с постоянными параметрами. Вследствие этого будем называть ее эквивалентной передаточной функцией. С этой передаточной функцией можно в дальнейшем оперировать так, как будто рассматривается звено с постоянными параметрами. В связи с этим рассматриваемую передаточную функцию можно записать сокращенно: $W_2(p, \vartheta_0) = W_2(p)$.

Однако при этом надо помнить, что исследование системы должно быть произведено при различных значениях фиксированного параметра в пределах $0 < \vartheta_0 < T$.

Для системы, изображенной на рис. 13.8, при использовании эквивалентной передаточной функции может быть найдена передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = W_1(p) W_2(p), \quad (13.95)$$

передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{W_1(p) W_2(p)}{1 + W_1(p) W_2(p)} \quad (13.96)$$

и передаточная функция по ошибке

$$\Phi_x(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{1}{1 + W_1(p) W_2(p)} \quad (13.97)$$

Эти функции могут быть использованы обычным образом, как это делается для систем с постоянными параметрами при исследовании устойчивости, точности и качества регулирования, но исследование должно охватить весь рабочий интервал ϑ от 0 до T .

Как и в случае замороженных коэффициентов, здесь приходится наметать «опасные» точки, где должно быть проведено исследование. Однако в рассматриваемом методе можно учитывать при этом не только сами значения коэффициентов в отдельные моменты времени, но и характер их изменения во времени (скорость изменения, ускорение изменения и т. д.). Это делает все исследование более полным при сохранении его относительной простоты.

В некоторых случаях оказывается более целесообразным отыскание и последующее замораживание переходной функции звена с переменными параметрами

$$h_2(t - \vartheta, \vartheta_0) = h_2(\tau, \vartheta_0). \quad (13.98)$$

Для переходной функции (13.18) может быть найдена передаточная функция

$$W_2(p, \vartheta_0) = p \int_0^{\infty} h_2(\tau, \vartheta_0) e^{-p\tau} d\tau. \quad (13.99)$$

По сравнению с нахождением передаточной функции по замороженной весовой функции (13.94) здесь получается обычно более полный учет динамических качеств звена с переменными параметрами. Это оказывается наиболее заметным в тех случаях, когда в правой части дифференциального уравнения звена имеются переменные во времени коэффициенты. Их изменение может быть учтено только при нахождении переходной функции, так как при нахождении весовой функции значения коэффициентов в правой части уравнения фиксируются в момент приложения единичного импульса.

СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

§ 14.1. Уравнения линейных систем с запаздыванием

Линейными системами с *запаздыванием* называются такие автоматические системы, которые, имея в общем ту же самую структуру, что и обыкновенные линейные системы (раздел II), отличаются от последних тем, что в одном или нескольких из своих звеньев имеют запаздывание во времени начала изменения выходной величины (после начала изменения входной) на величину τ , называемую временем запаздывания, причем это время запаздывания остается постоянным и во всем последующем ходе процесса.

Например, если обыкновенное линейное звено описывается уравнением

$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = kx_1 \quad (14.1)$$

(апериодическое звено первого порядка), то уравнение соответствующего линейного звена с запаздыванием будет иметь вид

$$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = kx_1(t - \tau) \quad (14.2)$$

(апериодическое звено первого порядка с запаздыванием). Такого вида уравнения называются уравнениями с запаздывающим аргументом или дифференциально-разностными уравнениями.

Обозначим $x_1^*(t) = x_1(t - \tau)$. Тогда уравнение (14.2) запишется в обыкновенном виде:

$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = kx_1^* \quad (14.3)$$

Так, если входная величина x_1 изменяется скачком от нуля до единицы (рис. 14.1, а), то изменение величины $x_1^* = x_1(t - \tau)$, стоящей в правой части уравнения звена, изобразится графиком рис. 14.1, б (скачок на τ секунд позже). Используя теперь переходную характеристику обыкновенного апериодического звена в применении к уравнению (14.3), получаем изменение выходной величины x_2 в виде графика рис. 14.1, в. Это и будет переходная характеристика апериодического звена первого порядка с запаздыванием (его апериодическое «инерционное» свойство определяется постоянной времени T , а запаздывание — величиной τ).

Линейное звено с запаздыванием. В общем случае, как и для (14.2), уравнение динамики любого линейного звена с запаздыванием можно

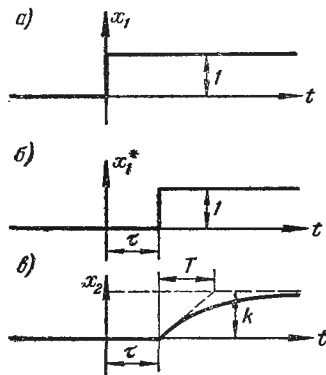


Рис. 14.1.

разбить на два:

$$Q(p)x_2 = R(p)x_1^*, \quad x_1^*(t) = x_1(t - \tau), \quad (14.4)$$

что соответствует условной разбивке линейного звена с запаздыванием (рис. 14.2, а) на два: обыкновенное линейное звено того же порядка и с теми же коэффициентами и предшествующий ему элемент запаздывания (рис. 14.2, б).

Временная характеристика любого звена с запаздыванием будет, следовательно, такая же, как у соответствующего обыкновенного звена, но только сдвинута по оси времени вправо на величину τ .

Примером звена «чистого» запаздывания τ является акустическая линия связи (τ — время прохождения звука). Другими примерами могут служить система автоматического дозирования какого-либо вещества, перемещаемого с помощью ленточного транспортера (τ — время движения ленты на определенном участке),

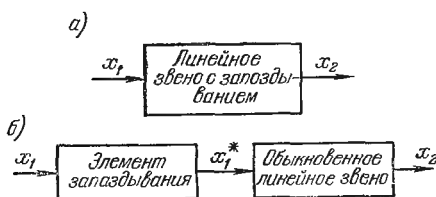


Рис. 14.2.

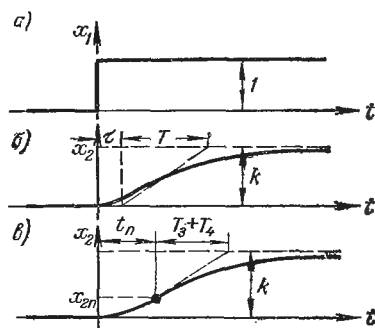


Рис. 14.3.

а также система регулирования толщины прокатываемого металла, где τ означает время движения металла от валков до измерителя толщины. В двух последних примерах величина τ называется транспортным запаздыванием.

В первом приближении определенной величиной запаздывания τ могут быть охарактеризованы трубопроводы или длинные электрические линии, входящие в звенья системы (подробнее о них см. § 14.2).

Величину запаздывания τ в звене можно определить экспериментально путем снятия временной характеристики. Например, если при подаче на вход звена скачком некоторой величины, принимаемой за единицу, на выходе получается экспериментальная кривая для x_2 , показанная на рис. 14.3, б, то можно приближенно описать это звено как аperiodическое звено первого порядка с запаздыванием (14.2), взяв величины τ , T и k с экспериментальной кривой (рис. 14.3, б).

Заметим также, что такая же экспериментальная кривая согласно графику рис. 14.3, в может трактоваться и как временная характеристика обыкновенного аperiodического звена второго порядка с уравнением

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)x_2 = (T_3 p + 1)(T_4 p + 1)x_1 = kx_1, \quad (14.5)$$

причем T_1 , T_2 и k можно вычислить из соотношений, записанных в § 4.5 для данного звена, по некоторым замерам на экспериментальной кривой или другими способами.

Итак, с точки зрения временной характеристики реальное звено, приближенно описываемое уравнением первого порядка с запаздывающим аргументом (14.2), часто может быть с такой же степенью приближения описано обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка (14.5). Для решения вопроса о том, какое из этих уравнений лучше подходит к дан-

ному реальному звену, можно сравнить еще их амплитудно-фазовые характеристики с экспериментально снятой амплитудно-фазовой характеристикой звена, выражающей его динамические свойства при вынужденных колебаниях. Построение амплитудно-фазовых характеристик звеньев с запаздыванием будет рассмотрено ниже.

В целях единства записи уравнений представим второе из соотношений (14.4) для элемента запаздывания в операторном виде. Разложив правую часть его в ряд Тейлора, получим

$$x_1(t-\tau) = x_1(t) + \frac{\dot{x}_1(t)}{1!}(-\tau) + \frac{\ddot{x}_1(t)}{2!}(-\tau)^2 + \dots + \frac{x_1^{(n)}(t)}{n!}(-\tau)^n + \dots$$

или, в принятой ранее символической операторной записи,

$$x_1(t-\tau) = \left[1 + \frac{-\tau p}{1!} + \frac{(-\tau p)^2}{2!} + \dots + \frac{(-\tau p)^n}{n!} + \dots \right] x_1 = e^{-\tau p} x_1. \quad (14.6)$$

Это выражение совпадает с формулой теоремы запаздывания для изображений функций (табл. 7.2). Таким образом, для звена чистого запаздывания получаем передаточную функцию в виде

$$W(p) = e^{-\tau p}. \quad (14.7)$$

Заметим, что в некоторых случаях наличие большого числа малых постоянных времени в системе регулирования можно учесть в виде постоянного запаздывания, равного сумме этих постоянных времени. Действительно, пусть система содержит N последовательно включенных апериодических звеньев первого порядка с коэффициентом передачи, равным единице, и величиной каждой постоянной времени $\Delta T = \frac{\tau}{N}$. Тогда результирующая передаточная функция будет

$$W(p) = \frac{1}{(1 + \Delta T p)^N} = \left(1 + \frac{\tau}{N} p \right)^{-N}. \quad (14.8)$$

Если $N \rightarrow \infty$, то в пределе получаем $W(p) = e^{-\tau p}$. Уже при $N = 8 \div 10$ передаточная функция (14.8) мало отличается от передаточной функции звена с запаздыванием (14.6).

Уравнение любого линейного звена с запаздыванием (14.4) будем теперь записывать в виде

$$Q(p) x_2 = R(p) e^{-\tau p} x_1. \quad (14.9)$$

Передаточная функция линейного звена с запаздыванием будет

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} e^{-\tau p} = W_0(p) e^{-\tau p}, \quad (14.10)$$

где через $W_0(p)$ обозначена передаточная функция соответствующего обыкновенного линейного звена без запаздывания.

Частотная передаточная функция получается из (14.10) подстановкой $p = j\omega$:

$$W(j\omega) = W_0(j\omega) e^{-j\omega\tau} = A_0(\omega) e^{j\psi_0(\omega) - \tau\omega}, \quad (14.11)$$

где $A_0(\omega)$ и $\psi_0(\omega)$ — модуль и фаза частотной передаточной функции звена без запаздывания. Отсюда получаем следующее правило.

Для построения амплитудно-фазовой характеристики любого линейного звена с запаздыванием нужно взять характеристику соответствующего обыкновенного линейного звена и каждую ее точку сдвинуть вдоль окружности по часовой стрелке на угол $\tau\omega$, где ω — значение частоты колебаний в данной точ- характеристике (рис. 14.4 а).

Так как в начале амплитудно-фазовой характеристики $\omega = 0$, а в конце $\omega = \infty$, то начальная точка остается без изменения, а конец характеристики асимптотически навивается на начало координат (если степень операторного многочлена R меньше, чем многочлена Q).

Выше говорилось о том, что реальные переходные процессы (временные характеристики) вида рис. 14.3, б часто могут быть с одинаковой степенью приближения описаны как уравнением (14.2), так и (14.5). Амплитудно-фазовые характеристики для уравнений (14.2) и (14.5) показаны на рис. 14.4, а и б соответственно. Принципиальное отличие первой состоит в том, что она имеет точку D пересечения с осью U . При сравнении обеих характеристик

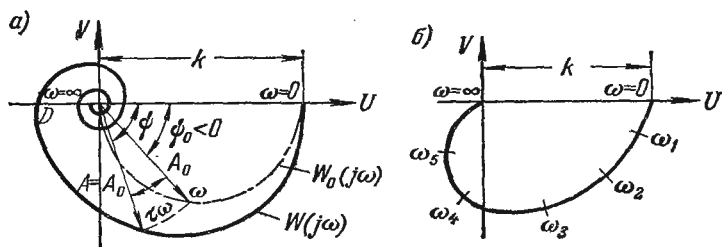


Рис. 14.4

между собой и с экспериментальной амплитудно-фазовой характеристикой реального звена надо принимать во внимание не только форму кривой, но и характер распределения отметок частот ω вдоль нее.

Линейная система с запаздыванием. Пусть одноконтурная или многоконтурная автоматическая система в числе своих звеньев имеет одно звено с запаздыванием. Тогда уравнение этого звена имеет вид (14.9). Если таких звеньев несколько, то они могут иметь разные величины запаздывания ($\tau_1, \tau_2, \dots$). Все выведенные в главе 5 общие формулы для уравнений и передаточных функций систем автоматического регулирования остаются в силе и для любых линейных систем с запаздыванием, если только в эти формулы подставлять значения передаточных функций в виде (14.10).

Например, для разомкнутой цепи из последовательно соединенных звеньев, среди которых имеется два звена с запаздыванием τ_1 и τ_2 соответственно, передаточная функция разомкнутой системы будет иметь вид

$$W(p) = W_0(p) e^{-\tau_1 p} e^{-\tau_2 p} = W_0(p) e^{-(\tau_1 + \tau_2)p}, \quad (14.12)$$

где $W_0(p)$ — передаточная функция разомкнутой цепи без учета запаздывания, равная произведению передаточных функций включенных последовательно звеньев.

Таким образом, при исследовании динамики разомкнутой цепи из последовательно соединенных звеньев безразлично, будет ли все запаздывание сосредоточено в одном каком-нибудь звене или разнесено по разным звеньям. Для многоконтурных цепей получатся более сложные соотношения.

Если имеется звено с отрицательной обратной связью, обладающей запаздыванием τ , то оно будет описываться уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} Q_c(p) x_{\text{вых}} &= R_c(p) (x_{\text{вх}} - x_{\text{ос}}), \\ Q_{\text{ос}}(p) x_{\text{ос}} &= R_{\text{ос}}(p) e^{-\tau p} x_{\text{вых}}. \end{aligned} \right\} \quad (14.13)$$

Передаточные функции звена и цепи обратной связи будут при этом

$$W_c(p) = \frac{R_c(p)}{Q_c(p)}, \quad W_{\text{ос}}(p) = \frac{R_{\text{ос}}(p)}{Q_{\text{ос}}(p)} e^{-\tau p}. \quad (14.14)$$

Согласно (5.59) результирующая передаточная функция звена вместе с обратной связью будет

$$W(p) = \frac{W_c(p)}{1 + W_c(p) W_{oc}(p)} = \frac{R_c(p) Q_{oc}(p)}{Q_c(p) Q_{oc}(p) + R_c(p) R_{oc}(p) e^{-\tau p}}. \quad (14.15)$$

Этой передаточной функции соответствует дифференциальное уравнение звена в операторной форме

$$[1 + W_c(p) W_{oc}(p)] x_{\text{вых}} = W_c(p) x_{\text{вх}} \quad (14.16)$$

или, при подстановке (14.14),

$$[Q_c(p) Q_{oc}(p) + R_c(p) R_{oc}(p) e^{-\tau p}] x_{\text{вых}} = R_c(p) Q_{oc}(p) x_{\text{вх}}. \quad (14.17)$$

Пусть, например, интегрирующее звено с замедлением, передаточная функция которого

$$W_c(p) = \frac{k_c}{p(1+Tp)},$$

охватывается отрицательной обратной связью с передаточной функцией

$$W_{oc}(p) = k_{oc} e^{-\tau p}.$$

Тогда результирующая передаточная функция звена с обратной связью в соответствии с (14.15) будет

$$W(p) = \frac{k_c}{Tp^2 + p + k_c k_{oc} e^{-\tau p}}.$$

Частотная передаточная функция получается подстановкой в последнее выражение $p = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{k_c}{-T\omega^2 + j\omega + k_c k_{oc} e^{-j\omega\tau}} = \frac{k_c}{(k_c k_{oc} \cos \omega\tau - T\omega^2) + j(\omega - k_c k_{oc} \sin \omega\tau)}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика, соответствующая этому выражению, приведена для иллюстрации на рис. 14.5.

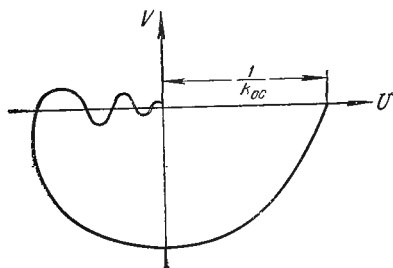


Рис. 14.5.

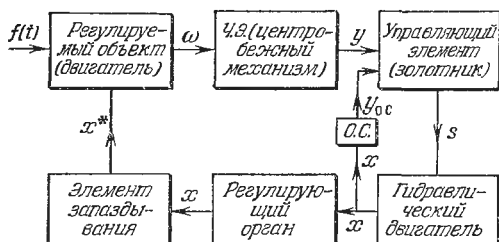


Рис. 14.6.

Пример системы с запаздыванием. Рассмотрим систему регулирования скорости двигателя (рис. 1.16). Составим уравнения всех звеньев системы с учетом их инерционностей. Дополнительно к тому учтем еще запаздывание τ в воздействии регулирующего органа на объект. Изобразим это введением в структурную схему данной системы дополнительного элемента запаздывания (рис. 14.6). Пусть объект не имеет самовыравнивания

и снабжен регулятором с жесткой обратной связью (рис. 10.11). Уравнения такой системы

$$\left. \begin{aligned} p \Delta \omega &= k_1 \Delta x^* - f(t), \\ (T_4^2 p^2 + T_2 p + 1) \Delta y &= k_2 \Delta \omega, \\ (p + k_3 k_4 k_5) \Delta x &= -k_3 k_4 \Delta y, \\ \Delta x^* &= e^{-\tau p} \Delta x. \end{aligned} \right\} \quad (14.18)$$

Уравнение замкнутой системы

$$D(p) \Delta \omega = N(p) f(t), \quad (14.19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D(p) &= (T_4^2 p^2 + T_2 p + 1) (p + k_3 k_4 k_5) p + k_1 k_2 k_3 k_4 e^{-\tau p}, \\ N(p) &= -(T_4^2 p^2 + T_2 p + 1) (p + k_3 k_4 k_5). \end{aligned} \right\} \quad (14.20)$$

Здесь $\Delta \omega$, Δy , Δx , Δx^* — приращения скорости, перемещений золотника и регулирующего органа и управляющего воздействия; $k_1, \dots, k_5$ — коэффициенты, T_2 и T_4 — постоянные времени.

§ 14.2. Уравнения линейных систем с распределенными параметрами

Системой автоматического регулирования с *распределенными* параметрами называется такая система, среди уравнений которой кроме обыкновенных дифференциальных уравнений имеются уравнения в частных производных. Физически это соответствует учету волновых явлений или гидравлического удара в трубопроводах, учету волновых процессов в длинных электрических линиях при передаче по ним воздействий от одного звена системы автоматического регулирования к другому или же при регулировании процессов в самих трубопроводах или длинных линиях.

Этот вопрос приобретает практическое значение чаще всего в некоторых системах регулирования, включающих в себя водяные, масляные или газовые трубопроводы (либо в объекте, либо в регуляторе), реже — в некоторых системах телерегулирования (телеуправления) и т. п.

Известно, например, что водяной трубопровод гидротурбины описывается без учета потерь уравнениями

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x},$$

где v — скорость движения воды, h — напор в произвольной точке, определяемой координатой x вдоль трубопровода, a — скорость звука в воде.

Уравнения длинной электрической линии без потерь имеют вид

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = l \frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = c \frac{\partial u}{\partial t},$$

где u — напряжение, i — ток в произвольной точке, определяемой координатой x вдоль линии, l и c — индуктивность и емкость единицы длины линии.

После решения указанных уравнений в частных производных с учетом граничных условий, определяемых смежными звеньями данной системы автоматического регулирования, для системы в целом получаются дифференциально-разностные уравнения того же типа, как и для систем с запаздыванием (§ 14.1).

Рассмотрим вывод уравнений системы автоматического регулирования давления газа в трубопроводе, схема которой изображена на рис. 14.7. В данном случае сам регулируемый объект (трубопровод) является звеном с распределенными параметрами. Для простоты будем считать его прямолинейным, а всех потребителей — сосредоточенными на конце трубопровода.

Регулятор состоит из чувствительного элемента 2 (мембранный измеритель давления), усилителей 3 и 4 (струйная трубка и пневматический двигатель) с жесткой обратной связью 5 и из регулирующего органа 6 (клапан). Возмущающее воздействие $f(t)$ на объект выражается в изменении по произволу потребителей некоторого эквивалентного выходного сечения на конце трубопровода.

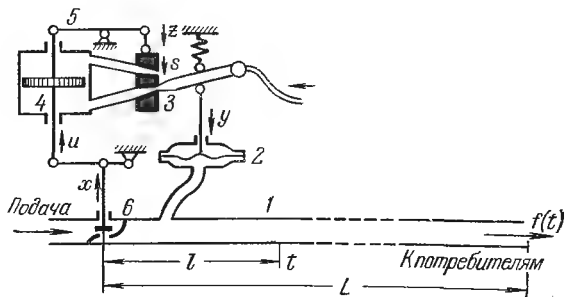


Рис. 14.7.

Уравнение регулируемого объекта. Движение газа в трубопроводе подчиняется уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial l} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l}. \quad (14.21)$$

Учтем также условие постоянства массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial w}{\partial l} + w \frac{\partial \rho}{\partial l} = 0 \quad (14.22)$$

и адиабатическое уравнение состояния газа

$$\left(\frac{\rho}{\rho^0} \right)^k = \frac{p}{p^0}. \quad (14.23)$$

В этих уравнениях w , p , ρ — соответственно скорость, давление и плотность газа в текущем сечении трубопровода с координатой l в момент времени t (вся длина трубопровода обозначается через L); k — показатель степени в уравнении адиабатического состояния газа; индексы 0 вверху (p^0 , ρ^0) означают, что данные величины относятся к установившемуся состоянию системы.

Продифференцировав (14.23), получаем

$$k \left(\frac{\rho}{\rho^0} \right)^{k-1} \frac{1}{\rho^0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{p^0} \frac{\partial p}{\partial t},$$

откуда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\rho^0}{\rho} \right)^{k-1} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (14.24)$$

где a — скорость звука в газе, определяемая формулой

$$a = \sqrt{\frac{k p^0}{\rho^0}}. \quad (14.25)$$

Обычно не учитывают сопротивления движения газа в трубопроводе, пренебрегая сравнительно малыми членами $w \frac{\partial w}{\partial l}$ и $w \frac{\partial \rho}{\partial l}$. Кроме того, ввиду малости величины отклонения давления p в процессе регулирования от его установившегося значения можно считать, что $\frac{p}{p^0} \approx 1$, а следовательно, согласно (14.23) $\frac{\rho}{\rho^0} \approx 1$. В результате из уравнений (14.21), (14.22) и (14.24)

получаем

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho^0} \frac{\partial p}{\partial l}, \quad \frac{\partial w}{\partial l} = -\frac{1}{\rho^0 a^2} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (14.26)$$

Введем обозначения для относительного отклонения φ регулируемой величины от ее установившегося значения и для относительной координаты λ вдоль трубопровода:

$$\varphi = \frac{p-p^0}{p^0} = \frac{\Delta p}{p^0}, \quad \lambda = \frac{l}{L} \quad (0 \leq \lambda \leq 1), \quad (14.27)$$

а также для относительного отклонения ψ скорости движения газа в трубопроводе:

$$\psi = k \frac{w-w^0}{w^0} = k \frac{\Delta w}{w^0}, \quad (14.28)$$

где w^0 — скорость газа в трубопроводе при установившемся процессе, k — показатель степени в адиабатическом уравнении состояния газа (14.23).

Переходя в уравнениях (14.26) к этим относительным безразмерным переменным и бесконечно малым приращениям, получаем искомые уравнения регулируемого объекта (трубопровода) в виде

$$\gamma^2 T_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}, \quad T_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad (14.29)$$

где введены два постоянных параметра регулируемого объекта:

$$T_0 = \frac{L}{w^0}, \quad \gamma = \frac{w^0}{a}. \quad (14.30)$$

Первый из них (T_0) представляет собой, очевидно, время прохождения газа по данному трубопроводу в установившемся процессе, а второй (γ) — отношение установившейся скорости газа к скорости звука в нем.

Заметим, что уравнения (14.29) эквивалентны так называемому волновому уравнению

$$\gamma^2 T_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}, \quad (14.31)$$

которое легко получается, если первое из уравнений (14.29) продифференцировать по λ , а второе — по t и сравнить результаты дифференцирования.

Для системы уравнения в частных производных (14.29) надо написать граничные условия. Для этого запишем уравнение поступления газа через регулирующий клапан в начале трубопровода и уравнение потребления газа в конце его.

Используем выражение для скорости газа через его расход, а именно:

$$w = \frac{G}{\rho F}. \quad (14.32)$$

где G — расход газа по весу в секунду, F — площадь сечения трубопровода, g — ускорение силы тяжести.

Условимся значения всех переменных, относящихся к началу и к концу трубопровода, обозначать индексами 1 и 2 соответственно. Расход газа в начале трубопровода G будем считать функцией координаты перемещения регулирующего клапана x , т. е.

$$G_1 = G_1(x). \quad (14.33)$$

Эта функция (рис. 14.8) определяется либо аналитическим расчетом, либо из опытных данных.

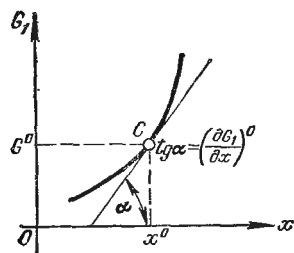


Рис. 14.8.

На основании уравнений (14.32), (14.33), а также формул главы 3 малое отклонение Δw_1 величины скорости в начале трубопровода от ее установившегося значения w^0 будет

$$\begin{aligned} w_1 - w^0 = \Delta w_1 &= \left(\frac{\partial w_1}{\partial G_1} \right)^0 \Delta G_1 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial p_1} \right)^0 \Delta p_1 = \frac{1}{g \rho^0 F} \Delta G - \frac{G^0}{g (\rho^0)^2 F} \Delta p_1 = \\ &= \frac{1}{g \rho^0 F} \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} \right)^0 \Delta x - \frac{G^0}{g (\rho^0)^2 F} \left(\frac{\partial p_1}{\partial p_1} \right) \Delta p_1 \quad (14.34) \end{aligned}$$

(установившиеся значения w^0 , G^0 , ρ^0 пишутся без индекса 1, так как они одинаковы вдоль всего трубопровода). Величина $\left(\frac{\partial G_1}{\partial x} \right)^0$ есть тангенс угла наклона касательной в точке C (рис. 14.8), соответствующей установившемуся процессу в трубопроводе. На основании (14.23) и (14.25)

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial p_1} \right)^0 = \frac{1}{a^2}.$$

Введем безразмерную величину относительного отклонения регулирующего клапана:

$$\xi = \frac{x - x^0}{x_H} = \frac{\Delta x}{x_H}, \quad (14.35)$$

где x_H — условное номинальное значение, равное

$$x_H = \frac{G^0}{k \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} \right)^0}. \quad (14.36)$$

Кроме того, заметим, что согласно (14.32)

$$w^0 = \frac{G^0}{g \rho^0 F}. \quad (14.37)$$

Подставляя все это в (14.34), с учетом (14.28) и (14.27) получаем уравнение поступления газа через регулирующий клапан в начале трубопровода:

$$\varphi_1 + \psi_1 = \xi, \quad (14.38)$$

которое является первым граничным условием для уравнений объекта (14.29).

Расход газа в конце трубопровода у потребителей можно записать согласно (14.32) в виде

$$G_2 = F g \rho_2 w_2. \quad (14.39)$$

С другой стороны, известно, что при выходе газа из трубопровода (в случае критического истечения, которым мы для простоты и ограничимся) будет

$$G_2 = Q \sqrt{2g \frac{p_2}{v_2}}, \quad (14.40)$$

где Q — площадь некоторого эквивалентного выходного сечения на конце трубопровода у потребителей (это величина, которая может меняться как угодно по произволу потребителя; она выражает собой, следовательно, внешнее возмущающее воздействие на данную систему регулирования), p_2 — давление в конце трубопровода перед выходом к потребителям, v_2 — удельный объем газа там же.

Уравнение для отклонения величины расхода в процессе регулирования от его установившегося значения в линеаризованном виде на основании (14.39), (14.23), (14.37) и (14.27) будет

$$\begin{aligned} \Delta G &= \left(\frac{\partial G_2}{\partial w_2} \right)^0 \Delta w_2 + \left(\frac{\partial G_2}{\partial p_2} \right)^0 \left(\frac{\partial p_2}{\partial p_2} \right) \Delta p_2 = \\ &= F g \rho^0 \Delta w_2 + \frac{F g w^0}{a^2} \Delta p_2 = \frac{G^0}{k} (\psi_2 + \varphi_2). \quad (14.41) \end{aligned}$$

Выразим ΔG_2 также из (14.40), т. е. через изменение выходного сечения у потребителей, считая для простоты $v_2 = \text{const} = v^0$:

$$\Delta G_2 = \left(\frac{\partial G_2}{\partial Q} \right)^0 \Delta Q + \left(\frac{\partial G_2}{\partial p_2} \right)^0 \Delta p_2 = \sqrt{2g \frac{p^0}{v^0}} \Delta Q + Q^0 \sqrt{\frac{g}{2v^0 p^0}} \Delta p_2.$$

Учитывая, что из (14.40)

$$G^0 = Q^0 \sqrt{2g \frac{p^0}{v^0}}, \quad (14.42)$$

и вводя безразмерную величину изменения выходного сечения, т. е. внешнего возмущающего воздействия

$$f(t) = \frac{\Delta Q}{Q^0}. \quad (14.43)$$

получим

$$\Delta G_2 = G^0 \left(f + \frac{1}{2} \Phi_2 \right). \quad (14.44)$$

Сравнение выражений (14.44) и (14.44) дает искомое уравнение потребления газа в конце трубопровода:

$$\Psi_2 = k f(t) - \left(1 - \frac{k}{2} \right) \Phi_2, \quad (14.45)$$

которое является вторым граничным условием для уравнения объекта (14.29). Уравнение потребления (14.45) записано для общего случая процесса регулирования с переменным внешним возмущающим воздействием, выраженным через относительную величину выходного сечения f у потребителей. При исследовании же переходного процесса в системе, когда после некоторого возмущения потребление установилось ($Q = \text{const} = Q^0$, $f = 0$), уравнение (14.45) будет иметь вид

$$\Psi_2 = - \left(1 - \frac{k}{2} \right) \Phi_2. \quad (14.46)$$

Уравнения регулятора. Уравнение чувствительного элемента

$$T_1^2 \ddot{\eta} + T_2 \dot{\eta} + \eta = -k_1 \Phi_1; \quad (14.47)$$

здесь T_1 , T_2 и k_1 — постоянные времени и коэффициент передачи, а

$$\eta = \frac{\Delta y}{y_n}, \quad (14.48)$$

где y_n — некоторое номинальное перемещение. Индекс 1 при переменной Φ в уравнении (14.47) означает, что чувствительный элемент измеряет давление газа в начале трубопровода.

Уравнение управляющего элемента со струйной трубкой

$$\sigma = \frac{\Delta y - \Delta z}{y_n} = \eta - \xi. \quad (14.49)$$

Уравнение пневматического двигателя на основании (5.137) будет

$$T_s \frac{\dot{u}}{u_n} = T_s \dot{\xi} = \sigma, \quad (14.50)$$

где T_s — время двигателя.

Уравнение жесткой обратной связи согласно рис. 14.7 будет

$$\xi = \xi. \quad (14.51)$$

Уравнение всей системы регулирования. Итак, для данной системы автоматического регулирования имеем уравнения объекта (14.29) с граничными условиями (14.38) и (14.45) или (14.46) и уравнения регулятора (14.47), (14.49), (14.50) и (14.51).

Решение уравнений в частных производных (14.29), как известно, можно записать в виде следующей суммы некоторых двух функций от аргументов $(t - \gamma T_0 \lambda)$ и $(t + \gamma T_0 \lambda)$:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \Phi'(t - \gamma T_0 \lambda) + \Phi''(t + \gamma T_0 \lambda), \\ \Psi &= \frac{1}{\gamma} [\Phi'(t - \gamma T_0 \lambda) - \Phi''(t + \gamma T_0 \lambda)] \end{aligned} \right\} \quad (14.52)$$

(легко проверить, что при подстановке этих выражений уравнения (14.29) удовлетворяются тождественно).

Для определения функций Φ' и Φ'' используются граничные условия. При исследовании переходного процесса уравнение потребления газа в конце трубопровода (т. е. второе граничное условие) возьмем в виде (14.46). Это соответствует значению $l = L$, т. е. $\lambda = 1$. Поэтому из условия (14.46) с подстановкой (14.52) получаем

$$\Phi''(t + \gamma T_0) = \frac{1 + \gamma \left(1 - \frac{k}{2}\right)}{1 - \gamma \left(1 - \frac{k}{2}\right)} \Phi'(t - \gamma T_0),$$

откуда

$$\Phi''(t) = b \Phi'(t - \tau), \quad (14.53)$$

где обозначено

$$b = \frac{1 + \gamma \left(1 - \frac{k}{2}\right)}{1 - \gamma \left(1 - \frac{k}{2}\right)}, \quad \tau = 2\gamma T_0. \quad (14.54)$$

Для начала трубопровода, где $\lambda = 0$, из (14.52) с учетом (14.53) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi'(t) + \Phi''(t) = \Phi'(t) + b \Phi'(t - \tau), \\ \Psi_1 &= \frac{1}{\gamma} [\Phi'(t) - \Phi''(t)] = \frac{1}{\gamma} [\Phi'(t) - b \Phi'(t - \tau)]. \end{aligned} \right\} \quad (14.55)$$

К этим уравнениям надо присоединить первое граничное условие (14.38) и уравнения регулятора.

Запишем теперь все уравнения системы регулирования в символической операторной форме, заметив предварительно, что согласно § 14.1 равенство (14.53) в операторной форме имеет вид

$$\Phi'' = b e^{-\tau p} \Phi'. \quad (14.56)$$

В результате все указанные уравнения системы регулирования будут:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= (1 + b e^{-\tau p}) \Phi', \\ \Psi_1 &= \frac{1}{\gamma} (1 - b e^{-\tau p}) \Phi', \\ \Phi_1 + \Psi_1 &= \xi, \\ (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) \eta &= -k_1 \Phi_1, \\ \sigma &= \eta - \xi, \quad T_s p \xi = \sigma, \quad \xi = \xi \end{aligned} \right\} \quad (14.57)$$

или, после объединения некоторых уравнений,

$$\left. \begin{aligned} \left[(1 + b e^{-\tau p}) + \frac{1}{\gamma} (1 - b e^{-\tau p}) \right] \Phi' &= \xi, \\ (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) \eta &= -k_1 (1 + b e^{-\tau p}) \Phi', \\ (T_s p + 1) \xi &= \eta. \end{aligned} \right\} \quad (14.58)$$

Исключив отсюда переменные ξ и η , приходим к одному дифференциальному уравнению данной системы автоматического регулирования:

$$\{(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)(T_s p + 1)[(1 + be^{-\tau p}) + \frac{1}{\gamma}(1 - be^{-\tau p})] + k_1(1 + be^{-\tau p})\} \Phi' = 0,$$

которое преобразуется к виду

$$\left\{ \left[(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)(T_s p + 1) + \frac{k_1 \gamma}{\gamma + 1} \right] + b \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left[(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)(T_s p + 1) + \frac{k_1 \gamma}{\gamma - 1} \right] e^{-\tau p} \right\} \Phi' = 0. \quad (14.59)$$

Это уравнение имеет в основном тот же вид, что и уравнение системы с запаздыванием (например, (14.19) и (14.20)). Здесь оно определяет величину Φ' , через которую затем находятся из выпенписанных соотношений регулируемая величина φ_1 и другие. Параметр τ в этом уравнении согласно (14.54) и (14.30) вычисляется по формуле

$$\tau = 2 \frac{L}{a}, \quad (14.60)$$

т. е. τ есть удвоенное время прохождения звука в газе по данному трубопроводу.

Уравнение системы регулирования без учета волновых процессов. Интересно сравнить полученное дифференциально-разностное уравнение (14.59) с тем, которое получилось бы, если не учитывать волновых явлений в трубопроводе. Будем считать, что весь газ в трубопроводе движется, как единая масса с единой скоростью и давлением, при этом учтем, конечно, сжимаемость газа.

Будем считать, что приток и потребление газа в единицу времени в этом случае будут $G_1 = G_1(x)$, $G_2 = G_2(p)$. Изменение количества газа, находящегося в трубопроводе, в единицу времени будет $G_1 - G_2$; но

$$G_1 - G_2 = (G_1 - G^0) - (G_2 - G^0) = \Delta G_1 - \Delta G_2 - \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} \right)^0 \Delta x - \left(\frac{\partial G_2}{\partial p} \right)^0 \Delta p;$$

используя (14.35), (14.36) и (14.27), получим

$$G_1 - G_2 = \frac{G^0}{k} \left[\xi - \frac{k p^0}{G^0} \left(\frac{\partial G_2}{\partial p} \right)^0 \varphi \right]. \quad (14.61)$$

С другой стороны, количество газа (по весу) равно $g \rho FL$, так как FL есть объем трубопровода. Поэтому изменение количества газа в единицу времени, используя (14.24) и соотношение $\frac{\rho^0}{\rho} \approx 1$, запишем в виде

$$G_1 - G_2 = \frac{d}{dt} (g \rho FL) = \frac{g FL}{a^2} \frac{dp}{dt}$$

или, с учетом (14.25), (14.27) и (14.37),

$$G_1 - G_2 = \frac{G^0 L}{k w^0} \dot{\varphi}. \quad (14.62)$$

Сравнивая (14.61) и (14.62), получаем искомое уравнение регулируемого объекта (трубопровода) без учета волновых процессов:

$$T_0 \ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi} = \xi, \quad (14.63)$$

где

$$T_0 = \frac{L}{w^0}, \quad \beta = \frac{k p^0}{G^0} \left(\frac{\partial G_2}{\partial p} \right)^0. \quad (14.64)$$

Здесь T_0 — прежняя постоянная объекта (14.30), а β — новый постоянный параметр объекта, в выражении которого значение частной производной определяется для заданного объекта графически, аналогично рис. 14.8, или же расчетным путем.

К этому же уравнению объекта присоединяются прежние уравнения регулятора (14.47) — (14.51), где φ_1 заменяется на φ . Следовательно, в символической операторной форме уравнения данной системы регулирования давления без учета волновых явлений будут:

$$\left. \begin{aligned} (T_0 p + \beta) \varphi &= \xi, \\ (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) \eta &= -k_1 \varphi, \\ (T_s p + 1) \xi &= \eta \end{aligned} \right\} \quad (14.65)$$

или

$$[(T_0 p + \beta) (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) (T_s p + 1) + k_1] \varphi = 0. \quad (14.66)$$

Следовательно, в этом случае вместо дифференциального уравнения третьего порядка с запаздывающим аргументом (14.59) получается обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка.

§ 14.3. Исследование устойчивости и качества регулирования

В § 14.1 были приведены уравнения линейных систем с запаздыванием, которые для разомкнутой цепи имели вид

$$Q(p) x_2 = R(p) e^{-\tau p} x_1; \quad (14.67)$$

а для замкнутой системы

$$D(p) x = N(p) f, \quad (14.68)$$

где

$$D(p) = Q(p) + R(p) e^{-\tau p}, \quad N(p) = \frac{Q(p) R_1(p)}{Q_1(p)}. \quad (14.69)$$

В § 14.2 при выводе уравнений для одной линейной системы автоматического регулирования с распределенными параметрами было показано, что они сводятся к тому же самому виду во всех тех случаях, когда распределенное звено системы описывается волновым уравнением в частных производных типа (14.31) или (14.29).

Характеристическое уравнение для таких систем с распределенными параметрами и систем с запаздыванием имеет согласно (14.69) трансцендентный вид

$$Q(p) + R(p) e^{-\tau p} = 0, \quad (14.70)$$

где $Q(p)$ и $R(p)$ — обыкновенные многочлены, причем степень $R(p)$ обычно меньше или в крайнем случае равна степени $Q(p)$.

Уравнение (14.70) записывается иногда и в другом виде, например:

$$Q(p) e^{\tau p} + R(p) e^{-\tau p} = 0$$

или

$$Q(p) \operatorname{ch} \tau p + R(p) \operatorname{sh} \tau p = 0.$$

Могут встретиться уравнения и более сложного вида:

$$\begin{aligned} Q(p) + R_1(p) e^{-\tau_1 p} + R_2(p) e^{-\tau_2 p} &= 0, \\ Q(p) e^{\tau p} + R_1(p) e^{-\tau p} + R_2(p) &= 0 \end{aligned}$$

и т. п.

Рассмотрим характеристическое уравнение вида (14.70). Известно, что решение дифференциально-разностных уравнений (14.68) можно записать в виде некоторых рядов и что для затухания этого решения, т. е. для устойчивости системы, необходимо и достаточно, чтобы все корни трансцендентного характеристического уравнения (14.70) имели отрицательные вещественные части. Но в отличие от обыкновенного алгебраического уравнения здесь вследствие наличия множителя $e^{-\tau p}$ уравнение может иметь бесконечное количество корней.

К указанным системам применимы критерий устойчивости Михайлова и критерий устойчивости Найквиста в их прежних формулировках (см. главу 6). Однако здесь вследствие наличия множителя $e^{-j\omega\tau}$ существенно изменяется очертание как кривой Михайлова замкнутой системы

$$D(j\omega) = Q(j\omega) + R(j\omega)e^{-j\omega\tau}, \quad (14.71)$$

так и амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой цепи, построенной по частотной передаточной функции

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} e^{-j\omega\tau}, \quad (14.72)$$

причем размыкание системы производится по определенному правилу, которое дается ниже.

Из кривой Михайлова не получается таких простых алгебраических выражений, как в § 6.3. Как следствие, для устойчивости линейных систем первого и второго порядка с запаздыванием, оказывается, уже недостаточно только положительности коэффициентов, а для систем

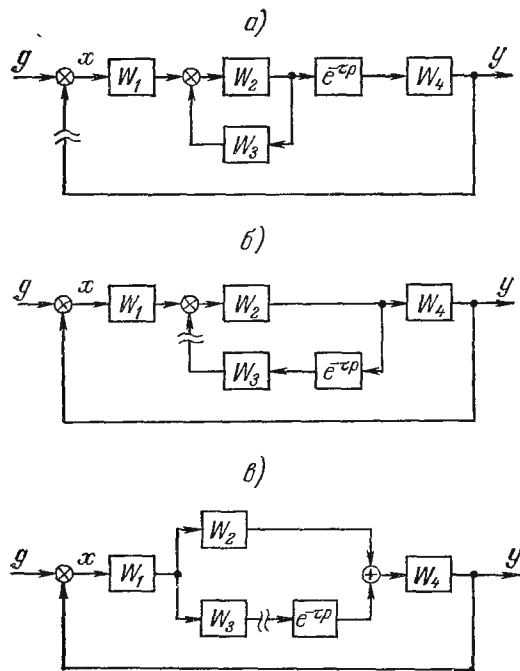


Рис. 14.9.

третьего и более высокого порядка с запаздыванием неприменимы критерии устойчивости Вышнеградского, Рауса и Гурвица.

Ниже будет рассмотрено определение устойчивости только по критерию Найквиста, так как его использование для этой цели оказывается наиболее простым.

Построение амплитудно-фазовой характеристики и исследование устойчивости по критерию Найквиста лучше всего производить, если передаточная функция разомкнутой системы представлена в виде (14.72). Для получения этого необходимо произвести соответствующим образом размыкание системы.

Для случая, изображенного на рис. 14.9, а, размыкание можно сделать в любом месте главной цепи, например так, как это показано. Тогда передаточная функция разомкнутой системы будет

$$W(p) = W_1(p) \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)} e^{-\tau p} W_4(p),$$

что совпадает по форме с (14.72).

Для случая, изображенного на рис. 14.9, б, размыкание главной цепи дает выражение передаточной функции разомкнутой системы, неудобное для дальнейших исследований:

$$W(p) = W_1(p) \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p) W_3(p) e^{-p\tau}} W_4(p).$$

В этом случае удобнее разомкнуть систему по цепи местной обратной связи. Тогда передаточная функция разомкнутой системы приобретает вид, совпадающий с (14.72):

$$W(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p) W_1(p) W_4(p)} W_3(p) e^{-p\tau}.$$

Наконец, в случае, изображенном на рис. 14.9, в, при размыкании системы в указанном месте получаем выражение, также совпадающее с (14.72):

$$W(p) = W_3(p) e^{-p\tau} \frac{W_4(p) W_1(p)}{1 + W_4(p) W_1(p) W_2(p)}.$$

Заметим, что при наличии характеристического уравнения, записанного в виде (14.70), передаточная функция разомкнутой системы может быть записана сразу в виде (14.72), без нахождения места размыкания на структурной схеме. Записанное в таком виде выражение может быть использовано далее для исследования устойчивости.

Частотную передаточную функцию (14.72) можно представить в виде

$$W(j\omega) = W_0(j\omega) e^{-j\omega\tau}. \quad (14.73)$$

Кроме того,

$$W_0(j\omega) = A_0(\omega) e^{j\psi_0(\omega)}, \quad (14.74)$$

где $A_0(\omega)$ — модуль и $\psi_0(\omega)$ — фаза (аргумент) системы без запаздывания. Модуль второго сомножителя (14.73) равен единице, а его аргумент равен $\Delta\psi = \omega\tau$. Поэтому, представив выражение (14.72) в виде

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\psi(\omega)},$$

получаем значение модуля результирующей частотной передаточной функции

$$|W(j\omega)| = A(\omega) = A_0(\omega) \quad (14.75)$$

и фазы

$$\psi(\omega) = \psi_0(\omega) - \omega\tau. \quad (14.76)$$

Таким образом, наличие звена с запаздыванием не меняет модуля и вносит только дополнительный фазовый сдвиг.

На рис. 14.10 изображена амплитудно-фазовая характеристика, соответствующая (14.74). Сплошной линией показана исходная характеристика при $\tau = 0$, а пунктиром — характеристика, которая получается при наличии постоянного запаздывания $\tau \neq 0$.

Из этих характеристик видно, что наличие дополнительного фазового сдвига $\Delta\psi = \omega\tau$ «закручивает» годограф, особенно в высокочастотной части, по часовой стрелке. Это, вообще говоря, ухудшает условия устойчивости, так как вся кривая приближается к точке $(-1, j0)$. Иногда в особых случаях, при сложной форме годографа $W_0(j\omega)$, введение постоянного запаздывания может улучшить условия устойчивости.

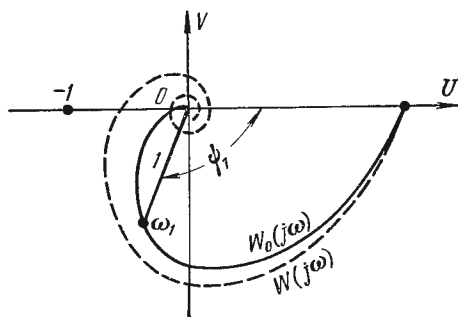


Рис. 14.10.

По имеющемуся годографу $W_0(j\omega)$ можно определить критическое значение времени запаздывания $\tau = \tau_{кр}$, при котором система оказывается на границе колебательной устойчивости.

Для этой цели на годографе $W_0(j\omega)$ отыскивается точка, для которой модуль равен единице (рис. 14.10). Частоту, соответствующую этой точке, обозначим ω_1 , а фазу — ψ_1 . При введении постоянного запаздывания $\tau = \tau_{кр}$ условие совпадения этой точки с точкой $(-1, j0)$ запишется следующим образом:

$$\psi_1 - \omega_1 \tau_{кр} = -\pi,$$

откуда критическое значение запаздывания

$$\tau_{кр} = \frac{\pi + \psi_1}{\omega_1}. \quad (14.77)$$

Если подобных «опасных» точек будет несколько, то необходимо сделать расчеты для всех точек и взять наименьшее значение $\tau_{кр}$.

Заметим, что частота ω_1 равна частоте среза л. а. х., $\omega_1 = \omega_{ср}$ (см., например, рис. 4.10 или 6.25). Поэтому нахождение ω_1 и ψ_1 удобно делать при наличии построенных л. а. х. и л. ф. х. В этом случае, вообще, расчеты по определению устойчивости могут совмещаться с определением качества системы частотными методами.

Л. а. х. системы с запаздыванием совпадает с л. а. х. исходной системы (без запаздывания). Дополнительный фазовый сдвиг, который надо учесть при построении л. ф. х. системы с запаздыванием, определяется (14.76).

В некоторых случаях могут использоваться аналитические расчеты. Так, например, рассмотрим статическую систему с одной постоянной времени. Частотная передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_0(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}. \quad (14.78)$$

Приравняем модуль единице:

$$\frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = 1.$$

Отсюда находится частота, соответствующая опасной точке:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{K^2 - 1}}{T}.$$

Фазовый сдвиг на этой частоте

$$\psi_1 = -\arctg \omega_1 T = -\arctg \sqrt{K^2 - 1}.$$

По формуле (14.77) находим критическое запаздывание:

$$\tau_{кр} = \frac{\pi - \arctg \sqrt{K^2 - 1}}{\omega_1} = T \frac{\pi - \arctg \sqrt{K^2 - 1}}{\sqrt{K^2 - 1}}. \quad (14.79)$$

По этому выражению на рис. 14.11 построена область устойчивости в координатах «общий коэффициент усиления — относительное запаздывание».

Рассмотрим более сложный случай астатической системы с одной постоянной времени когда частотная передаточная функция разомкнутой

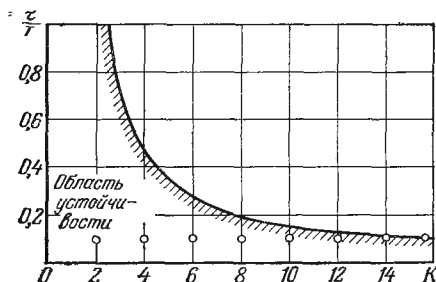


Рис. 14.11.

системы имеет вид

$$W_0(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega T)}. \quad (14.80)$$

Приравняем модуль единице:

$$\frac{K}{\omega \sqrt{1+\omega^2 T^2}} = 1.$$

Отсюда находится частота, соответствующая опасной точке:

$$\omega_1 = \frac{1}{T\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1+4K^2 T^2} - 1}.$$

Фазовый сдвиг на этой частоте

$$\psi_1 = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega_1 T = -\frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1+4K^2 T^2} - 1}.$$

Критическое запаздывание на основании формулы (14.77)

$$\tau_{кр} = \frac{\pi + \psi_1}{\omega_1} = \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1+4K^2 T^2} - 1}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1+4K^2 T^2} - 1}} T. \quad (14.81)$$

Если $T = 0$, то из последней формулы, сделав предельный переход, находим

$$\tau_{кр} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{K}. \quad (14.82)$$

Пусть $K = 10 \text{ сек}^{-1}$ и $T = 0,2 \text{ сек}$. Тогда критическое запаздывание, при котором система теряет устойчивость,

$$\tau_{кр} = \frac{1,57 - \operatorname{arctg} 1,25}{1,25} 0,2 = 0,116 \text{ сек},$$

а при $T = 0$

$$\tau_{кр} = \frac{1,57}{10} = 0,157 \text{ сек}.$$

Оценку качества регулирования в системах с запаздыванием удобнее всего производить при помощи частотных критериев качества (§ 8.5 и § 8.9). Запас устойчивости можно определять по величине показателя колебательности, а быстродействие — по полосе пропускания. Как и в случае систем без запаздывания, заданное значение показателя колебательности будет получено, если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы, построенная по выражению (14.73), не будет заходить в запретную зону, окружающую точку $(-1, j0)$, что изображено на рис. 8.27. Для расчета могут применяться логарифмические характеристики (рис. 8.30).

Построение переходных характеристик удобнее всего производить при помощи вещественных частотных характеристик (§ 7.5).

Для построения переходного процесса могут применяться графические и численно-графические методы, а также вычислительные машины.

ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 15.1. Общие сведения

Линейной системой *импульсного* регулирования называется такая система автоматического регулирования, которая кроме звеньев, описываемых обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями, содержит *импульсное звено*, преобразующее непрерывное входное воздействие в равностоящие друг от друга по времени импульсы.

В качестве импульсного звена (элемента) может использоваться падающая дужка гальванометра (рис. 1.28), генерирующая прямоугольные импульсы (рис. 15.1), у которых либо высота (рис. 15.1, а), либо ширина

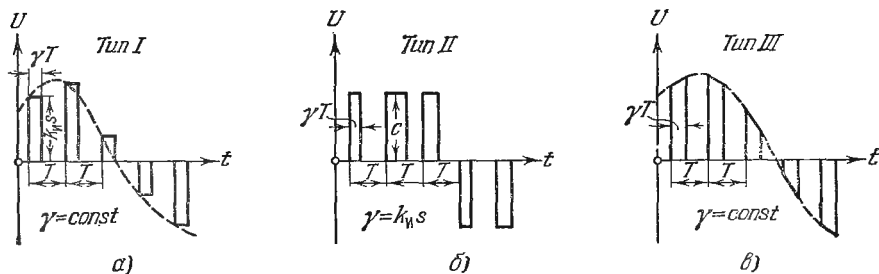


Рис. 15.1.

(рис. 15.1, б) пропорциональная непрерывной величине, поступающей на это звено в момент времени, совпадающий с началом импульса.

Кроме того, импульсным звеном может служить устройство типа ключа, которое (как и падающая дужка) по какой-то внешней причине производит замыкание цепи короткими импульсами через равные промежутки времени. Отличие импульсного звена типа ключа от импульсного звена типа падающей дужки состоит в том, что оно «вырезает» определенные участки из непрерывно изменяющегося воздействия (рис. 15.1, в). И те и другие импульсные звенья могут быть осуществлены различными электромеханическими или электронными устройствами. Будем называть их соответственно импульсными звеньями типа I, типа II и типа III (рис. 15.1, а, б, в).

В качестве примера возьмем импульсную систему автоматического регулирования температуры θ (рис. 1.27). Структурная схема ее дана на рис. 15.2, а. Регулируемым объектом может являться, например, тепловой двигатель, температура в котором θ должна поддерживаться постоянной путем изменения положения $\xi = \varphi$ шторок (регулирующего органа), т. е. путем изменения интенсивности охлаждения двигателя.

В общем случае любая импульсная линейная система регулирования будет содержать ряд непрерывных звеньев, описываемых обыкновенными

линейными дифференциальными уравнениями, и хотя бы одно прерывное — импульсное звено. Поэтому можно изобразить обобщенную структурную схему импульсной системы регулирования так, как показано на рис. 15.2, б, где все непрерывные звенья сведены в один блок — непрерывную часть системы. Последняя может иметь какую угодно структуру (любой сложности, с обратными связями и т. п.). В данном примере в линейную часть входят: приводной двигатель, регулирующий орган (шторки), регулируемый объект и чувствительный элемент (термометр сопротивления с гальванометром).

В качестве импульсной системы можно также рассматривать системы регулирования с управляющими цифровыми вычислительными машинами

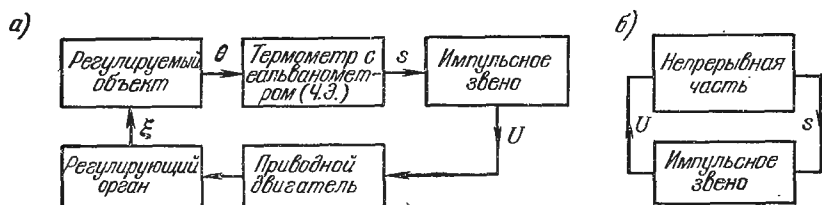


Рис. 15.2.

(ЦВМ). Дискретный характер получения и обработки информации в ЦВМ приводит к так называемому квантованию по времени, что и позволяет применить здесь теорию импульсных систем. Однако системы с ЦВМ оказываются более сложными вследствие так называемого квантования по уровню, что делает их нелинейными. Поэтому теория импульсных систем в случае использования ЦВМ применима только для приближенных исследований, когда задача может быть линеаризована. Более подробно системы с ЦВМ будут рассмотрены в главе 24.

Импульсные фильтры. Ограничимся случаем, когда на выходе импульсного элемента импульсы отстоят друг от друга на одинаковые интервалы времени, продолжительность их также одинакова и они отличаются друг от друга только по амплитуде (тип I и тип III на рис. 15.1).

Импульсная система может быть схематически представлена в виде соединения импульсного звена и непрерывной части. Последовательность импульсов на выходе импульсного звена после прохождения через непрерывную часть вследствие сглаживающих свойств последней превращается в непрерывные величины на выходе.

Обычно схема импульсной системы такова, что сигнал ошибки, полученный в элементе сравнения, поступает затем на импульсный элемент (рис. 15.3). Импульсное звено на этой схеме изображено условно в виде ключа, который замыкается с периодом T . Если время замыкания ключа мало по сравнению с периодом чередования T и постоянными времени непрерывной части и если сигнал на входе ключа в течение времени, когда он замкнут, практически постоянен, то последовательность конечных по продолжительности импульсов на выходе ключа можно заменить последовательностью дельта-функций. Величина каждой дельта-функции (точнее, интеграла от нее по времени) будет пропорциональной значению сигнала на входе ключа в момент его замыкания.

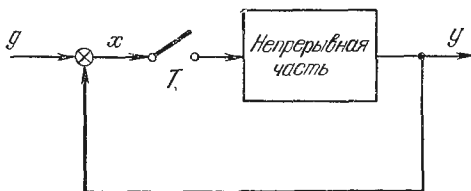


Рис. 15.3.

Поскольку ключ замыкается в определенные моменты времени ($0, T, 2T, 3T$ и т. д.), то сигнал на входе необходимо рассматривать именно в эти моменты времени. Хотя на выходе непрерывной части сигнал и непрерывен, будем рассматривать его только в отдельные дискретные моменты времени.

Непрерывную часть совместно с ключом на ее входе будем называть *импульсным фильтром* (рис. 15.4). Более строго импульсный фильтр следует

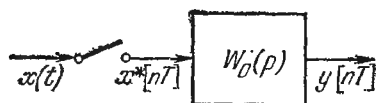


Рис. 15.4.

определить как устройство, которое получает входные сигналы и одновременно дает выходные сигналы лишь в определенные моменты времени, например $T, 2T, 3T$ и т. д. На входе непрерывной части с передаточной функцией $W_0(p)$ действует дискретная функция $x^*[nT]$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ и т. д.

В соответствии со сказанным эта функция может быть представлена в виде последовательности дельта-функций.

На выходе будет непрерывная функция, определяемая в эти же дискретные моменты времени: $y(t) = y[nT]$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2$ и т. д.

Решетчатые функции. Введем понятие *решетчатой функции* времени $f[nT]$, или в сокращенной записи $f[n]$, значения которой определены в дискретные моменты времени $t = nT$, где n — целое число, а T — период повторения. Операция замены непрерывной функции решетчатой

$$f[n] = f(t) |_{t=nT} \quad (15.1)$$

показана на рис. 15.5. Изображенные на рис. 15.5, а ординаты представляют собой так называемые дискреты исходной непрерывной функции $f(t)$ при $t = nT$ (рис. 15.5, а).

Дискреты $f(t)$ могут быть также определены для смещенных моментов времени $t = nT + \Delta T = (n + \epsilon)T$. Смещение $\Delta T = \text{const}$ может быть положительной или отрицательной величиной при выполнении условия $|\Delta T| < T$. Относительное смещение $\epsilon = \Delta T \cdot T^{-1}$ по модулю меньше единицы.

Образование *смещенной решетчатой функции* $f[nT, \Delta T]$, или в сокращенной записи $f[n, \epsilon]$, из непрерывной функции $f(t)$ для случая $\Delta T > 0$ изображено на рис. 15.5, в.

В последующем изложении будем считать, что в решетчатой функции $f[n, \epsilon]$ аргумент $n \geq 0$ и параметр $\epsilon > 0$. В случае необходимости рассмотрения функции $f[n, \epsilon_0]$ с отрицательным параметром $\epsilon_0 < 0$ дискретное время можно представить в виде $[(n - 1) + (1 + \epsilon_0)]T = [(n - 1) + \epsilon]T$. Тогда решетчатая функция может быть записана в виде $f[n - 1, \epsilon]$, где $\epsilon = 1 + \epsilon_0$.

Решетчатая функция не обязательно должна формироваться из некоторой исходной непрерывной. Любая числовая последовательность некоторой величины, определенная в дискретные равноотстоящие моменты времени, может быть представлена в виде решетчатой функции.

Заметим, что обратная задача — формирование непрерывной функции из решетчатой — не может быть решена однозначно, так как функции, задан-

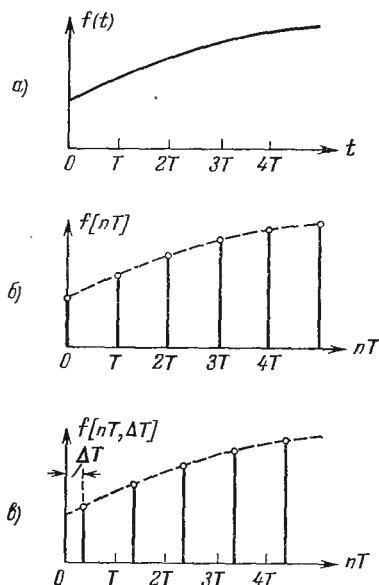


Рис. 15.5.

ной в дискретные моменты времени, может соответствовать бесконечное множество непрерывных функций. Это показано на рис. 15.6. Непрерывные функции, совпадающие с заданными дискретами, называются *огibaющими решетчатой функции*. Так, например, огibaющая может быть изображена в виде ступенчатой функции (кривая 3 на рис. 15.6).

Введем также понятие *основной огibaющей функции*. Под основной огibaющей будем понимать непрерывную функцию, совпадающую с заданными дискретами, которая может быть получена как результат решения дифференциального уравнения, порядок которого наименьший по сравнению с другими возможными огibaющими, а для периодических решетчатых функций,

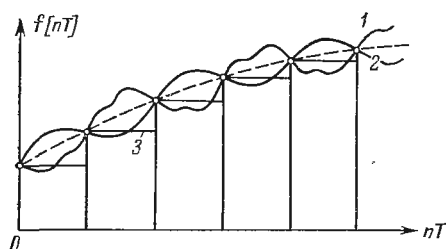


Рис. 15.6.

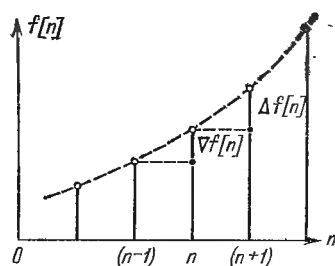


Рис. 15.7.

кроме того, выполняется требование минимальности значений частот гармоник. Так, например, решетчатой функции $e^{-\alpha nT}$ могут соответствовать огibaющие $e^{-\alpha t}$ и $e^{-\alpha t} (\cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t)$, где $\omega_0 = 2\pi kT^{-1}$, k — целое число, β — любое число. Однако первая из них (основная огibaющая) может быть получена в результате решения дифференциального уравнения первого порядка, тогда как вторая — в результате решения дифференциального уравнения второго порядка.

Аналогом первой производной непрерывной функции для решетчатой функции является либо *первая прямая разность*

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n], \quad (15.2)$$

либо *первая обратная разность*

$$\nabla f[n] = f[n] - f[n-1]. \quad (15.3)$$

Обе эти разности показаны на рис. 15.7. Разности могут быть определены и для смещенных решетчатых функций $f[n, \varepsilon]$. Однако формулы для $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon = 0$ здесь и далее оказываются идентичными, вследствие чего в дальнейшем изложении принято $\varepsilon = 0$.

Прямая разность определяется в момент времени $t = nT$ по будущему значению решетчатой функции при $t = (n+1)T$. Это можно сделать в тех случаях, когда будущее значение известно.

Обратная разность определяется для момента времени $t = nT$ по прошлому значению решетчатой функции в момент времени $t = (n-1)T$.

Аналогом второй производной непрерывной функции для решетчатой функции служат *вторые разности*: прямая

$$\Delta^2 f[n] = \Delta f[n+1] - \Delta f[n] = f[n+2] - 2f[n+1] + f[n] \quad (15.4)$$

и обратная

$$\nabla^2 f[n] = \nabla f[n] - \nabla f[n-1] = f[n] - 2f[n-1] + f[n-2]. \quad (15.5)$$

Приведенные выше замечания относительно возможности вычисления прямой и обратной разностей сохраняют свою силу и здесь.

Могут определяться и высшие прямая и обратная разности. Для вычисления k -й разности возможно использование рекуррентных соотношений

$$\Delta^k f[n] = \Delta^{k-1} f[n+1] - \Delta^{k-1} f[n], \quad (15.6)$$

$$\nabla^k f[n] = \nabla^{k-1} f[n] - \nabla^{k-1} f[n-1] \quad (15.7)$$

или формул общего вида

$$\Delta^k f[n] = \sum_{v=0}^k (-1)^v C_{k,v}^v f[n+k-v], \quad (15.8)$$

$$\nabla^k f[n] = \sum_{v=0}^k (-1)^v C_{k,v}^v f[n-v], \quad (15.9)$$

где биномиальные коэффициенты (число сочетаний)

$$C_{k,v}^v = \frac{k!}{v!(k-v)!}. \quad (15.10)$$

Обратные разности обладают важной особенностью. Если решетчатая функция определена только для положительных значений аргумента, т. е. $f[n] \equiv 0$ при $n < 0$, то, как следует из (15.9), в точке $n = 0$ k -я разность

$$\nabla^k f[0] = f[0] \quad (15.11)$$

для любого целого положительного k .

Аналогами интеграла непрерывной функции в пределах от 0 до t для решетчатой функции являются неполная сумма

$$\sigma[n] = \sum_{m=0}^{n-1} f[m] = \sum_{v=1}^n f[n-v] \quad (15.12)$$

и полная сумма

$$\sigma_0[n] = \sigma[n] + f[n] = \sum_{m=0}^n f[m] = \sum_{v=0}^n f[n-v]. \quad (15.13)$$

Отличие (15.13) от (15.12) заключается в том, что значение $f[n]$ в момент времени $t = nT$ также участвует в формировании результата.

Разностные уравнения. В качестве аналогов дифференциальных уравнений можно рассматривать *разностные уравнения (уравнения в конечных разностях)*. При использовании прямых разностей неоднородные линейные разностные уравнения имеют вид

$$b_0 \Delta^m y[n] + b_1 \Delta^{m-1} y[n] + \dots + b_m y[n] = f[n], \quad (15.14)$$

где $f[n]$ — заданная, а $y[n]$ — искомая решетчатые функции. При $f[n] \equiv 0$ уравнение (15.14) становится однородным разностным уравнением, решением которого будет $y[n]$.

При использовании (15.8) разностное уравнение (15.14) можно записать в другом виде:

$$a_0 y[n+m] + a_1 y[n+m-1] + \dots + a_m y[n] = f[n]. \quad (15.15)$$

Коэффициенты этого уравнения определяются из зависимости

$$a_k = \sum_{v=0}^k (-1)^{k-v} b_v C_{m-v}^{k-v}, \quad (15.16)$$

где биномиальные коэффициенты

$$C_{m-v}^{k-v} = \frac{(m-v)!}{(k-v)! (m-k)!}. \quad (15.17)$$

При использовании обратных разностей уравнение в конечных разностях будет

$$b_0 \nabla^m y[n] + b_1 \nabla^{m-1} y[n] + \dots + b_m y[n] = f[n]. \quad (15.18)$$

С учетом формулы (15.9) последнее выражение приобретает вид

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_m y[n-m] = f[n]. \quad (15.19)$$

Коэффициенты последнего уравнения определяются выражениями

$$a_{m-k} = \sum_{v=0}^k (-1)^{m-k} b_v C_{m-v}^{k-v}, \quad (15.20)$$

$$C_{m-v}^{k-v} = \frac{(m-v)!}{(k-v)! (m-k)!}. \quad (15.21)$$

Разностные уравнения можно рассматривать как рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять значения $y[n+m]$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ для заданных начальных значений $y[0], y[1], \dots, y[m-1]$ и уравнения вида (15.15) или значения $y[n]$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ для заданных начальных значений $y[n-m], y[n-m+1], \dots, y[n-1]$ и уравнения вида (15.19). Такие вычисления легко машинизируются, а также не представляют никаких принципиальных трудностей и при ручном счете (кроме, конечно, затрат времени) даже в случае, когда коэффициенты разностных уравнений a_i ($i = 0, 1, \dots, m$) с течением времени изменяются. Это отличает разностные уравнения от их непрерывных аналогов — дифференциальных уравнений.

Общее решение однородного разностного уравнения при некрратных корнях характеристического уравнения может быть записано следующим образом:

$$y[n] = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n + \dots + C_m z_m^n, \quad (15.22)$$

где z_i ($i = 1, 2, \dots, m$) — корни характеристического уравнения

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m = 0, \quad (15.23)$$

а C_i — произвольные постоянные.

Из (15.22), в частности, вытекает условие того, чтобы свободное движение системы, описываемой разностным уравнением (15.15), было бы затухающим (условие устойчивости):

$$|z_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (15.24)$$

Для получения возможности исследования решений разностных уравнений в общем виде широко используются дискретное преобразование Лапласа, z -преобразование, w -преобразование, а также частотные методы, которые будут изложены ниже.

§ 15.2. Использование z -преобразования

Для решетчатых функций времени может быть введено понятие *дискретного преобразования Лапласа*, определяемое формулой

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] e^{-pnT}. \quad (15.25)$$

Для смещенных решетчатых функций может быть записано аналогичное выражение:

$$F^*(p, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n, \varepsilon] e^{-pnT}. \quad (15.26)$$

Формулы (15.25) и (15.26) можно представить в символической записи аналогично (7.20):

$$F^*(p) = D \{f[n]\}, \quad (15.27)$$

$$F^*(p, \varepsilon) = D_{\varepsilon} \{f[n, \varepsilon]\}. \quad (15.28)$$

В приведенных формулах, как и в случае непрерывного преобразования Лапласа, комплексная величина $p = c + j\omega$, где c — абсцисса абсолютной сходимости. Если $c < \infty$, то ряд, определяемый формулами (15.25) и (15.26), сходится и решетчатой функции соответствует некоторое изображение.

Как следует из (15.25) и (15.26), изображение решетчатой функции является функцией величины e^{pT} . Для смещенных решетчатых функций в изображение будет входить, кроме того, параметр ε .

Для исследования импульсных систем большое распространение получило так называемое z -преобразование, которое связано с дискретным преобразованием Лапласа и вытекает из него. Применительно к z -преобразованию ниже будут рассмотрены основные свойства и теоремы дискретного преобразования Лапласа.

Под z -преобразованием понимается изображение несмещенной или смещенной решетчатых функций, определяемое формулами

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}, \quad F(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n, \varepsilon] z^{-n}. \quad (15.29)$$

В этих формулах введено новое обозначение $z = e^{pT}$. Из них следует, что z -преобразование практически совпадает с дискретным преобразованием Лапласа и отличается только аргументом изображения.

Таким образом, решетчатая функция времени (оригинал) заменяется ее изображением (z -преобразованием). Формулы преобразования (15.29) могут быть записаны в символической форме:

$$F(z) = Z \{f[n]\}, \quad F(z, \varepsilon) = Z_{\varepsilon} \{f[n, \varepsilon]\}. \quad (15.30)$$

Формулы преобразования (15.30) могут быть записаны и для непрерывной производящей функции в виде

$$\left. \begin{aligned} F(z) &= Z \{f(t)\}, & t &= nT, \\ F(z, \varepsilon) &= Z_{\varepsilon} \{f(t)\}, & t &= (n + \varepsilon)T, \end{aligned} \right\} \quad (15.31)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

Ряды (15.29) сходятся, и изображение решетчатой функции существует, если выполняется условие, сформулированное выше для дискретного преобразования Лапласа: $c < \infty$, где c — абсцисса абсолютной сходимости.

В табл. 15.1 приведены изображения некоторых решетчатых функций, а также производящих функции времени и их изображений Лапласа.

В таблице введена *единичная импульсная решетчатая функция* [68].

$$\delta_0[n] = \begin{cases} 1 & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0. \end{cases} \quad (15.32)$$

Изображения решетчатых функций

Производящая непрерывная функция		Несмещенная решетчатая функция	z-преобразование	
оригинал	преобразование Лапласа		простое	смещенное
$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t=0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases}$	—	$\delta_0[n]$	1	0
$1(t) - 1(t-T)$	$\frac{1 - e^{-pT}}{p}$	$-\Delta 1[n] = \nabla 1[n-1]$	1	1
$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$1[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{p^2}$	nT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$Tz \left[\frac{z}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} \right]$
$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{(nT)^2}{2!}$	$\frac{T^2 z (z+1)}{2! (z-1)^3}$	$\frac{T^2 z}{2!} \left[\frac{z^2}{z-1} + \frac{2z}{(z-1)^2} + \frac{z+1}{(z-1)^3} \right]$
$\frac{t^3}{3!}$	$\frac{1}{p^4}$	$\frac{(nT)^3}{3!}$	$\frac{T^3 z (z^2 + 4z + 1)}{3! (z-1)^4}$	$\frac{T^3 z}{3!} \left[\frac{z^3}{z-1} + \frac{3z^2}{(z-1)^2} + \frac{3z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{z^2 + 4z + 1}{(z-1)^4} \right]$
$\frac{t^k}{k!}$	$\frac{1}{p^{k+1}}$	$\frac{(nT)^k}{k!}$	$\frac{T^k z R_k(z)}{k! (z-1)^{k+1}}$	$\frac{T^k z}{k!} \sum_{v=0}^k C_v^k \frac{R_v(z)}{(z-1)^{v+1}} \varepsilon^{k-v}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$	$e^{-\alpha nT} = d^n$	$\frac{z}{z-d}, \quad d = e^{-\alpha T}$	$\frac{zd^e}{z-d}, \quad d = e^{-\alpha T}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$	$1 - e^{-\alpha nT}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{zd^e}{z-d}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	$nTe^{-\alpha nT}$	$\frac{zd}{(z-d)^2}$	$\frac{zd^e \varepsilon}{z-d} + \frac{zd^{e+1}}{(z-d)^2}$

Производящая непрерывная функция		Несмещенная ретеччатая функция	z-преобразование	
оригинал	преобразование Лапласа		простое	смещенное
$\frac{t^2}{2!} e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^3}$	$\frac{(nT)^2}{2!} e^{-\alpha nT}$	$\frac{z(z+d)d^2}{2!(z-d)^3}$	$\frac{zd^e \varepsilon^2}{2!(z-d)} + \frac{zd^{e+1}}{(z-d)^2} + \frac{z(z+d)d^{e+2}}{2!(z-d)^3}$
$\frac{t^k}{k!} e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^{k+1}}$	$\frac{(nT)^k}{k!} e^{-\alpha nT}$	$\frac{zR_k(d^{-1}z)d^k}{k!(z-d)^{k+1}}$	$\frac{z}{k!} \sum_{v=0}^k C_k^v \frac{R_v(d^{-1}z)d^{e+v} \varepsilon^{k-v}}{(z-d)^{v+1}}$
$\sin \pi \frac{t}{T}$	$\frac{\pi T^{-1}}{p^2 + \pi^2 T^{-2}}$	$\sin \pi n = 0$	0	$\frac{z \sin \pi \varepsilon}{z+1}$
$\cos \pi \frac{t}{T}$	$\frac{p}{p^2 + \pi^2 T^{-2}}$	$\cos \pi n = (-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$	$\frac{z \cos \pi \varepsilon}{z+1}$
$\sin \frac{\pi}{2} \frac{t}{T}$	$\frac{0,5\pi T^{-1}}{p^2 + 0,25\pi^2 T^{-2}}$	$\sin \frac{\pi}{2} n$	$\frac{z}{z^2+1}$	$\frac{z^2 \sin \frac{\pi}{2} \varepsilon + z \cos \frac{\pi}{2} \varepsilon}{z^2+1}$
$\cos \frac{\pi}{2} \frac{t}{T}$	$\frac{p}{p^2 + 0,25\pi^2 T^{-2}}$	$\cos \frac{\pi}{2} n$	$\frac{z^2}{z^2+1}$	$\frac{z^2 \cos \frac{\pi}{2} \varepsilon - z \sin \frac{\pi}{2} \varepsilon}{z^2+1}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	$\sin \beta nT$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z^2 \sin \varepsilon \beta T + z \sin (1-\varepsilon) \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	$\cos \beta nT$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z^2 \cos \varepsilon \beta T - z \cos (1-\varepsilon) \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha nT} \sin \beta nT$	$\frac{zd \sin \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$	$zd^e \cdot \frac{z \sin \varepsilon \beta T + d \sin (1-\varepsilon) \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha nT} \cos \beta nT$	$\frac{z^2 - zd \cos \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$	$zd^e \cdot \frac{z \cos \varepsilon \beta T - d \cos (1-\varepsilon) \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$

Эта функция играет в дискретных системах такую же важную роль, как δ -функция (функция Дирака) в непрерывных системах.

Для всех непрерывных и решетчатых функций, приведенных в табл. 15.1, предполагается, что они тождественно равны нулю при $t < 0$. В некоторых изображениях табл. 15.1 использованы полиномы $R_k(z)$, которые могут быть представлены в виде определителя [136]

$$R_k = k! \begin{vmatrix} 1 & 1-z & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1-z & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{k!} & \frac{1}{(k-1)!} & \frac{1}{(k-2)!} & \dots & 1 \end{vmatrix}. \quad (15.33)$$

Некоторые частные значения этого полинома:

$$\left. \begin{aligned} R_0(z) &= 1, \\ R_1(z) &= 1, \\ R_2(z) &= z + 1, \\ R_3(z) &= z^2 + 4z + 1, \\ R_4(z) &= z^3 + 11z^2 + 11z + 1. \end{aligned} \right\} \quad (15.34)$$

Операцию нахождения z -преобразования от решетчатой функции (15.30) или от непрерывной производящей функции (15.31) можно распространить на изображение Лапласа непрерывной производящей функции

$$F_{\Pi}(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Пусть решетчатая функция $f[nT]$ получается из непрерывной функции $f(t)$ квантованием в моменты времени $t = nT$. Введем вспомогательную импульсную функцию, образованную умножением исходной непрерывной функции на последовательность δ -функций

$$f^*[nT] = \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \delta(t - nT). \quad (15.35)$$

Найдем преобразование Лапласа введенной функции

$$L\{f^*[nT]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) \delta(t - nT) e^{-pt} dt. \quad (15.36)$$

Так как интеграл от δ -функции равен единице, то имеем

$$L\{f^*[nT]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT] e^{-pnT} = F(z), \quad (15.37)$$

где $z = e^{pT}$.

Таким образом, преобразование Лапласа для импульсной функции оказывается равным z -преобразованию исходной непрерывной производящей функции.

Обозначив последовательность δ -функций вида $\delta(t - nT - \varepsilon T)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, через $\delta_T(t)$, импульсную функцию при $\varepsilon \neq 0$, можно представить следующим образом:

$$f^*[(n + \varepsilon)T] = f(t) \delta_T(t). \quad (15.38)$$

Применим к левой и правой части последнего выражения преобразование Лапласа. В соответствии с приведенным доказательством в левой части будет получено z -преобразование исходной непрерывной функции времени

$$F(e^{pT}, \varepsilon) = L\{f(t) \delta_T(t)\}. \quad (15.39)$$

Используем далее теорему свертки в комплексной области

$$F(e^{pT}, \varepsilon) = \frac{1}{j2\pi} \left[\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_{\Pi}(\lambda) \Delta(p-\lambda) d\lambda + \int_R F_{\Pi}(\lambda) \Delta(p-\lambda) d\lambda \right]. \quad (15.40)$$

Здесь $F_{\Pi}(p) = L\{f(t)\}$. Кроме того,

$$\Delta(p) = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \delta(t - nT - \varepsilon T) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^\infty e^{-p(n+\varepsilon)T} = e^{-p\varepsilon T} \sum_{n=0}^\infty e^{-pnT} = \frac{e^{-p\varepsilon T}}{1 - e^{-pT}},$$

а также

$$\Delta(p-\lambda) = \frac{e^{-p\varepsilon T}}{1 - e^{-(p-\lambda)T}}.$$

Интегрирование в (15.40) ведется по прямой $p = c + j\omega$, где c — число, большее абсциссы абсолютной сходимости, и по полуокружности радиуса $R \rightarrow \infty$. Полуокружность может быть выбрана как в левой, так и в правой части комплексной плоскости. В последнем случае внутрь контура интегрирования попадают полюсы подынтегрального выражения, определяемые равенством $e^{-(p-\lambda)T} = 1$ или $-(p-\lambda)T = j2\pi r$, $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Значение полюса $\lambda_r = p + jr \frac{2\pi}{T}$.

Для вычисления интеграла удобно обозначить

$$e^{-(p-\lambda)T} = y^{-1}, \quad (p-\lambda)T = \ln y, \quad d\lambda = -\frac{dy}{Ty}.$$

Тогда искомый интеграл можно представить в виде

$$J = \frac{1}{j2\pi} \oint \frac{F_{\Pi}(p) e^{\lambda\varepsilon T} d\lambda}{1 - e^{-(p-\lambda)T}} = \frac{1}{j2\pi} \oint \frac{\Phi(y) dy}{y-1}. \quad (15.41)$$

Для каждого из полюсов в соответствии с теоремой Коши можно записать

$$J = \frac{1}{T} \Phi(1) = \frac{1}{T} F_{\Pi}\left(p + jr \frac{2\pi}{T}\right) e^{(p+jr \frac{2\pi}{T})\varepsilon T}. \quad (15.42)$$

Окончательное выражение для искомого z -преобразования будет при $z = e^{pT}$:

$$F(e^{pT}, \varepsilon) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F_{\Pi}\left(p + jr \frac{2\pi}{T}\right) e^{(p+jr \frac{2\pi}{T})\varepsilon T}. \quad (15.43)$$

Эта формула справедлива при любом значении $\varepsilon \geq 0$. Однако при $\varepsilon = 0$ она становится неверной, так как начальный момент времени становится моментом квантования. Для этого случая можно показать [136], что

z-преобразование должно вычисляться в соответствии с выражением

$$F(e^{pT}, 0) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F_{\Pi} \left(p + jr \frac{2\pi}{T} \right) + \frac{f(0)}{2}. \quad (15.44)$$

Операцию нахождения z-преобразования по преобразованию Лапласа символически можно записать, аналогично формулам (15.30) и (15.31), в виде

$$F(z, \epsilon) = Z_{\epsilon} \{ F_{\Pi}(p) \}. \quad (15.45)$$

Формулы (15.43) и (15.44) имеют больше теоретическое, чем практическое значение. В большинстве случаев нахождение z-преобразования для изображения Лапласа $F_{\Pi}(p)$ проще осуществить переходом к оригиналу $f(t)$ известными методами и использованием затем табл. 15.1.

Рассмотрим кратко основные правила и теоремы применительно к z-преобразованию. Эти же правила и теоремы будут справедливыми и для дискретного преобразования Лапласа. Рассмотрение проведем для несмещенных решетчатых функций, но полученные результаты можно распространить и на случай смещенных функций $f[n, \epsilon]$, кроме случаев, оговоренных особо.

1. С в о й с т в о л и н е й н о с т и. Это свойство заключается в том, что изображение линейной комбинации решетчатых функций равно той же линейной комбинации их изображений. Пусть решетчатая функция определяется выражением

$$f[n] = \sum_{v=1}^N c_v f_v[n]. \quad (15.46)$$

Тогда для ее изображения можно записать

$$F(z) = \sum_{v=1}^N c_v F_v(z). \quad (15.47)$$

2. Т е о р е м а з а п а з д ы в а н и я и у п р е ж д е н и я. Рассмотрим решетчатую функцию $f[n-m]$, сдвинутую вправо (запаздывающую) на целое число тактов m . Тогда из формулы (15.29) следует, если обозначить $n-m=r$,

$$\begin{aligned} Z\{f[n-m]\} &= \sum_{r=-m}^{\infty} f[r] z^{-(m+r)} = z^{-m} \left[\sum_{r=0}^{\infty} f[r] z^{-r} + \sum_{r=-m}^{-1} f[r] z^{-r} \right] = \\ &= z^{-m} [F(z) + \sum_{r=1}^m f[-r] z^r]. \end{aligned} \quad (15.48)$$

Здесь $F(z)$ — изображение функции $f[n]$. Если исходная решетчатая функция $f[n]$ равна нулю при отрицательных значениях аргумента, то формула (15.48) упрощается:

$$Z\{f[n-m]\} = z^{-m} F(z). \quad (15.49)$$

Если сдвиг функции $f[n]$ происходит влево (упреждение) и рассматривается функция $f[n+m]$, где m — целое положительное число, то аналогично случаю запаздывания можно показать, что

$$Z\{f[n+m]\} = z^m \left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f[k] z^{-k} \right]. \quad (15.50)$$

Второе слагаемое в правой части (15.50) обращается в нуль, если $f[n] = 0$ при $n = 0, 1, \dots, m-1$.

При запаздывании на не целое число периодов $m + \xi$ приходится вводить смещенную решетчатую функцию. Пусть рассматривается функция $f[n + \varepsilon - m - \xi]$, где m — целая, а ξ — дробная часть запаздывания. Если смещение ε удовлетворяет условию $0 \leq \varepsilon < \xi$ и $f[n + \varepsilon - m - \xi] \equiv 0$ при $n + \varepsilon < m + \xi$, то можно показать, что

$$Z_{\varepsilon} \{f[n + \varepsilon - m - \xi]\} = z^{-(1+m)} \cdot F(z, 1 + \varepsilon - \xi). \quad (15.51)$$

Если $\xi \leq \varepsilon < 1$, то

$$Z_{\varepsilon} \{f[n + \varepsilon - m - \xi]\} = z^{-m} \cdot F(z, \varepsilon - \xi). \quad (15.52)$$

При использовании табл. 15.1 для нахождения изображений следует вместо ε подставить $1 + \varepsilon - \xi$ или $\varepsilon - \xi$ в соответствии с формулами (15.51) и (15.52).

3. Теорема об умножении оригинала на экспоненту (теорема смещения в области изображений). Умножим решетчатую функцию на экспоненту $e^{\lambda n T}$. Тогда из формулы (15.29) следует:

$$Z \{e^{\lambda n T} f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda n T} f[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] e^{(\lambda - p)n T} = F\left(\frac{z}{d}\right); \quad d = e^{\lambda T}. \quad (15.53)$$

Для смещенной решетчатой функции аналогичная формула имеет вид

$$Z_{\varepsilon} \{e^{\lambda n T} f[n + \varepsilon]\} = d^{\varepsilon} \cdot F\left(\frac{z}{d}, \varepsilon\right). \quad (15.54)$$

4. Теорема об умножении оригинала на степенную функцию. Пусть решетчатой функции $f[n]$ соответствует изображение $F(z)$. Тогда можно показать, что

$$Z \{(nT)^m f[n]\} = (-1)^m \cdot \frac{d^m F(e^{pT})}{dp^m} \Big|_{e^{pT}=z}. \quad (15.55)$$

Для смещенной решетчатой функции аналогичная зависимость имеет вид

$$Z_{\varepsilon} \{(n + \varepsilon)^m T^m f[n, \varepsilon]\} = \sum_{v=0}^m (-1)^v C_m^v (\varepsilon T)^{m-v} \cdot \frac{d^v F(e^{pT}, \varepsilon)}{dp^v} \Big|_{e^{pT}=z}. \quad (15.56)$$

5. Изображение разностей. Для первой прямой разности на основании (15.50)

$$\begin{aligned} Z \{\Delta f[n]\} &= Z \{f[n + 1] - f[n]\} = z [F(z) - f[0]] - F(z) = \\ &= (z - 1) F(z) - z f[0]. \end{aligned} \quad (15.57)$$

Если k — целое число, то аналогичным образом

$$Z \{\Delta^k f[n]\} = (z - 1)^k F(z) - z \sum_{v=0}^{k-1} (z - 1)^{k-1-v} \Delta^v f[0], \quad (15.58)$$

причем $\Delta^0 f[0] = f[0]$.

Если решетчатая функция $f[n]$ равна нулю в первых k точках оси времени, т. е. $f[0] = f[1] = \dots = f[k - 1] = 0$, то формула (15.58) упрощается:

$$Z \{\Delta^k f[n]\} = (z - 1)^k \cdot F(z). \quad (15.59)$$

Для первой обратной разности можно аналогичным образом найти

$$Z \{\nabla f[n]\} = Z \{f[n] - f[n - 1]\} = \frac{z - 1}{z} F(z) + z^{-1} f[-1]. \quad (15.60)$$

Если для отрицательных аргументов решетчатая функция тождественно равна нулю, то формула (15.60) упрощается:

$$Z\{\nabla f[n]\} = \frac{z-1}{z} \cdot F(z). \quad (15.61)$$

Для k -й обратной разности при $f[n] \equiv 0$ для $n < 0$

$$Z\{\nabla^k f[n]\} = \left(\frac{z-1}{z}\right)^k \cdot F(z). \quad (15.62)$$

Полученные формулы изображений прямых и обратных разностей формально напоминают формулы для нахождения изображений производных непрерывных функций. Формула (15.62) аналогична случаю изображения производной k -го порядка непрерывной функции по начальным условиям слева при нулевых их значениях. Заметим, что при $T \rightarrow 0$ (непрерывный случай) множитель в правой части стремится к пределу:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{z-1}{z}\right)^k = \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{e^{pT}-1}{e^{pT}}\right)^k = p^k T^k. \quad (15.63)$$

К такому же пределу стремится множитель $(z-1)^k$ в (15.59). Это также иллюстрирует сходство формул изображений производных и разностей.

6. И з о б р а ж е н и е с у м м. Рассмотрим вначале неполную сумму (15.12):

$$\sigma[n] = \sum_{m=0}^{n-1} f[m].$$

Составим первую прямую разность этой суммы

$$\Delta\sigma[n] = \sigma[n+1] - \sigma[n] = f[n]$$

и возьмем z -преобразование от правой и левой частей

$$Z\{\Delta\sigma[n]\} = Z\{f[n]\}.$$

На основании (15.59) имеем, далее,

$$(z-1) Z\{\sigma[n]\} = F(z).$$

Отсюда можно найти изображение неполной суммы

$$Z\{\sigma[n]\} = \frac{F(z)}{z-1}. \quad (15.64)$$

Распространяя эту зависимость на случай k -кратного суммирования можно записать

$$Z\{\sigma^k[n]\} = \frac{F(z)}{(z-1)^k}. \quad (16.65)$$

Для полной суммы (15.13) аналогичным образом можно найти первую обратную разность

$$\nabla\sigma_0[n] = \sigma_0[n] - \sigma_0[n-1] = f[n]$$

и ее изображение из (15.61)

$$Z\{\nabla\sigma_0[n]\} = \frac{z-1}{z} Z\{\sigma_0[n]\} = F(z).$$

Отсюда изображение полной суммы

$$Z\{\sigma_0[n]\} = \frac{z}{z-1} \cdot F(z). \quad (15.66)$$

Для случая k -кратного суммирования

$$Z\{\sigma_0^k[n]\} = \left(\frac{z}{z-1}\right)^k \cdot F(z). \quad (15.67)$$

Из приведенного рассмотрения вытекает справедливость равенства

$$\Delta \sigma [n] = \nabla \sigma_0 [n] = f [n]. \quad (15.68)$$

Таким образом, взятие прямой разности и взятие неполной суммы (или обратной разности и полной суммы) решетчатой функции являются обратными операциями. Роль оператора, аналогичного оператору $p = c + j\omega$ в непрерывных системах, в первом случае играет оператор $(z - 1)$, а во втором случае — оператор $\frac{z-1}{z}$. В случае перехода к пределу при $T \rightarrow 0$ обе пары операций над решетчатыми функциями сливаются и превращаются в операции дифференцирования и интегрирования непрерывных функций.

7. Изображения решетчатых функций с измененным периодом следования. Пусть рассматривается решетчатая функция с периодом следования дискрет λT , где $\lambda \neq 1$. Тогда на основании (15.29) можно записать

$$Z \{f[\lambda n T]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[\lambda n T] z^{-\lambda n} = F_{\lambda}(z^{\lambda}, \lambda T). \quad (15.69)$$

Из (15.69) следует, что при изменении периода в λ раз необходимо в изображении решетчатой функции $f[n]$ заменить z на z^{λ} и T на λT . Так, например, если рассматривается решетчатая функция $e^{-\alpha n T}$, то при введении периода λT в соответствии с табл. 15.1 изображение будет

$$F_{\lambda}(z^{\lambda}, \lambda T) = Z \{e^{-\alpha n \lambda T}\} = \frac{z^{\lambda}}{z^{\lambda} - d^{\lambda}} = \frac{z_1}{z_1 - d_1},$$

где $z_1 = z^{\lambda}$ и $d_1 = d^{\lambda}$. На рис. 15.8 построены для этого случая решетчатые функции с исходным периодом следования T (рис. 15.8, а), растянутым периодом при $\lambda > 1$ (рис. 15.8, б) и сжатым периодом при $\lambda < 1$ (рис. 15.8, в).

8. Сумма ординат решетчатой функции. Если абсцисса абсолютной сходимости решетчатой функции отрицательна ($c < 0$), то, положив в (15.29) $p = 0$, имеем

$$F(1) = \lim_{z \rightarrow 1} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]. \quad (15.70)$$

9. Конечное значение решетчатой функции. Составим первую прямую разность решетчатой функции $f[n]$ и на основании (15.47) найдем ее изображение

$$Z \{\Delta f[n]\} = (z - 1) F(z) - z f[0].$$

Далее на основании (15.70) найдем сумму ординат $\Delta f[n]$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta f[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) F(z) - f[0].$$

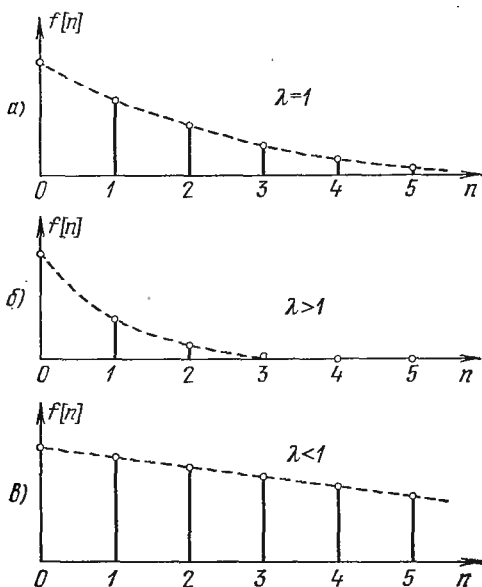


Рис. 15.8.

Кроме того, можно записать

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta f[n] = \sum_{n=0}^{\infty} (f[n+1] - f[n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} f[n] - f[0].$$

Из двух последних выражений следует:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z). \quad (15.71)$$

Если провести аналогичное рассмотрение с первой обратной разностью, то можно получить формулу для вычисления конечного значения решетчатой функции в другом виде:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z). \quad (15.72)$$

10. Начальное значение решетчатой функции. Составим первую прямую разность

$$\Delta f[n-1] = f[n] - f[n-1]$$

и на основании (15.48) найдем ее изображение

$$Z\{\Delta f[n-1]\} = (1 - z^{-1}) F(z) - f[0].$$

Рассмотрим теперь предел выражения

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Z\{\Delta f[n-1]\} = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta f[n-1] z^{-n} = 0.$$

Тогда из последних двух формул можно найти

$$f[0] = \lim_{n \rightarrow 0} f[n] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} F(z). \quad (15.73)$$

Зависимости (15.72) и (15.73) представляют собой аналоги соответствующих выражений для нахождения конечного и начального значений непрерывной функции $f(t)$ по ее изображению Лапласа:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F_{\text{л}}(p), \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p F_{\text{л}}(p).$$

11. Свертка решетчатых функций. Если

$$Z\{f_1[n]\} = F_1(z), \quad Z\{f_2[n]\} = F_2(z),$$

то можно показать, что

$$F_1(z) F_2(z) = Z\left\{\sum_{v=0}^n f_1[v] f_2[n-v]\right\} = Z\left\{\sum_{v=0}^n f_1[n-v] f_2[v]\right\}. \quad (15.74)$$

Эта формула аналогична соответствующему выражению для свертки двух непрерывных функций.

12. Формула обращения. Рассмотрим задачу нахождения решетчатой функции (оригинала) по ее изображению. Эту операцию запишем в символическом виде как обратное z -преобразование:

$$f[n] = Z^{-1}\{F(z)\}, \quad (15.75)$$

$$f[n, \varepsilon] = Z_{\varepsilon}^{-1}\{F(z, \varepsilon)\}. \quad (15.76)$$

Заметим, что аргумент изображения обладает свойством

$$z = e^{pT} = e^{pT + j2\pi k}, \quad (15.77)$$

где k — произвольное целое число. Вследствие этого изображения $F(z)$ и $F(z, \varepsilon)$ представляют собой периодическую функцию относительно мнимой части аргумента $p = \gamma + j\omega$ с периодом $2\pi T^{-1}$, что дает основание рассматривать изображения только внутри интервала изменения $0 \leq \omega < 2\pi T^{-1}$. Удобнее использовать интервал $-\pi T^{-1} < \omega \leq \pi T^{-1}$, так как он оказывается аналогичным интервалу частот $-\infty < \omega < \infty$, рассматриваемому обычно для непрерывных функций времени. Принятый интервал дает на комплексной плоскости $p = \gamma + j\omega$ область (рис. 15.9), в которой достаточно рассматривать изображение $F(z) = F(e^{pT})$.

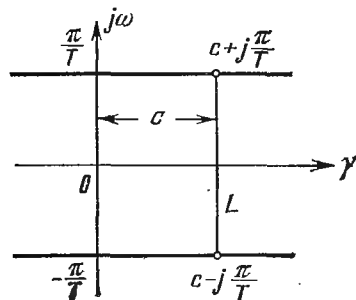


Рис. 15.9.

Изображение $F(z)$ может иметь в этой области особые точки типа полюсов $-p_i$ (где $i = 1, 2, \dots, k$). Полюсы могут быть или вещественными или комплексно сопряженными. В случае $p_{1,2} = \gamma_1 \pm j\pi T^{-1}$ достаточно рассматривать один из этих полюсов, соответствующий, например, положительной мнимой части (на верхней границе области).

Рассмотрим выражение (15.29):

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] e^{-pnT}.$$

Умножим левую и правую его части на e^{mpT} , где m — целое число, и проинтегрируем его вдоль линии L (рис. 15.9) в пределах от $p_1 = c - j\pi T^{-1}$ до $p_2 = c + j\pi T^{-1}$, где c — произвольная величина, большая, чем абсцисса абсолютной сходимости:

$$\int_{p_1}^{p_2} F(e^{pT}) e^{mpT} dp = \int_{p_1}^{p_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} f[n] e^{-pnT} \right] e^{mpT} dp = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \int_{p_1}^{p_2} e^{-pT(n-m)} dp. \quad (15.78)$$

При этом все полюса $F(e^{pT})$ будут лежать в рассматриваемой области на комплексной плоскости левее линии интегрирования L . Это и дает право изменить в (15.78) порядок операций интегрирования и суммирования.

Если $n \neq m$, то

$$\int_{p_1}^{p_2} e^{-pT(n-m)} dp = -\frac{e^{-pT(n-m)}}{(n-m)T} \Big|_{p_1}^{p_2} = \frac{e^{-c(n-m)}}{(n-m)T} [e^{j\pi(n-m)} - e^{-j\pi(n-m)}] = 0.$$

Если $n = m$, то

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = (c + j\pi T^{-1}) - (c - j\pi T^{-1}) = j2\pi T^{-1}.$$

Вследствие этого (15.78) можно представить в виде

$$\int_{p_1}^{p_2} F(e^{pT}) e^{pmT} dp = j2\pi T^{-1} f[m].$$

Заменяя m на n , получим окончательно формулу обращения

$$f[n] = \frac{T}{j2\pi} \int_{c-j2\pi T^{-1}}^{c+j2\pi T^{-1}} F(e^{pT}) e^{pnT} dp. \quad (15.79)$$

Так как $z = e^{pT}$ и $dz = Tz dp$, то формула обращения (15.79) может быть также представлена в другом виде:

$$f[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint F(z) z^{n-1} dz = \sum_{v=1}^l \operatorname{Res}_v F(z) z^{n-1}. \quad (15.80)$$

Интегрирование ведется по окружности с центром в начале координат и радиусом $R > |z_v|_{\max}$, где $v = 1, 2, \dots, l$ — полюсы функции $F(z)$.

В случае простых полюсов значение интегрального вычета в точке $z = z_v$ может быть определено из выражения

$$\operatorname{Res}_v F(z) z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow z_v} (z - z_v) F(z) z^{n-1}. \quad (15.81)$$

В случае полюса кратности r значение интегрального вычета в точке $z = z_v$ определяется выражением

$$\operatorname{Res}_v F(z) z^{n-1} = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow z_v} \frac{d^{(r-1)}}{dz^{(r-1)}} [F(z) (z - z_v)^r z^{n-1}]. \quad (15.82)$$

Если функция $F(z)$ имеет нулевой полюс кратности r , то для функции $F(z) z^{n-1}$ при $n = 0$ полюс будет иметь кратность $r + 1$. В этом случае значение интегрального вычета в точке $z = 0$ будет

$$\operatorname{Res}_v F(z) z^{n-1} = \begin{cases} \frac{1}{r!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^r}{dz^r} [F(z) z^{r+1}], & n = 0, \\ \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{(r-1)}}{dz^{(r-1)}} [F(z) z^{n+r-1}], & n > 0. \end{cases} \quad (15.83)$$

Аналогичные формулы обращения имеют место и для смещенной решетчатой функции:

$$f[n, \varepsilon] = \frac{T}{j2\pi} \int_{c-j\pi T}^{c+j\pi T-1} F(e^{pT}, \varepsilon) e^{pnT} dp, \quad (15.84)$$

$$f[n, \varepsilon] = \frac{1}{j2\pi} \oint F(z, \varepsilon) z^{n-1} dz = \sum_{v=1}^l \operatorname{Res}_v F(z, \varepsilon) z^{n-1}. \quad (15.85)$$

Полученные выражения (15.79), (15.80), (15.84) и (15.85) несколько сложны для практического использования. Поэтому для нахождения решетчатой функции по ее изображению обычно применяются другие методы, которые даны ниже.

13. Ф о р м у л ы р а з л о ж е н и я. Если изображение представляет собой простейшую табличную форму (см., например, табл. 15.1), то переход к оригиналу не представляет трудностей. Сложная дробно-рациональная форма может быть представлена в виде суммы дробей первой степени. Рассмотрим некоторые употребительные разновидности формулы разложения.

а) Пусть изображение $F(z)$ представляет собой отношение двух многочленов:

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{zA_0(z)}{B(z)},$$

причем будем предполагать, что степень числителя не выше, чем степень знаменателя, и корни знаменателя простые. Тогда изображение можно представить в виде суммы

$$F(z) = \frac{zA_0(z)}{B(z)} = \sum_{v=1}^l \frac{A_0(z_v)}{B'(z_v)} \cdot \frac{z}{z - z_v}, \quad (15.86)$$

где $\dot{B}(z)$ — производная $B(z)$ по z , а z_v ($v = 1, 2, \dots, l$) — корни знаменателя. Элементарному слагаемому $z(z - z_v)^{-1}$ соответствует оригинал $e^{-\alpha_v n T} = z_v^n$, где $\alpha_v = T^{-1} \ln z_v^{-1}$ (см. табл. 15.1). В табл. 15.1 единственный корень дроби первой степени обозначен $z_1 = d$.

Поэтому оригинал (15.86) можно записать следующим образом:

$$f[n] = \sum_{v=1}^l \frac{A_0(z_v)}{\dot{B}(z_v)} z_v^n. \quad (15.87)$$

б) Пусть изображение $F(z)$ не имеет нулевого корня числителя, но степень числителя $A(z)$ меньше степени знаменателя. Тогда, как следует из (15.73) начальное значение решетчатой функции $f[0] = 0$.

Для нахождения оригинала в этом случае можно воспользоваться формулами (15.86) и (15.87), но применить их следует для сдвинутой на один такт влево решетчатой функции, изображение которой будет $zF(z)$. Для того чтобы получить в результате искомую функцию, следует в правой части (15.87) сделать сдвиг на один такт вправо, для чего нужно заменить n на $n-1$. В результате имеем

$$f[n] = \sum_{v=1}^l \frac{A(z_v)}{\dot{B}(z_v)} z_v^{n-1}, \quad (15.88)$$

причем последнее выражение будет справедливым только для $n \geq 1$.

в) Пусть изображение $F(z)$ не имеет нулевого корня числителя $A(z)$, причем степень $A(z)$ равна степени знаменателя $B(z)$. Тогда следует понизить степень числителя, поделив его на знаменатель, и представить $F(z)$ в виде суммы составляющей нулевого порядка и дробно-рационального остатка $F_0(z)$. В соответствии с формулой (15.29) первая составляющая равна начальному значению решетчатой функции $f(0)$. Поэтому

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = f[0] + F_0(z) = f[0] + \frac{A_0(z)}{B(z)}.$$

Переход от второй составляющей изображения к оригиналу может быть сделан по формуле (15.88), которая справедлива для $n \geq 1$.

г) Если изображение $F(z)$ можно представить в виде некоторой дробно-рациональной функции $F_0(z)$, умноженной на изображение единичной ступенчатой решетчатой функции $1[n]$, которое равно $z(z-1)^{-1}$, т. е.

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{z}{z-1} F_0(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{A_0(z)}{B_0(z)},$$

то можно показать, что формула разложения приобретает вид

$$f[n] = \frac{A_0(1)}{B_0(1)} - \sum_{v=1}^l \frac{A_0(z_v)}{(1-z_v) \dot{B}_0(z_v)} \cdot z_v^n. \quad (15.89)$$

Последнее выражение представляет собой аналог известной формулы разложения Хевисайда, полученной им для непрерывных систем.

д) Пусть изображение $F(z)$ имеет нулевой полюс кратности r и простые остальные полюсы

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{z^r B_0(z)},$$

причем степень числителя $A(z)$ меньше степени полинома $B_0(z)$. Тогда на основании (15.83) и (15.88) можно найти оригинал в виде

$$f[n] = \begin{cases} 0, & \text{если } n < r+1, \\ \sum_{v=1}^{l-r} \frac{A(z_v)}{B_0(z_v)} z_v^{n-r}, & \text{если } n \geq r+1. \end{cases} \quad (15.90)$$

При равенстве степеней числителя и полинома $B_0(z)$ следует выделить делением $A(z)$ на $B_0(z)$ нулевую составляющую и остаток, после чего представить изображение в виде

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{z^r B_0(z)} = \frac{1}{z^r} \left[f[r] + \frac{{}^r A_0(z)}{B_0(z)} \right].$$

Здесь $f[r]$ — значение оригинала в момент $n = r$. Далее можно воспользоваться формулой (15.90), заменив в ней $A(z)$ на $A_0(z)$.

е) Пусть изображение $F(z)$ имеет полюс z_l кратности r , а все остальные полюсы простые:

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{(z-z_l)^r B_0(z)},$$

причем степень числителя меньше степени знаменателя.

Тогда в соответствии с (15.82) и (15.88) оригинал будет

$$f[n] = \sum_{v=1}^{l-r} \frac{A(z_v)}{B(z_v)} z_v^{n-1} + \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow z_l} \frac{d^{(r-1)}}{dz^{(r-1)}} \left[\frac{A(z) z^{n-1}}{B_0(z)} \right]. \quad (15.91)$$

Эта формула справедлива для $n \geq 1$. При $n = 0$ значение оригинала $f[0] = 0$.

Для случая двойного корня ($r = 2$) формула (15.91) приобретает вид

$$f[n] = \sum_{v=1}^{l-2} \frac{A(z_v)}{B(z_v)} z_v^{n-1} + \lim_{z \rightarrow z_l} \frac{d}{dz} \left[\frac{A(z) z^{n-1}}{B_0(z)} \right]. \quad (15.92)$$

Так, например, если

$$F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2},$$

то

$$f[n] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [Tz^n] = nT,$$

что совпадает с табл. 15.1.

В случае, когда степень числителя $F(z)$ равна степени знаменателя, следует аналогично изложенному выше выделить член нулевого порядка $f[0]$ делением числителя на знаменатель и рассматривать далее остаток от деления.

14. Р а з л о ж е н и е в р я д Л о р а н а. Из основного выражения для нахождения z -преобразования (15.29) следует:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n} = f[0] + f[1] z^{-1} + \dots + f[k] z^{-k} + \dots$$

Разложив любым способом изображение $F(z)$ в ряд Лорана (ряд по

убывающим степеням z):

$$F(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_k z^{-k} + \dots,$$

и сравнивая два ряда между собой, можно установить, что $c_0 = f[0]$, $c_1 = f[1]$, $c_2 = f[2]$, ..., $c_k = f[k]$ и т. д.

Разложение в ряд можно делать любым способом, так как такое разложение единственно. Наиболее удобным приемом для дробно-рациональных функций является деление числителя на знаменатель.

Применяя разложение в ряд Лорана, можно вычислить значения оригинала $f[n]$ или $f[n, \epsilon]$ в дискретных точках без нахождения полюсов изображения $F(z)$.

15. Решение разностных уравнений. Пусть имеется разностное уравнение в форме (15.15)

$$a_0 y[n+m] + a_1 y[n+m-1] + \dots + a_m y[n] = f[n]$$

с начальными условиями $y[v] = y_v$ ($v = 0, 1, \dots, m-1$). Найдем z -преобразование от его левой и правой частей. В соответствии с формулой (15.50) для случая упреждения на m тактов

$$Z\{y[n+m]\} = z^m [Y(z) - \sum_{k=0}^{m-1} y[k] z^{-k}].$$

Аналогичные зависимости могут быть записаны для упреждения на $(m-1)$, $(m-2)$, ..., 1 тактов. Поэтому при переходе в рассматриваемом разностном уравнении к изображениям можно получить

$$(a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m) Y(z) = F(z) + (a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z) y_0 + \\ + (a_0 z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \dots + a_{m-2} z) y_1 + \dots + a_0 z y_{m-1} = F(z) + Y_0(z). \quad (15.93)$$

В правой части (15.93), кроме изображения $F(z)$ решетчатой функции $f[n]$, находятся члены, определяемые начальными условиями. Сумма их обозначена $Y_0(z)$.

Из (15.93) можно найти изображение $Y(z)$ искомой решетчатой функции

$$Y(z) = \frac{F(z)}{A(z)} + \frac{Y_0(z)}{A(z)}, \quad (15.94)$$

где $A(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m$.

Далее можно использовать изложенные выше приемы перехода к искомому оригиналу $y[n]$.

Для решения рассматриваемого разностного уравнения необходимо, как следует из изложенного, знать начальные условия $y[v] = y_v$ ($v = 0, 1, \dots, m-1$). Последние же зависят от вида действующей в правой части разностного уравнения решетчатой функции.

Более удобны для решения разностные уравнения вида (15.19)

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_m y[n-m] = f[n]$$

с начальными условиями $y[-v] = y_v$ ($v = 1, 2, \dots, m$).

Изображение решетчатой функции $y[n-m]$, запаздывающей на m тактов, в соответствии с (15.48) будет

$$Z\{y[n-m]\} = z^{-m} [Y(z) + \sum_{r=1}^m y[-r] z^r].$$

Подобные зависимости могут быть записаны для запаздывания на $(m-1)$, $(m-2)$, ..., 1 тактов.

При переходе в рассматриваемом разностном уравнении к изображениям могут быть получены выражения, аналогичные (15.93) и (15.94). Пере-

ход к искомой решетчатой функции $y[n]$ осуществляется в соответствии с изложенными выше приемами.

Особый интерес представляет случай, когда до момента времени $n = 0$ искомая решетчатая функция тождественно равна нулю. Это эквивалентно случаю нулевых начальных условий слева (при $t = -0$) при решении дифференциальных уравнений для непрерывных функций. Тогда в выражении для изображения (15.94) пропадает член в правой части, определяемый начальными условиями, и оно приобретает вид

$$Y(z) = \frac{F(z)}{A(z)}. \quad (15.95)$$

Рассмотрим разностное уравнение вида (15.19), но записанное в более общем виде:

$$\begin{aligned} a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_m y[n-m] = \\ = b_0 f[n] + b_1 f[n-1] + \dots + b_l f[n-l]. \end{aligned} \quad (15.96)$$

Если ввести предположение, что решетчатая функция $y[n]$ тождественно равна нулю при $n < 0$ и, кроме того, функция $f[n]$ в правой части (15.96) прилагается в момент времени $n = 0$, то переход к изображениям дает

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}) Y(z) = \\ = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_l z^{-l}) F(z). \end{aligned} \quad (15.97)$$

Изображение искомой решетчатой функции можно представить в виде

$$\begin{aligned} Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_l z^{-l}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} F(z) = \\ = \frac{B(z)}{A(z)} F(z) = W(z) \cdot F(z). \end{aligned} \quad (15.98)$$

Здесь введена дискретная передаточная функция $W(z)$, которая, как и в случае непрерывных функций, есть отношение двух изображений (выходной и входной величин) при нулевых начальных условиях. Дискретная передаточная функция играет такую же роль в импульсных и цифровых системах, как и обычная передаточная функция в непрерывных системах. Получение этой функции будет подробно рассмотрено ниже.

16. Периодические решетчатые функции и их изображения. Введем в рассмотрение периодическую решетчатую функцию

$$f[n + kM] = f[n], \quad (15.99)$$

где k и M — целые числа, причем M представляет собой относительный период (рис. 15.10, а).

Первая гармоника имеет относительную угловую частоту

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{M}. \quad (15.100)$$

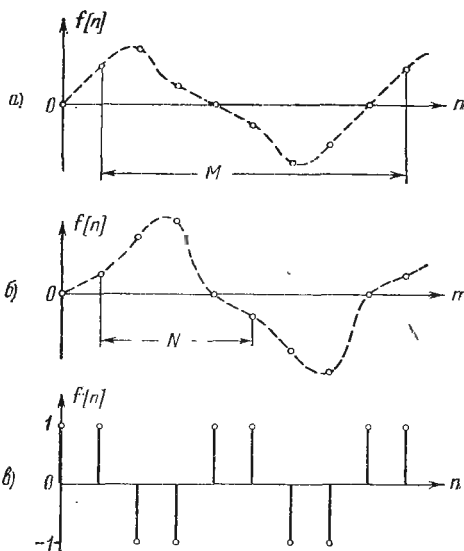


Рис. 15.10.

Функция (15.99) может быть представлена в виде суммы конечного числа гармоник с частотами, кратными $\bar{\omega}_1$:

$$f[n] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos k\bar{\omega}_1 n + b_k \sin k\bar{\omega}_1 n). \quad (15.101)$$

Число гармоник равно целой части $\frac{M}{2}$.

Ряд (15.101) может быть представлен в комплексной форме:

$$f[n] = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N \dot{c}_k e^{jk\bar{\omega}_1 n}, \quad (15.102)$$

где

$$\dot{c}_k = c_k e^{j\psi_k} = \begin{cases} a_k - jb_k, & k > 0, \\ a_0, & k = 0, \\ a_k + jb_k, & k < 0. \end{cases} \quad (15.103)$$

Для $M = 2N$ при $k = N$

$$\dot{c}_N = \begin{cases} a_N, & N > 0, \\ a_N, & N < 0. \end{cases} \quad (15.104)$$

Комплексные амплитуды могут находиться из формул: при $M = 2N + 1$

$$\dot{c}_r = \frac{2}{2N+1} \sum_{n=0}^{2N} f[n] e^{-jr\bar{\omega}_1 n}, \quad (15.105)$$

при $M = 2N$

$$\dot{c}_r = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} f[n] e^{-jr\bar{\omega}_1 n}. \quad (15.106)$$

Для $r = N$ при $M = 2N + 1$

$$\dot{c}_N = \frac{2}{2N+1} \sum_{n=0}^{2N} f[n] e^{-jN\bar{\omega}_1 n} \quad (15.107)$$

и при $M = 2N$

$$\dot{c}_N = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{2N-1} f[n] e^{-j\pi n}. \quad (15.108)$$

Для симметричной периодической функции (рис. 15.10, б), т. е. при выполнении условий $M = 2N$ и $f[n] = -f[n + N]$, формула для комплексной амплитуды принимает вид

$$\dot{c}_r = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-jr\bar{\omega}_1 n} [1 - (-1)^r]. \quad (15.109)$$

Из последнего выражения следует, что при четном r будет $\dot{c}_r = 0$, т. е. четные гармоники отсутствуют. При r нечетном

$$\dot{c}_r = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-jr\bar{\omega}_1 n}, \quad r < N. \quad (15.110)$$

Если N нечетно, то при $r = N$

$$\dot{c}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j\pi n}. \quad (15.111)$$

Так как здесь присутствуют только нечетные гармоники, то тригонометрический ряд может быть записан в вещественной форме:

$$f[n] = \frac{1}{2} \sum_{k=-N_1}^{N_1} \dot{c}_k e^{jk\bar{\omega}_1 n} = \sum_{k=1}^{N_1} c_k \cos(k\bar{\omega}_1 n + \varphi_k), \quad (15.112)$$

где $N_1 = N - 1$ для четных N и $N_1 = N$ для нечетных N .

Для нахождения изображения периодической решетчатой функции (15.99) применим теорему сдвига (15.50):

$$F(z) = z^M [F(z) - \sum_{r=0}^{M-1} f[r] z^{-r}].$$

Отсюда следует:

$$F(z) = \frac{z^M}{z^M - 1} \sum_{r=0}^{M-1} f[r] z^{-r}. \quad (15.113)$$

Сумма в правой части (15.113) представляет собой изображение решетчатой функции на интервале $0 - M$.

Для симметричной периодической функции $f[n] = -f[n + N]$ аналогичным образом можно получить

$$F(z) = \frac{z^N}{z^N + 1} \sum_{r=0}^{N-1} f[r] z^{-r}. \quad (15.114)$$

Найдем, например, изображение симметричной периодической решетчатой функции, показанной на рис. 15.10, в:

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1} \sum_{r=0}^1 z^{-r} = \frac{z^2}{z^2 + 1} (1 + z^{-1}) = \frac{z(z+1)}{z^2 + 1}.$$

§ 15.3. Передаточные функции

Блочная схема импульсной системы, содержащая импульсный элемент ИЭ в канале ошибки, изображена на рис. 15.11. Импульсный элемент обычно считают идеальным. Понятие идеального импульсного элемента вводится двояким образом.

Можно положить, что идеальный импульсный элемент генерирует решетчатую функцию с периодом T , образованную из непрерывного значения ошибки системы

$$x^*[n] = x(t) |_{t=nT} = x[n]. \quad (15.115)$$

Здесь принято, что в решетчатой функции смещение $\varepsilon = 0$. Это всегда можно сделать выбором начала отсчета времени.

Подобным образом, т. е. в соответствии с (15.115), работают, например, устройства дискретного съема информации с объектов различного вида. Далее решетчатая функция $x^*[n]$ поступает на формирующее устройство, или экстраполятор $\mathcal{E}$, а затем сигнал с выхода экстраполятора поступает на непрерывную часть системы. Задача формирующего устройства (экстраполятора) заключается в формировании реального импульса прямоугольной, трапецеидальной, треугольной и т. п. формы.

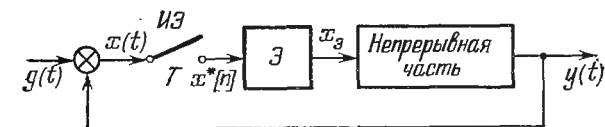


Рис. 15.11.

Совокупность идеального импульсного элемента и экстраполятора образует реальный импульсный элемент.

Можно ввести понятие идеального импульсного элемента и иначе, считая, что

он генерирует с периодом T последовательность бесконечно коротких импульсов типа δ -функции, площадь которых пропорциональна сигналу ошибки $x(t)$ в моменты времени $t = nT$, т. е.

$$x^*[n] = x(t) \delta_T(t), \quad (15.116)$$

где $\delta_T(t) = \delta(t - nT)$.

Представление импульсного элемента согласно (15.116) не соответствует действительности, так как никакой импульсный элемент не может генерировать бесконечные по высоте импульсы. Однако подобное формальное представление позволяет упростить изображение структурной схемы импульсной системы и поэтому используется.

Введем понятие приведенной весовой функции $w_n(t)$ разомкнутого канала регулирования (рис. 15.11), понимая под этим термином реакцию непрерывной части системы совместно с экстраполятором на единичную импульсную решетчатую функцию $x^*[n] = \delta_0[n]$, которая определена формулой (15.32). При этом используется понятие идеального импульсного элемента в соответствии с (15.115), т. е. $x^*[n] = x[n]$.

Более строго весовую функцию $w_n(t)$ следует определить (см. главу 4) как отношение выходного сигнала $y(t)$, возникающего при поступлении на вход экстраполятора единственной дискреты x_0 в момент $n = 0$, т. е. функции $x^*[n] = x_0 \delta_0[n]$, к значению x_0 :

$$w_n(t) = x_0^{-1} y(t). \quad (15.117)$$

Если выходную величину рассматривать только в дискретные моменты времени $t = nT$ или $t = (n + \varepsilon)T$, то разомкнутый канал регулирования будет представлять собой импульсный фильтр. Он может характеризоваться решетчатой весовой функцией $w_n[n]$ или $w_n[n, \varepsilon]$, полученной из производящей функции $w_n(t)$.

Заметим, что приведенная весовая функция отличается от обычной весовой функции непрерывного фильтра как своим видом, так и размерностью. Приведенная весовая функция содержит дополнительный множитель, имеющий размерность времени.

Знание решетчатой весовой функции $w_n[n]$ или $w_n[n, \varepsilon]$ позволяет найти реакцию импульсного фильтра на входную величину $x[n]$ произвольного вида.

Очевидно, что реакция импульсного фильтра на дискрету $x[0]$ будет $w_n(t) x[0]$, реакция на дискрету $x[1]$ будет $w_n(t - T) x[1]$, реакция на дискрету $x[m]$ будет $w_n(t - mT) x[m]$. Поэтому

$$y(t) = \sum_{m=0}^n x[m] w_n(t - mT).$$

Для дискретных моментов времени

$$y[n] = \sum_{m=0}^n x[m] w_{\pi}[n-m]. \quad (15.118)$$

Найдем z -преобразование от левой и правой частей последнего выражения:

$$Z\{y[n]\} = Z\left\{\sum_{m=0}^n x[m] w_{\pi}[n-m]\right\}. \quad (15.119)$$

На основании формулы свертки (15.74)

$$Y(z) = W(z) X(z), \quad (15.120)$$

где дискретная передаточная функция $W(z)$ есть z -преобразование от приведенной решетчатой весовой функции:

$$W(z) = Z\{w_{\pi}[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} w_{\pi}[n] z^{-n}. \quad (15.121)$$

Последняя формула, вообще говоря, очевидна. Так как передаточная функция линейной системы не зависит от вида входного сигнала, то можно положить $x[n] = \delta_0[n]$. Изображение единичной решетчатой импульсной функции равно единице. Поэтому передаточная функция импульсного фильтра оказывается равной в этом случае изображению выходной величины, которая представляет собой решетчатую приведенную весовую функцию $w_{\pi}[n]$, и формула (15.121) может быть написана сразу.

В случае использования понятия идеального импульсного элемента в соответствии с формулой (15.121) приведенная весовая функция может определяться аналогичным образом. Если x_0 — сигнал на входе импульсного элемента в момент времени $t = 0$, то на его выходе будет сигнал $x^*[0] = x_0 \delta(t)$. Приведенная решетчатая весовая функция непрерывной части совместно с экстраполятором будет в этом случае равна отношению реакции на выходе $y[n]$ к сигналу на входе x_0 , т. е. $w_{\pi}[n] = x_0^{-1} y[n]$, что совпадает с изложенным выше.

Однако в этом случае, поскольку изображение Лапласа единичной функции $\delta(t)$ равно единице, можно считать, что изображение Лапласа выходной величины $y(t) = w_{\pi}(t)$ при воздействии на входе вида $\delta(t)$ совпадает с непрерывной передаточной функцией канала регулирования, т. е. $Y_{\pi}(p) = W_{\pi}(p)$. В свою очередь передаточную функцию $W_{\pi}(p)$, учитывая вид схемы, изображенной на рис. 15.11, можно представить в виде произведения передаточных функций экстраполятора и непрерывной части, т. е. $W_{\pi}(p) = W_{\varepsilon}(p) W_0(p)$. Это дает возможность представить структурную схему импульсной системы регулирования так, как это изображено на рис. 15.12.

Передаточная функция $W_{\pi}(p)$ есть изображение Лапласа приведенной весовой функции $w_{\pi}(t)$, и ее можно назвать приведенной передаточной функцией непрерывной части совместно с экстраполятором.

Формулы (15.120) и (15.121) указывают на полное сходство с непрерывными системами, у которых передаточная функция есть преобразование

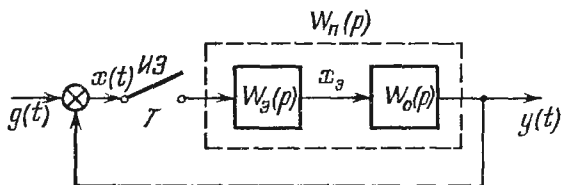


Рис. 15.12.

Лапласа от весовой функции

$$W_0(p) = L\{w_0(t)\} = \int_0^{\infty} w_0(t) e^{-pt} dt. \quad (15.122)$$

Формула (15.121), определяющая дискретную передаточную функцию импульсного фильтра, может быть записана также в другом виде через введенную передаточную функцию $W_{\Pi}(p)$:

$$W(z) = Z\{W_{\Pi}(p)\}. \quad (15.123)$$

На выходе дискретного фильтра может рассматриваться смещенная решетчатая функция $y[n, \varepsilon]$ и $w_{\Pi}[n, \varepsilon]$. Тогда передаточная функция

$$W(z, \varepsilon) = Z_{\varepsilon}\{w_{\Pi}[n, \varepsilon]\} = \sum_{n=0}^{\infty} w_{\Pi}[n, \varepsilon] z^{-n}, \quad (15.124)$$

изображение выходной величины

$$Y(z, \varepsilon) = W(z, \varepsilon) X(z). \quad (15.125)$$

Однако большинство задач по исследованию дискретных систем может быть решено при использовании передаточной функции $W(z)$, которая в основном и будет в дальнейшем рассматриваться.

Как следует из полученных выше формул, дискретная передаточная функция должна определяться по приведенной весовой функции непрерывной части. В случае, когда непрерывная часть состоит из параллельно включенных звеньев и ее передаточная функция

$$W_0(p) = \sum_{i=1}^h W_{0i}(p), \quad (15.126)$$

дискретная передаточная функция $W(z)$ может быть определена суммированием частных дискретных передаточных функций, определенных для каждого звена в отдельности:

$$W(z) = \sum_{i=1}^h W_i(z). \quad (15.127)$$

В отличие от непрерывных систем подобное правило не имеет места для случая последовательно включенных звеньев с общей передаточной функцией

$$W_0(p) = \prod_{i=1}^h W_{0i}(p) \quad (15.128)$$

и общим импульсным элементом на входе. В этом случае

$$W(z) \neq \prod_{i=1}^h W_i(z) \quad (15.129)$$

и передаточная функция $W(z)$ должна сразу определяться по результирующей весовой функции $w_{\Pi}(t)$. Для последовательного соединения звеньев $w_{\Pi}(t)$ может, например, определяться по теореме разложения.

Иногда для последовательного соединения, например, двух звеньев результирующая передаточная функция вместо формы (15.129) записывается в виде $W(z) = W_1 W_2(z)$. Символ $W_1 W_2(z)$ должен рассматриваться как единый и относящийся к операции нахождения дискретной передаточной функции последовательно включенных звеньев с общей передаточной функцией $W_{01}(p) W_{02}(p)$.

Однако в том случае, когда имеется ряд последовательно включенных звеньев, каждое из которых имеет на входе свой импульсный элемент (последовательно включенные импульсные фильтры), результирующая передаточная функция может находиться перемножением дискретных передаточных функций каждого импульсного фильтра:

$$W(z) = \prod_{i=1}^h W_i(z) = \prod_{i=1}^h Z\{W_{pi}(p)\}. \quad (15.130)$$

Непрерывная часть дискретного фильтра может содержать временное запаздывание $\tau = \xi T$. Тогда дискретная передаточная функция

$$W(z) = Z\{W_{\pi}(p) e^{-\tau p}\} = Z\{w_{\pi}(t - \tau)\} \quad (15.131)$$

должна определяться в соответствии с формулами (15.51) и (15.52). Если запаздывание лежит в пределах $0 \leq \tau < T$ или $0 \leq \xi < 1$, то при $m = 0$ и $\varepsilon = 0$ имеем из (15.54)

$$W(z) = z^{-1} Z_{\varepsilon}\{w_{\pi}[n, 1 - \xi]\} = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} w_{\pi}[n, 1 - \xi] z^{-n}. \quad (15.132)$$

При использовании табл. 15.1 необходимо положить $\varepsilon = 1 - \xi$.

Рассмотрим нахождение приведенной весовой функции $w_{\pi}(t)$ или ее изображения $W_{\pi}(p)$ для различных экстраполяторов. В соответствии с изложенным выше можно записать следующую зависимость:

$$W_{\pi}(p) = F_{\pi}(p) W_0(p) = W_a(p) W_0(p), \quad (15.133)$$

где $F_{\pi}(p)$ — изображение импульса на выходе экстраполятора при поступлении на его вход единственной дискреты $\delta_0[n]$ в соответствии с (15.115), равное передаточной функции экстраполятора $W_a(p)$ для случая (15.116). В формуле (15.133) передаточная функция $W_0(p)$ относится к непрерывной части.

Амплитудно-импульсная модуляция 1-го рода. В этом случае реальный импульсный элемент генерирует короткие прямоугольные импульсы, высота которых равна значению $x[n]$, а продолжительность составляет $t_n = \gamma T$, где $\gamma < 1$ (рис. 15.4, а).

Изображение импульса при поступлении на вход экстраполятора функции $\delta_0[n]$ будет

$$F_{\pi}(p) = \int_0^{\gamma T} 1 \cdot e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-\gamma p T}}{p}.$$

В этом случае передаточная функция разомкнутой системы

$$\begin{aligned} W(z) &= Z\{F_{\pi}(p) W_0(p)\} = Z\left\{\frac{1 - e^{-\gamma p T}}{p} \cdot W_0(p)\right\} = \\ &= Z\left\{\frac{W_0(p)}{p}\right\} - z^{-1} \cdot Z_{\varepsilon}\left\{\frac{W_0(p)}{p}\right\}, \end{aligned} \quad (15.134)$$

где $\varepsilon = 1 - \gamma$.

Формулу (15.134) можно также записать в следующем виде. Так как деление передаточной функции $W_0(p)$ на p эквивалентно интегрированию оригинала, т. е. весовой функции $w_0(t)$, то в результате

$$W(z) = Z\{h_0[n]\} - \frac{1}{z} Z\{h_0[n + \varepsilon]\} = H_0(z, 0) - z^{-1} H_0(z, \varepsilon), \quad (15.135)$$

где $h_0[n]$ — переходная функция непрерывной части системы, а $H_0(z, \varepsilon)$ — изображение этой переходной функции.

Пусть, например, непрерывная часть системы имеет передаточную функцию

$$W_0(p) = \frac{K}{1 + T_1 p},$$

которой соответствует переходная функция $h_0(t) = K(1 - e^{-\alpha t})$, где $\alpha = 1/T_1$. Тогда в соответствии с (15.135) и табл. 15.1 получаем

$$W(z) = K \left[\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)} - \frac{1}{z-1} + \frac{d^\varepsilon}{z-d} \right] = K \frac{d^\varepsilon - d}{z-d} = K \frac{d(d^{-\gamma} - 1)}{z-d},$$

где $d = e^{-\alpha T}$, $\varepsilon = 1 - \gamma$.

При $\gamma \ll 1$ в формуле (15.134) можно приближенно принять $e^{-\gamma p T} \approx 1 - \gamma p T$. Тогда получим

$$W(z) \approx \gamma T Z \{W_0(p)\}. \quad (15.136)$$

Формула (15.136) будет справедлива, если можно пренебречь влиянием конечной длительности импульса.

Это эквивалентно замене коротких прямоугольных импульсов, которые генерируются реальным импульсным элементом, серией одинаковых с ними по площади импульсных функций (δ -функций). В свою очередь это эквивалентно замене $W_0(p) \approx \gamma T$. Такая замена обоснована, если непрерывная часть реагирует практически одинаково на реальные конечные импульсы и на равные по площади импульсы типа δ -функций. В большинстве случаев для выполнения этого достаточно, чтобы постоянные времени системы были больше продолжительности импульса, т. е. $T_i > t_n = \gamma T$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

В формуле (15.136) сводится и случай амплитудно-импульсной модуляции 2-го рода (рис. 15.1, е), если длительность реального импульса мала.

Экстраполяторы с фиксацией на период.

В этом случае на выходе экстраполятора в течение всего такта продолжительностью T удерживается величина, равная значению $x[n]$. Подобным образом работают, например, системы с ЦВМ при использовании в них так называемых экстраполяторов нулевого порядка (рис. 15.13).

Изображение импульса на выходе экстраполятора при поступлении на вход $x[n] = \delta_0[n]$ будет в этом случае (при $\gamma = 1$)

$$F_n(p) = \int_0^T 1 \cdot e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-pT}}{p} = \frac{z-1}{zp}. \quad (15.137)$$

Передаточная функция разомкнутой системы в общем случае наличия временного запаздывания

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_0(p)}{p} e^{-p\tau} \right\} = \frac{z-1}{z^2} Z_e \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\}, \quad (15.138)$$

где $\varepsilon = 1 - \xi$, $\tau = \xi T$, причем $0 \leq \xi < 1$. Смещенное z -преобразование должно вычисляться в соответствии с формулами (15.51) и (15.52).

Формула (15.138) может быть также записана в другом виде:

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z\{h_0(t-\tau)\}, \quad (15.139)$$

где $h_0(t)$ — переходная функция непрерывной части без учета временного запаздывания.

Пример. Определим передаточную функцию разомкнутой системы с экстраполятором нулевого порядка для случая, когда непрерывная часть имеет передаточную функцию

$$W_0(p) = \frac{K}{p(1+T_0p)}.$$

Общий коэффициент усиления $K = 100 \text{ сек}^{-1}$, постоянная времени объекта $T_0 = 1 \text{ сек}$, период дискретности $T = 0,5 \text{ сек}$, постоянное временное запаздывание $\tau = 0$ и $\tau = 0,1 \text{ сек}$.

Рассмотрим случай $\tau = 0$. Разложим выражение, находящееся в скобках (15.138), на простые дроби:

$$\frac{W_0(p)}{p} = \frac{K}{p^2(1+T_0p)} = K \left(\frac{1}{p^2} - \frac{T_0}{p} + \frac{T_0^2}{1+T_0p} \right).$$

Тогда имеем из (15.138) и табл. 15.1

$$W(z) = \frac{K(z-1)}{z} Z \left\{ \frac{1}{p^2} - \frac{T_0}{p} + \frac{T_0^2}{1+T_0p} \right\} = \frac{K(z-1)}{z} \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{T_0z}{z-1} + \frac{T_0z}{z-d} \right] = \frac{K[(T-T_0+dT_0)z + (1-d)T_0 - dT]}{(z-1)(z-d)} = \frac{11z+8,5}{(z-1)(z-0,61)}. \quad (*)$$

Здесь $d = e^{-T_0/T} = 0,61$.

Для случая $\tau = 0,1 \text{ сек}$ (или $\xi = 0,2$) аналогично будем иметь, положив $\varepsilon = 1 - \xi$,

$$W(z) = \frac{K(z-1)}{z} Z \left\{ \left(\frac{1}{p^2} - \frac{T_0}{p} + \frac{T_0^2}{1+T_0p} \right) e^{-\tau p} \right\} = \frac{K(z-1)}{z^2} \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{\varepsilon Tz}{z-1} - \frac{T_0z}{z-1} + \frac{z d^\varepsilon T_0}{z-d} \right] = \frac{7z^2 + 13,6z + 0,32}{z(z-1)(z-d)}. \quad (**)$$

Заметим, что, положив $\tau = 0$ и $\varepsilon = 1 - \xi = 1$, из последнего выражения (**) нельзя получить передаточную функцию (*), так как для случая $\varepsilon = 1$ изображение не определяется формулой (15.51).

Передачные функции замкнутых систем. Пусть для систем с единичной главной обратной связью (рис. 15.11 и 15.12) определена для общего случая $\varepsilon \neq 0$ передаточная функция разомкнутой системы $W(z, \varepsilon)$. Тогда изображение выходной величины

$$Y(z, \varepsilon) = W(z, \varepsilon) X(z, 0). \quad (15.140)$$

Изображение ошибки принято в виде $X(z, 0)$, так как импульсный элемент реагирует на значения ошибки в дискретные моменты времени $t = nT$ ($\varepsilon = 0$). При $\varepsilon = 0$ имеем $X(z, 0) = G(z, 0) - Y(z, 0)$. Подставляя это выражение в (15.140), получаем

$$Y(z, 0) = \frac{W(z, 0)}{1+W(z, 0)} G(z, 0) = \Phi(z, 0) G(z, 0), \quad (15.141)$$

$$X(z, 0) = \frac{G(z, 0)}{1+W(z, 0)} = \Phi_x(z, 0) G(z, 0). \quad (15.142)$$

Или в сокращенной записи

$$Y(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)} G(z) = \Phi(z) G(z), \quad (15.143)$$

$$X(z) = \frac{G(z)}{1+W(z)} = \Phi_x(z) G(z). \quad (15.144)$$

Здесь введены передаточная функция замкнутой системы $\Phi(z)$ и передаточная функция по ошибке $\Phi_x(z)$.

Условием применимости формул (15.143) и (15.144) является требование равенства нулю приведенной весовой функции в момент $t = 0$, т. е. $w_{\pi}(0) = 0$. Для этого в системах с бесконечно короткими импульсами в виде δ -функций требуется, чтобы степень числителя передаточной функции непрерывной части $W_0(p)$ по крайней мере на два была меньше степени знаменателя.

В системах с конечными по длительности импульсами достаточно, чтобы эта разность была бы не меньше единицы.

Передаточные функции $W(z)$, $\Phi(z)$ и $\Phi_x(z)$ могут быть использованы для оценки устойчивости и качества импульсных систем.

Если $\varepsilon \neq 0$, то, учитывая, что в замкнутой системе $X(z, 0)$ есть изображение ошибки, на которую реагирует импульсный элемент, можно получить из (15.140)

$$Y(z, \varepsilon) = \frac{W(z, \varepsilon)}{1+W(z, 0)} G(z, 0). \quad (15.145)$$

Однако формула (15.145) обычно не используется, так как практически всегда выражения (15.141) — (15.144) могут быть использованы для оценки качества работы импульсной системы.

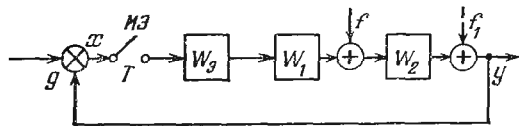


Рис. 15.14.

Передаточные функции для возмущений. На рис. 15.14 изображен случай, когда внешнее воздействие приложено не на входе импульсного элемента (например, возмущающее воздействие). Перенесем воздействие f на выход

в виде воздействия f_1 . В соответствии с правилами преобразования структурных схем, если для возмущения $f(t)$ изображение Лапласа будет $F_{\pi}(p)$, то возмущению $f_1(t)$ должно соответствовать изображение Лапласа $F_{\text{эл}}(p) = W_2(p) F_{\pi}(p)$. Далее можно найти z -преобразование эквивалентного воздействия

$$F_1(z) = Z \{W_2(p) F_{\pi}(p)\} = W_2 F(z). \quad (15.146)$$

Для этого воздействия в разомкнутой системе будет $X(z) = -F_1(z)$, а в замкнутой

$$Y(z) = -X(z) = \frac{F_1(z)}{1+W(z)} = \frac{W_2 F(z)}{1+W(z)}. \quad (15.147)$$

Таким образом, в случае воздействий, не приложенных ко входу импульсного элемента, передаточная функция импульсной системы может быть определена только для эквивалентного воздействия, полученного пересчетом реального воздействия на вход импульсного элемента.

Частотные передаточные функции. Введем в рассмотрение синусоидальную последовательность на входе импульсного фильтра

$$x[n] = a \sin(n\omega T + \varphi), \quad (15.148)$$

где a и φ — амплитуда и начальная фаза, T — период повторения (чередования) импульсов, $T_c = \frac{2\pi}{\omega}$ — период синусоидальной последовательности.

Заметим, что, в отличие от непрерывной гармонической функции, синусоидальная последовательность (15.148) представляет собой в общем случае непериодическую функцию n . Она представляет собой периодическую функцию n тогда и только тогда, когда период повторения T и период гармонической функции T_c — соизмеримые числа. Кроме того, амплитуда a не обязательно является тем максимальным значением, которого могут достигать те или иные члены последовательности. Амплитуда всегда является лишь верхней границей, но не обязательно максимумом этих членов.

Отметим также, что последовательность (15.148) не изменится, если заменить частоту $f = \frac{\omega}{2\pi}$ частотой $f + kf_0$, где $f_0 = T^{-1}$ — частота работы ключа, а k — целое число. Невозможно различить две частоты, разность между которыми равна целому кратному частоты повторения f_0 . Так, например, синусоидальная последовательность с частотой $f = f_0$ состоит из одного единственного члена, повторяющегося неограниченное число раз, и, следовательно, она неотличима от последовательности с нулевой частотой $f = 0$.

Из предыдущего следует, что, меняя частоту синусоидальной последовательности на входе f в пределах от 0 до f_0 , можно охватить весь диапазон возможных частот.

Можно также показать, что достаточно исследовать поведение импульсного фильтра в диапазоне частот $0 \leq f \leq 0,5f_0$, так как для интервала частот $0,5f_0 \leq f \leq f_0$ может быть использована дополнительная частота f' , выбранная так, чтобы выполнялось условие $f + f' = f_0$. При этом начальная фаза φ должна быть заменена начальной фазой $\pi - \varphi$. Это положение аналогично тому, что при исследовании непрерывных систем в интервале частот $-\infty < f < \infty$ достаточно охватить только положительные частоты, т. е. интервал $0 \leq f < \infty$.

Синусоидальная последовательность (15.148) может быть заменена символической записью последовательности комплексных чисел

$$\tilde{x}[n] = ae^{j(n\omega T + \varphi)} = \dot{a}e^{jn\omega T}, \quad (15.149)$$

где $\dot{a} = ae^{j\varphi}$ — комплексное число.

Как и в случае непрерывных систем, символичность записи заключается в том, что на самом деле $x[n]$ равно мнимой составляющей правой части (15.149).

Введем обозначение $e^{j\omega T} = z$. Тогда последовательность (15.149) приобретает вид

$$\tilde{x}[n] = \dot{a}z^n. \quad (15.150)$$

В этой формуле z — произвольное комплексное число с модулем, равным единице. Следовательно, каждой частоте соответствует определенная точка на окружности единичного радиуса, расположенной на комплексной плоскости (рис. 15.15). Двум эквивалентным частотам, т. е. частотам, различающимся на целое кратное частоты повторения, соответствует одна и та же точка на этой окружности. Частоте $\omega = 0$ соответствует точка на вещественной оси $z = 1$, а частоте $\omega = 0,5\omega_0$ — диаметрально противоположная точка $z = -1$. Частоте $\omega = 0,25\omega_0$ соответствует точка $z = j$, и т. д. Когда частота ω изменяется от 0 до ω_0 , представляющая ее точка совершает один полный

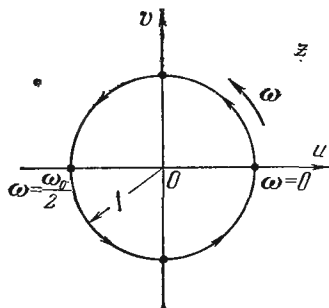


Рис. 15.15.

оборот против часовой стрелки. Двум симметричным относительно вещественной оси точкам, т. е. двум комплексным сопряженным числам с модулями, равными единице, соответствуют две взаимно дополняющие частоты ω и ω' . Следовательно, совокупность точек, расположенных на одной верхней (или нижней) полуокружности единичного радиуса, достаточна для отображения всего многообразия частот.

Найдем теперь реакцию импульсного фильтра на синусоидальную последовательность (15.149). Будем предполагать при этом, что импульсный фильтр является устойчивым. Поскольку синусоидальная последовательность на входе всегда ограничена, то и реакция устойчивого фильтра на эту последовательность должна представлять собой определенную ограниченную последовательность на выходе.

В соответствии с формулой (15.118) выходная величина в этом случае будет для установившегося режима

$$\begin{aligned}\tilde{y}[n] &= \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{x}[m] w_{\Pi}[n-m] = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{x}[n-m] w_{\Pi}[m] = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} w_{\Pi}[m] \dot{a}z^{n-m} = \dot{a}z^n \sum_{m=0}^{\infty} w_{\Pi}[m] z^{-m}.\end{aligned}\quad (15.151)$$

Эта формула может быть представлена в следующем символическом виде:

$$\tilde{y}[n] = \dot{b}z^n = \dot{a}z^n W(z) = \tilde{x}[n] W(z), \quad (15.152)$$

где $z = e^{j\omega T}$, $\omega = 2\pi T_c^{-1}$, $\dot{b} = \dot{a}W = be^{j(\varphi+\psi)}$.

Здесь введена величина

$$W(e^{j\omega T}) = \sum_{m=0}^{\infty} w_{\Pi}[m] z^{-m}, \quad z = e^{j\omega T}, \quad (15.153)$$

которая по своему физическому смыслу аналогична частотной передаточной функции непрерывной системы. Как видно из (15.153), для данного импульсного фильтра она зависит только от частоты ω и является периодической функцией частоты с периодом $\omega_0 = 2\pi T^{-1}$.

Амплитуду и фазу последовательности выходного сигнала (15.152) можно найти обычным приемом по комплексному выражению $W(z)$. Отношение амплитуд выходного и входного сигналов равно модулю, а разность их фаз — аргументу этого выражения: $b = a |W|$ и $\psi = \arg W$.

В общем случае, когда $\varepsilon \neq 0$, формула (15.152) может быть представлена в виде

$$\tilde{y}[n, \varepsilon] = W(z, \varepsilon) \tilde{x}[n], \quad z = e^{j\omega T}, \quad (15.154)$$

где $W(z, \varepsilon)$ — передаточная функция (15.124).

Таким образом, частотная передаточная функция может быть найдена из дискретной передаточной функции импульсного фильтра $W(z)$ или $W(z, \varepsilon)$ посредством подстановки $z = e^{j\omega T}$.

П р и м е р. Пусть непрерывная часть импульсного фильтра представляет собой апериодическое звено первого порядка с передаточной функцией $W_0(p) = k(1 + T_1 p)^{-1}$, а импульсный элемент генерирует короткие прямоугольные импульсы продолжительности $t_{\text{и}} = \gamma T$.

Приведенная функция веса такого звена

$$w_{\Pi}(t) = \frac{\gamma T k}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}.$$

Дискретная передаточная функция

$$W(z) = Z\{w_n(t)\} = \frac{\gamma T k}{T_1} \cdot \frac{z}{z-d}, \quad (15.155)$$

где $d = e^{-T/T_1}$. Сделаем подстановку $z = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$. В результате получим

$$W(e^{j\omega T}) = \frac{T}{T_1} \cdot \frac{\gamma k (\cos \omega T + j \sin \omega T)}{\cos \omega T - d + j \sin \omega T}. \quad (15.156)$$

Модуль и аргумент этого выражения

$$\left. \begin{aligned} |W(e^{j\omega T})| &= \frac{T}{T_1} \cdot \frac{\gamma k}{\sqrt{1 + d^2 - 2d \cos \omega T}}, \\ \psi &= \arg W(e^{j\omega T}) = \omega T - \arctg \frac{\sin \omega T}{\cos \omega T - d}. \end{aligned} \right\} \quad (15.157)$$

Аналогичным образом могут быть найдены частотные передаточные функции замкнутых систем $\Phi(z)$ и $\Phi_x(z)$ при $z = e^{j\omega T}$.

§ 15.4. Устойчивость и качество импульсных систем регулирования

В импульсных системах автоматического регулирования устойчивость будет иметь место, если все полюсы передаточной функции замкнутой системы, т. е. корни характеристического уравнения, лежат в левой полуплоскости корней. Границей устойчивости является мнимая ось (рис. 15.16, а). Для

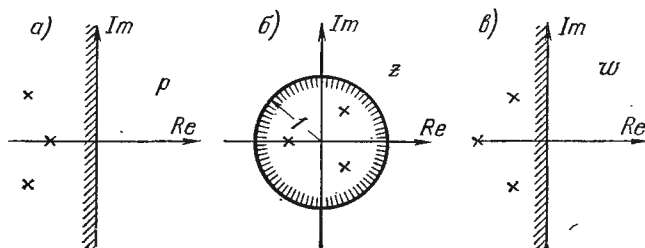


Рис. 15.16.

построения области устойчивости в плоскости комплексной величины z отобразим мнимую ось плоскости величины p на плоскость z . Для этой цели в соответствии с методом D -разбиения необходимо сделать подстановку $p = j\omega$ и менять затем частоту ω в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Таким образом, получаем $z = e^{pT} = e^{j\omega T}$.

При изменении частот в указанных пределах на плоскости z получится окружность единичного радиуса, представляющая собой область устойчивости (рис. 15.16, б).

Условием устойчивости будет нахождение особых точек (полюсов) передаточной функции замкнутой системы $\Phi(z)$ внутри этой окружности. Следовательно, корни характеристического уравнения

$$1 + W(z) = 0 \quad (15.158)$$

должны быть ограничены по модулю: $|z_i| < 1$, что совпадает с результатом § 15.1.

Так, например, для характеристического уравнения первого порядка

$$z + A = 0 \quad (15.159)$$

очевидное условие устойчивости будет $|A| < 1$.

Аналогичным образом можно показать, что для уравнения второго порядка

$$z^2 + Az + B = 0 \quad (15.160)$$

путем вычисления его корней получаются три условия устойчивости:

$$\left. \begin{aligned} 1 + A + B > 0, \\ 1 - A + B > 0, \\ B < 1. \end{aligned} \right\} \quad (15.161)$$

Для уравнений более высокого порядка исследование устойчивости усложняется. Для облегчения задачи иногда используется так называемое *w-преобразование*, посредством которого окружность единичного радиуса (рис. 15.16, б) отображается на мнимую ось плоскости комплексной величины w . Для преобразования используется подстановка

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad (15.162)$$

или, соответственно,

$$w = \frac{z-1}{z+1}. \quad (15.163)$$

Сделав подстановку $z = e^{j\omega T}$, получаем из (15.163)

$$w = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = j\bar{\lambda}, \quad (15.164)$$

где $\bar{\lambda} = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$ представляет собой так называемую *относительную псевдочастоту*. Иногда вводится в рассмотрение *абсолютная псевдочастота*

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = \frac{2\bar{\lambda}}{T}. \quad (15.165)$$

При малых частотах $\operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \approx \frac{\omega T}{2}$ и псевдочастота $\lambda \approx \omega$. Поэтому при выполнении условия $\omega T < 2$ можно заменить в расчетах псевдочастоту действительной частотой, что может быть использовано, в частности, при расчетах установившихся ошибок при гармоническом входном сигнале.

Нетрудно видеть, что при изменении частоты в пределах $-\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$ псевдочастота пробегает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, комплексная величина w движется по оси мнимых от $-j\infty$ до $j\infty$. Областью устойчивости в этом случае оказывается вся левая полуплоскость (рис. 15.16, в). Поэтому для передаточной функции с w -преобразованием могут использоваться обычные критерии устойчивости, справедливые для непрерывных систем.

Рассмотрим, например, характеристическое уравнение второго порядка (15.160). Посредством подстановки (15.162) оно преобразуется к виду

$$(1 - A + B) w^2 + 2(1 - B) w + 1 + A + B = 0. \quad (15.166)$$

На основании алгебраического критерия (см. § 6.2) условие устойчивости для уравнения второго порядка сводится к требованию положительности всех коэффициентов. Отсюда получаются условия (15.161).

Заметим также, что применение w -преобразования и псевдочастоты λ приводит передаточную функцию разомкнутой системы к виду, удобному для использования метода логарифмических частотных характеристик.

Для определения устойчивости замкнутой импульсной системы возможно использование критерия Найквиста. Для этой цели можно применять передаточную функцию разомкнутой системы, полученную как на основе z -преобразования, так и на основе w -преобразования. И в том и в другом случае

амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не должна охватывать точку $(-1, j0)$. При использовании передаточной функции $W(z)$ амплитудно-фазовая характеристика становится периодической функцией с периодом $2\pi T^{-1}$.

Пусть, например, дискретная передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(z) = \frac{KT}{z-1}. \quad (15.167)$$

Получим частотную передаточную функцию подстановкой $z = e^{j\omega T}$:

$$W(e^{j\omega T}) = \frac{KT}{\cos \omega T - 1 + j \sin \omega T} = -\frac{KT}{2} - j \frac{KT}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2} = u + jv. \quad (15.168)$$

В координатах $u = \operatorname{Re} W$ и $v = \operatorname{Im} W$ амплитудно-фазовая характеристика будет представлять собой вертикальную прямую линию, отстоящую влево от начала координат на величину $0,5 KT$. Граница устойчивости будет при прохождении этой прямой через точку $(-1, j0)$. Отсюда можно получить условие устойчивости $KT < 2$.

Получим теперь частотную передаточную функцию на основе w -преобразования. Для этого в формуле (15.167) применим подстановку (15.162). В результате получим передаточную функцию разомкнутой системы как функцию комплексной величины w :

$$W^*(w) = \frac{KT(1-w)}{2w}. \quad (15.169)$$

Частотная передаточная функция разомкнутой системы при подстановке $w = j\frac{T}{2}\lambda$

$$W^*\left(j\frac{T}{2}\lambda\right) = \frac{K\left(1-j\frac{T}{2}\lambda\right)}{j\lambda}. \quad (15.170)$$

Нетрудно видеть, что частотная передаточная функция (15.170) в зависимости от псевдочастоты имеет более простой вид по сравнению с (15.169). По выражению (15.170) может быть, в частности, просто построена асимптотическая л. а. х.

Подобным же образом могут быть получены дискретные передаточные функции $\Phi^*(w)$ и $\Phi_x^*(w)$, а также частотные передаточные функции $\Phi^*\left(j\frac{T}{2}\lambda\right)$ и $\Phi_x^*\left(j\frac{T}{2}\lambda\right)$.

Оценка качества импульсной системы регулирования может делаться построением кривой переходного процесса, что при использовании z -преобразования осуществляется сравнительно легко (§ 15.2), а также посредством различных критериев качества. Наиболее простым является использование показателя колебательности, который может характеризовать запас устойчивости системы. Как и в случае непрерывных систем, получение заданного показателя колебательности сводится к требованию, чтобы амплитудно-фазовая характеристика системы не заходила в запретную зону, окружающую точку $(-1, j0)$ в соответствии с рис. 8.27.

Установившаяся точность импульсной системы может оцениваться по коэффициентам ошибок. Аналогично непрерывным системам, начиная с некоторого момента времени ошибку импульсной системы регулирования можно представить в виде ряда

$$x[n] = c_0 g[n] + c_1 \dot{g}[n] + \frac{c_2}{2} \ddot{g}[n] + \dots, \quad (15.171)$$

где коэффициенты ошибок c_0, c_1, c_2 и т. д. представляют собой коэффициенты разложения передаточной функции по ошибке $\Phi_x(z)$ в ряд Маклорена по степеням p , т. е.

$$c_n = \left[\frac{d^n \Phi_x(e^{pT})}{dp^n} \right]_{p=0}. \quad (15.172)$$

Величины, обратные множителям при производных выражениях (15.171), по аналогии с непрерывными системами могут называться соответствующими добротностями. Например, добротность по скорости

$$K_v = \frac{1}{c_1}, \quad (15.173)$$

добротность по ускорению

$$K_e = \frac{2}{c_2} \quad (15.174)$$

и т. д.

Вычислим, например, два первых коэффициента ошибок для системы с передаточной функцией разомкнутой цепи

$$W(z) = \frac{\gamma K T (1-d) z}{(z-1)(z-d)},$$

где $d = e^{-T/T_1}$.

Эта функция соответствует импульсному фильтру с передаточной функцией непрерывной части

$$W_0(p) = \frac{K}{p(1+T_1 p)}$$

и с приведенной передаточной функцией (15.136)

$$W_{\Pi}(p) = W_0(p) W_0(p) = \frac{\gamma K T}{p(1+T_1 p)}.$$

Находим передаточную функцию по ошибке:

$$\Phi_x(z) = \frac{1}{1+W(z)} = \frac{(z-1)(z-d)}{(z-1)(z-d) + \gamma K T (1-d) z}.$$

Подстановка в это выражение $p = 0$ или $z = 1$ дает коэффициент $c_0 = 0$. Для получения коэффициента c_1 находим первую производную:

$$\frac{d\Phi_x(e^{pT})}{dp} = \frac{\gamma K T^2 (1-d)(z^3 - zd)}{[(z-1)(z-d) + \gamma K T (1-d) z]^2}, \quad z = e^{pT}.$$

Подстановка $z = 1$ дает коэффициент

$$c_1 = \frac{1}{\gamma K},$$

а также добротность по скорости

$$K_v = \frac{1}{c_1} = \gamma K.$$

Периодические режимы. Если на входе замкнутой импульсной системы (рис. 15.11) действует синусоидальная последовательность

$$g[n] = g_{\max} \sin(\omega n T + \varphi),$$

то расчет синусоидальных последовательностей $y[n]$ и $x[n]$ может быть сделан на основе формул (15.152) и (15.154) при использовании передаточных функций замкнутой системы.

Так, например, амплитуда ошибки (точнее, верхнее граничное значение синусоидальной последовательности для ошибки)

$$x_{\max} = g_{\max} |\Phi_x(e^{j\omega T}, \varepsilon)| \quad (15.175)$$

и сдвиг по фазе

$$\arg x - \arg g = \arg \Phi_x(e^{j\omega T}, \varepsilon). \quad (15.176)$$

В общем случае негармонической периодической последовательности с периодом M (см. § 15.2) она может быть представлена в виде суммы конечного числа гармоник:

$$g[n] = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N \dot{c}_k e^{j \frac{2\pi}{M} kn},$$

где N — целая часть $\frac{M}{2}$, а коэффициенты разложения

$$\dot{c}_k = c_k e^{j\varphi_k} = \frac{2}{M} \sum_{v=0}^{M-1} g[v] e^{-j \frac{2\pi}{M} kv}.$$

Для каждой гармоники в установившемся режиме может быть сделан расчет в соответствии с изложенным выше для синусоидальной последовательности. Поэтому в установившемся режиме для ошибки можно записать

$$x[n, \varepsilon] = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N \Phi_x\left(j \frac{2\pi}{M} k, \varepsilon\right) \dot{c}_k e^{j \frac{2\pi}{M} kn}, \quad (15.177)$$

где $\Phi_x\left(j \frac{2\pi}{M} k, \varepsilon\right)$ — значение частотной передаточной функции, полученное из $\Phi_x(z, \varepsilon)$ подстановкой $z = e^{j \frac{2\pi}{M} k}$.

Аналогичным образом по передаточной функции $\Phi(z, \varepsilon)$ может быть получена для установившегося режима выходная величина $y[n, \varepsilon]$.

Более простой метод заключается в следующем. Рассмотрим, например, задающее воздействие $g[n]$, представляющее собой периодическую последовательность, изображение которой (15.113)

$$G(z) = \frac{z^M}{z^M - 1} \sum_{r=0}^{M-1} g[r] z^{-r} = \frac{z^M}{z^M - 1} G_0(z),$$

где $G_0(z)$ — изображение $g[n]$ на интервале $0 \div M$. Пусть рассматриваемая последовательность действует на входе системы с передаточной функцией $\Phi(z)$. Тогда изображение выходной величины

$$Y(z) = \frac{Y_1(z)}{Y_2(z)} = \Phi(z) G(z) = Y^0(z) + Y^*(z)$$

можно представить в виде суммы изображений переходной составляющей $Y^0(z)$ и установившегося периодического режима $Y^*(z)$. Первая составляющая определяется полюсами функции $\Phi(z)$ и с течением времени затухает, так как система предполагается устойчивой.

Периодическая составляющая на выходе может быть представлена в виде

$$Y^*(z) = \frac{z^M}{z^M - 1} \cdot Y_0^*(z) = \frac{z^M}{z^M - 1} \cdot \frac{a_0 z^M + a_1 z^{M-1} + \dots + a_{M-1} z}{z^M},$$

где $Y_0^*(z)$ — изображение $y[n]$ на интервале $0 \div M$ в установившемся режиме, которое и является искомой величиной, коэффициенты $a_0, \dots, a_{M-1}$ должны быть определены при разложении на сумму дробно-рациональных функций $Y^0(z)$ и $Y^*(z)$. Для этой цели могут использоваться известные

методы, например теорема разложения. Так, если степень $Y_1(z)$ равна степени $Y_2(z)$ и $Y_1(z) = zY_3(z)$, то

$$Y^*(z) = z \sum_{q=1}^M \frac{Y_3(z_q)}{(z-z_q) \dot{Y}_2(z_q)} = \frac{a_0 z^M + a_1 z^{M-1} + \dots + a_{M-1} z}{z^M - 1}, \quad (15.178)$$

где z_q ($q = 1, \dots, M$) — корни уравнения $z^M - 1 = 0$.

Однако пользоваться этой формулой при $M > 2$ практически неудобно. При $M \gg 1$ удобнее найти переходную составляющую $Y^0(z)$, а затем периодическую: $Y^*(z) = Y(z) - Y^0(z)$. Далее можно найти

$$Y_0^*(z) = \frac{z^M - 1}{z^M} [Y(z) - Y^0(z)] = \frac{a_0 z^M + \dots + a_{M-1} z}{z^M} = \\ = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{M-1} z^{-M+1}. \quad (15.179)$$

Так как полюсы $\Phi(z)$ известны, то отыскание переходной составляющей не представляет труда. Так, например, если степень числителя $Y(z)$ меньше степени знаменателя и полюсы $\Phi(z)$ не кратные, то

$$Y^0(z) = \sum_{i=1}^l \frac{Y_1(z_i)}{\dot{Y}_2(z_i) (z - z_i)},$$

где z_i ($i = 1, 2, \dots, l$) — полюсы $\Phi(z)$.

Если степень числителя $Y(z)$ одинакова со степенью знаменателя, но числитель имеет общий множитель z , то можно записать

$$Y(z) = \frac{Y_1(z)}{Y_2(z)} = \frac{zY_3(z)}{Y_2(z)}.$$

Тогда

$$Y^0(z) = z \sum_{i=1}^l \frac{Y_3(z_i)}{(z - z_i) \dot{Y}_2(z_i)}.$$

Другие возможные случаи — см. § 15.2, п. 13.

Если входное воздействие представляет собой симметричную периодическую последовательность с полупериодом N , изображение которой дается формулой (15.114), то аналогичная зависимость для изображения периодической последовательности выходной величины на интервале $0 \div N$ будет

$$Y_0^*(z) = \frac{z^N + 1}{z^N} Y^*(z) = \frac{z^N + 1}{z^N} [Y(z) - Y^0(z)] = \\ = \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_{N-1} z}{z^N} = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-N+1}, \quad (15.180)$$

где $Y^0(z)$ — переходная составляющая, определяемая полюсами $\Phi(z)$.

Пример. Рассмотрим входную последовательность в виде прямоугольной волны (рис. 15.10, е), но с полупериодом $N = 3$ и систему с передаточной функцией

$$\Phi(z) = \frac{z-a}{z}.$$

Изображение периодической последовательности на входе (15.114)

$$G(z) = \frac{z^3}{z^3 + 1} \sum_{r=0}^2 1 \cdot z^{-r} = \frac{z(1+z+z^2)}{z^3 + 1}.$$

Найдем периодический режим на выходе. В соответствии с (15.180), учитывая, что $\Phi(z)$ имеет единственный полюс $z_1 = 0$, имеем

$$Y_0^*(z) = \frac{z^3 + 1}{z^3} \left[\frac{(1 + z + z^2)(z - a)}{z^3 + 1} + a \right] = \\ = \frac{(1 + z + z^2)(z - a) + a(z^3 + 1)}{z^3} = 1 + a + (1 - a)z^{-1} + (1 - a)z^{-2}.$$

Отсюда следует, что в установившемся периодическом режиме на выходе, если совместить начало положительного полупериода с началом отсчета, будет $y[0] = 1 + a$, $y[1] = y[2] = 1 - a$. В следующем полупериоде будет $y[3] = -y[0] = -(1 + a)$, $y[4] = y[5] = -y[1] = -(1 - a)$ и т. д.

§ 15.5. Случайные процессы в импульсных системах

Введем понятие случайной решетчатой функции $f[n]$, которую можно образовать из непрерывной случайной функции $f(t)$ ее дискретизацией. В этом случае она будет определена в дискретные моменты времени $t = nT$. Будем рассматривать стационарные процессы, когда вероятностные характеристики не зависят от времени.

Среднее значение решетчатого случайного стационарного процесса

$$\overline{f[n]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N f[n], \quad (15.181)$$

или на основании эргодического свойства

$$\overline{f[n]} = M\{f[n]\} = \int_{-\infty}^{\infty} f[n] w(f[n]) df, \quad (15.182)$$

где $w(f[n])$ — одномерная плотность вероятности.

Для центрированных процессов среднее значение равно нулю.

Введем понятие *корреляционной функции*

$$R[m] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N f[n] f[n+m]. \quad (15.183)$$

Аналогично главе 11 можно сформулировать основные свойства корреляционной функции.

1. Для случая $m = 0$

$$R[0] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N f^2[n] = \overline{f^2[n]}. \quad (15.184)$$

2. При $m = 0$ корреляционная функция достигает наибольшего значения:

$$R[0] \geq R[m]. \quad (15.185)$$

3. Корреляционная функция является четной:

$$R[-m] = R[m]. \quad (15.186)$$

При наличии двух случайных процессов $f_1[n]$ и $f_2[n]$ можно ввести понятие *взаимной корреляционной функции*

$$R_{12}[m] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N f_1[n] f_2[n+m]. \quad (15.187)$$

Свойства ее схожи со свойствами взаимной корреляционной функции для непрерывных процессов.

Введем понятие спектральной плотности случайного стационарного решетчатого процесса как *двустороннего z-преобразования* корреляционной функции

$$S_0(z) = TS(z) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m] z^{-m} = T [F(z) + F(z^{-1}) - R(0)], \quad (15.188)$$

где T — нормирующий множитель, равный периоду дискретности, а $F(z)$ представляет собой z -преобразование корреляционной функции $R[m]$. Нормирующий множитель T введен в $S_0(z)$ для того, чтобы сделать физическую размерность спектральной плотности дискретного случайного процесса равной размерности спектральной плотности непрерывного процесса и сохранить ее физический смысл. Однако это не обязательно.

Аналогично непрерывному случаю можно ввести понятие спектральной плотности как функции круговой частоты

$$\bar{S}(\omega) = S(e^{j\omega T}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m] e^{-j\omega m T} \quad (15.189)$$

или при учете четности

$$\bar{S}(\omega) = R[0] + 2 \sum_{m=1}^{\infty} R[m] \cos \omega m T. \quad (15.190)$$

Наконец, можно определить спектральную плотность как функцию абсолютной псевдочастоты. Для этого в формуле (15.188) необходимо перейти к w -преобразованию, используя подстановку (15.163), а затем перейти к псевдочастоте посредством подстановки $w = j\frac{T}{2}\lambda$. В результате получим

$$S^*(\lambda) = S\left(\frac{1+w}{1-w}\right) \bigg|_{w=j\frac{T}{2}\lambda}. \quad (15.191)$$

Аналогичным образом может быть определена взаимная спектральная плотность двух процессов.

Заметим, что все приведенные формулы могут быть записаны и для случая $\varepsilon \neq 0$, тогда рассматривается случайная решетчатая функция $f[n, \varepsilon]$, корреляционная функция $R[m, \varepsilon]$, спектральные плотности $S(z, \varepsilon)$, $\bar{S}(\omega, \varepsilon)$ и $S^*(\lambda, \varepsilon)$.

Основное свойство спектральной плотности, как и в непрерывном случае, заключается в том, что интеграл от нее по всем частотам дает средний квадрат случайной величины. Можно показать [136], что в дискретном случае соответствующая формула имеет вид

$$\overline{f^2[n]} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \bar{S}(\omega) d\omega = \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} \bar{S}(\omega) d\omega. \quad (15.192)$$

Так как имеют место равенства

$$e^{j\omega T} = \frac{1 + j\frac{T}{2}\lambda}{1 - j\frac{T}{2}\lambda}, \quad d\omega = \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2 \frac{T^2}{4}},$$

то формула (15.192) может быть записана в виде

$$\overline{f^2[n]} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^*(\lambda) d\lambda}{1 + \lambda^2 \frac{T^2}{4}} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^*(\lambda) d\lambda}{1 - (j\lambda)^2 \frac{T^2}{4}}. \quad (15.193)$$

Выражение (15.193) обычно является более удобным для расчетов по сравнению с (15.192), так как позволяет использовать таблицы интегралов (см. приложение 2).

Типовые случайные стационарные процессы. Если для функции $f(t)$, представляющей собой центрированную помеху, эффективное время корреляции

$$\Delta\tau = \frac{1}{R(0)} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau \quad (15.194)$$

меньше периода дискретности, $\Delta\tau < T$, то такой процесс может быть представлен как дискретный белый шум с корреляционной функцией

$$R[m] = R(0) \cdot \delta_0[m], \quad (15.195)$$

где $R[0] = D$ — дисперсия, а $\delta_0[m]$ — единичная решетчатая импульсная функция (15.32), равная единице при $m = 0$ и равная нулю при $m \neq 0$. Этому белому шуму соответствует спектральная плотность

$$S(z) = \bar{S}(\omega) = S^*(\lambda) = D. \quad (15.196)$$

Если эффективное время корреляции $\Delta\tau > T$, то корреляционная функция $R[m]$ может быть получена из соответствующей корреляционной функции непрерывного процесса $R(\tau)$ заменой $\tau = mT$. Спектральная плотность может быть получена использованием формул (15.188) — (15.191).

Таблица 15.2

Вид процесса	$R[m]$	$S(z)$	$S^*(\lambda)$
Белый шум	$R(0) \delta_0[m] = D \delta_0[m]$	D	D
Случайный процесс с ограниченной полосой	$De^{-\frac{ mT }{T_{\Pi}}}$	$\frac{D2z \operatorname{sh} \frac{T}{T_{\Pi}}}{z^2 - 2z \operatorname{ch} \frac{T}{T_{\Pi}} + 1}$	$\frac{D \left[\left(1 + \lambda^2 \frac{T^2}{4} \right) \operatorname{th} \frac{T}{2T_{\Pi}} \right]}{\frac{\lambda^2 T^2}{4} + \operatorname{th}^2 \frac{T}{2T_{\Pi}}}$
Нерегулярная качка	$De^{-\mu mT } \cos \beta mT$	$D \left[\frac{z(z - d \cos \beta T)}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2} - \frac{dz(dz - \cos \beta T)}{d^2 z^2 - 2zd \cos \beta T + 1} \right]$ $d = e^{-\mu T}$	$DA \left(1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4} \right) \left(B + \frac{\lambda^2 T^2}{4} \right) / \left(B - \frac{\lambda^2 T^2}{4} \right) + 4A^2 \cdot \frac{\lambda^2 T^2}{4}$
$A = \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu T}{2} \operatorname{ch} \frac{\mu T}{2}}{1 + \operatorname{sh} \frac{\mu T}{2} - \sin^2 \frac{\beta T}{2}}, \quad B = \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\mu T}{2} + \sin^2 \frac{\beta T}{2}}{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{\mu T}{2} - \sin^2 \frac{\beta T}{2}}.$			

В табл. 15.2 приведены некоторые типовые дискретные стационарные случайные процессы.

Прохождение сигнала через линейную систему. Пусть на входе линейного звена с известной дискретной передаточной функцией $W(z)$ действует случайная функция $x_1[n]$, для которой известны корреляционная функция $R_1[m]$ и спектральная плотность $\bar{S}_1(\omega)$ или $S_1^*(\lambda)$. Тогда для выходной величины $x_2[n]$, аналогично непрерывному случаю, можно найти спектральную плотность умножением спектральной плотности входного сигнала

на квадрат модуля частотной передаточной функции:

$$\bar{S}_2(\omega) = |W(e^{j\omega T})|^2 \bar{S}_1(\omega), \quad S_2^*(\lambda) = |W^*(j\lambda)|^2 S_1^*(\lambda). \quad (15.197)$$

Интегрирование спектральной плотности по всем частотам в соответствии с (15.192) и (15.193) позволяет найти средний квадрат выходной величины $\bar{x}_2^2[n]$. Это позволяет для замкнутой импульсной системы производить расчеты, аналогичные изложенным в § 11.8. Так, например, пусть в схеме, изображенной на рис. 15.11, на входе действуют полезный сигнал $g(t)$ и помеха $n(t)$, не коррелированные между собой. Обозначим их спектральные плотности $S_g^*(\lambda)$ и $S_n^*(\lambda)$. Тогда спектральная плотность ошибки

$$S_x^*(\lambda) = |\Phi_x^*(j\lambda)|^2 S_g^*(\lambda) + |\Phi_n^*(j\lambda)|^2 S_n^*(\lambda), \quad (15.198)$$

где $\Phi^*(j\lambda)$ и $\Phi_x^*(j\lambda)$ — частотные передаточные функции замкнутой системы и замкнутой системы по ошибке.

Интегрирование (15.198) по всем частотам в соответствии с (15.193) дает средний квадрат ошибки

$$\bar{x}^2[n] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Phi_x^*(j\lambda)|^2 S_g^*(\lambda) d\lambda}{1 + \lambda^2 \frac{T^2}{4}} + \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Phi_n^*(j\lambda)|^2 S_n^*(\lambda) d\lambda}{1 + \lambda^2 \frac{T^2}{4}}. \quad (15.199)$$

Подобным же образом могут быть найдены расчетные формулы и для других возможных случаев (см. § 11.8).

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

ГЛАВА 16

СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 16.1. Общие понятия

Нелинейной системой автоматического регулирования называется такая система, которая содержит хотя бы одно звено, описываемое нелинейным уравнением. Перечислим виды нелинейных звеньев:

- 1) звено релейного типа (рис. 1.12);
- 2) звено с кусочно-линейной характеристикой (рис. 1.10, δ и др.);
- 3) звено с криволинейной характеристикой любого очертания;
- 4) звено, уравнение которого содержит произведение переменных или их производных и другие их комбинации;
- 5) нелинейное звено с запаздыванием, причем запаздывание понимается в смысле § 14.1, а нелинейность может иметь любой вид;
- 6) нелинейное импульсное звено;
- 7) логическое звено;
- 8) звенья, описываемые кусочно-линейными дифференциальными уравнениями, в том числе переменная структура.

Различают статические и динамические нелинейности. Первые представляются в виде нелинейных статических характеристик, а вторые — в виде нелинейных дифференциальных уравнений.

Общий метод составления уравнений для нелинейных систем состоит в следующем. Сначала по правилам § 3.1, как делалось в главе 5, производится линеаризация уравнений всех звеньев системы, для которых это допустимо, кроме существенно нелинейных звеньев (чаще всего одного-двух). Затем составляются уравнения этих последних звеньев со всеми допустимыми упрощениями их характеристик.

В результате получается система обыкновенных линейных уравнений, к которым добавляется одно-два (иногда более) нелинейных. В соответствии с этим обобщенную структурную схему любой нелинейной системы автоматического регулирования в случае одного нелинейного звена можно представить в виде рис. 16.1, *а*, где линейная часть может иметь структуру любой сложности (с обратными связями и т. п., как, например, на рис. 16.1, *б* или *в*). В случае двух нелинейных звеньев могут быть разные комбинации, в зависимости от того, в какие цепи системы они входят (см., например, рис. 16.2).

Часто при исследовании нелинейных систем автоматического регулирования удается выделить нелинейность так, чтобы она описывалась непосредственно зависимостью между выходной и входной величинами

$$x_2 = F(x_1), \quad (16.1)$$

которая может иметь любую форму (релейного типа, кусочно-линейного или криволинейного). Но иногда, как будет показано в следующих

параграфах, не удается этого сделать и приходится исследовать нелинейные дифференциальные зависимости вида

$$x_2 = F(x_1, px_1), \quad x_2 = F_1(x_1) + F_2(px_2), \quad (16.2)$$

$$F(px_2, x_2) = c_1 x_1, \quad F_1(p^2 x_2, px_2) + F_2(x_2) = c_1 x_1 \text{ и т. п.} \quad (16.3)$$

Встречаются и более сложные случаи, когда обе величины (входная и выходная) оказываются под знаком нелинейной функции раздельно:

$$F_2(px_2, x_2) = F_1(x_1), \quad F_3(px_2) + F_2(x_2) = F_1(x_1), \quad (16.4)$$

или же вместе:

$$F(px_2, x_2, x_1) = 0, \quad F_2(x_2) + F_1(x_2, x_1) = 0. \quad (16.5)$$

Разделим все нелинейные системы регулирования на два больших класса.

1. К первому классу нелинейных систем отнесем такие, в которых уравнение нелинейного звена приводится к любому из видов (16.1) — (16.3), т. е. когда под знаком нелинейной функции стоит только входная величина (и ее производные) либо только выходная величина (и ее производные). При этом имеется в виду, что схема системы в целом может быть приведена к виду рис. 16.1 с одним нелинейным звеном. К этому классу

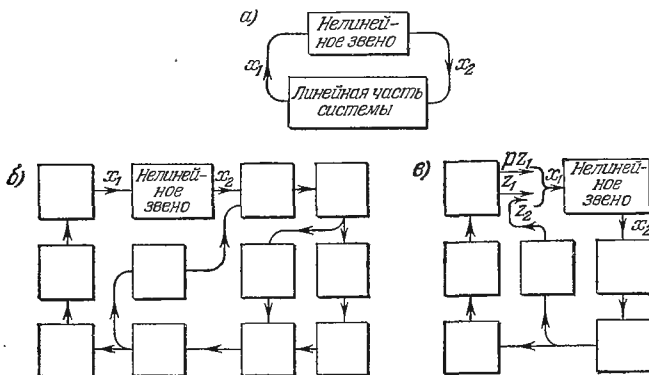


Рис. 16.1.

сводится, например, также случай с двумя нелинейными звеньями, указанный на рис. 16.2, в, так как там они могут быть объединены в одно нелинейное звено. Сюда же относятся и случаи, показанный на рис. 16.2, г, где имеются два нелинейных звена (если их уравнения содержат под знаком нелинейности только входную величину x , например, вида (16.1) или (16.2)).

2. Второй класс нелинейных систем включает системы с любым числом нелинейных звеньев, когда под знаки нелинейных функций входят различные переменные, связанные между собой *линейной* передаточной функцией. Так будет в случае системы с одним нелинейным звеном вида (16.4) или (16.5), а также в системе с двумя нелинейными звеньями (рис. 16.2, а или з), если в первом из них под знак нелинейности входит входная величина, а во втором — выходная. Система же рис. 16.2, б относится ко второму классу, если под знаки нелинейностей входят в обоих звеньях либо только входные, либо только выходные величины нелинейных звеньев.

Ко второму классу нелинейных систем относятся также системы с двумя и более нелинейностями, в уравнениях которых под знаки нелинейных функций входят разные переменные, связанные между собой *нелинейными* дифференциальными уравнениями (т. е. связанными через линейные части и нелинейные звенья). К таким системам относятся, напри-

мер, система на рис. 16.2, а, если в ее уравнениях под знаками нелинейных функций находятся входные (или выходные) величины обоих нелинейных звеньев, и многие другие системы.

Системы с логическими устройствами относятся обычно к нелинейным системам второго класса.

Заметим, что во всех случаях, когда под знак нелинейной функции входит какая-либо линейная комбинация разных переменных, их следует

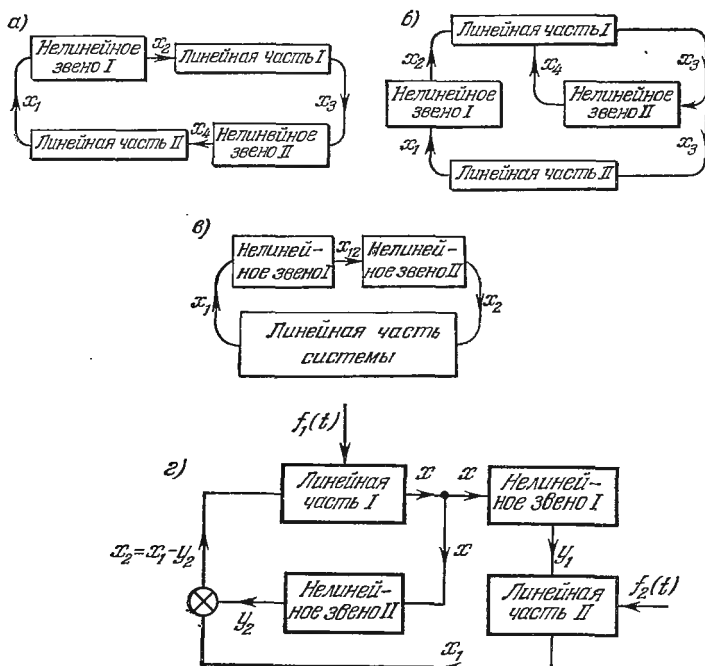


Рис. 16.2.

обозначать одной буквой, а данную линейную комбинацию учесть при составлении общего уравнения линейной части системы. Это бывает, например, в тех случаях, когда на вход нелинейного звена подаются производные или включается обратная связь. Так, если для рис. 16.1, б

$$x_2 = F(z_1 + k_1 p z_1 - k_2 z_2),$$

то, обозначая

$$z_1 + k_1 p z_1 - k_2 z_2 = x_1, \quad (16.6)$$

можно привести уравнение нелинейного звена к виду (16.1).

Из всех уравнений линейных звеньев, а также добавочных линейных выражений типа (16.6), получаемых при выделении нелинейности, составляется общее уравнение линейной части системы

$$Q(p) x_1 = -R(p) x_2 \quad (16.7)$$

(где $Q(p)$ и $R(p)$ — операторные многочлены) или передаточная функция линейной части системы

$$W_\pi(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}. \quad (16.8)$$

Составление уравнений будет проиллюстрировано ниже на примерах.

Процессы в нелинейных системах автоматического регулирования имеют целый ряд весьма существенных особенностей, которые не встречаются в линейных системах.

Благодаря этим существенным особенностям даже вопрос об устойчивости системы становится здесь более сложным. Кроме структуры системы и значений ее параметров для устойчивости того или иного установившегося процесса имеют значение здесь, в отличие от линейных систем, также и начальные условия. Возможен новый вид установившегося процесса — автоколебания, т. е. устойчивые собственные колебания с постоянной амплитудой при отсутствии внешних колебательных воздействий. Когда в системе

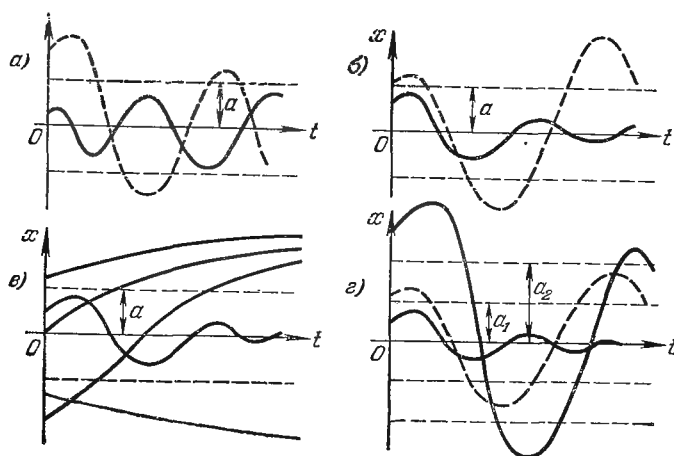


Рис. 16.3.

возникают автоколебания, то установившееся состояние, соответствующее постоянному значению регулируемой величины, часто становится невозможным.

Следовательно, в общем случае на плоскости параметров системы могут быть не два вида областей (устойчивости и неустойчивости), как в линейных системах, а больше: 1) область устойчивости равновесного состояния с постоянным значением регулируемой величины; 2) область устойчивых автоколебаний; 3) область неустойчивости системы; 4) области, соответствующие другим, более сложным случаям.

Если процессы в системе имеют вид, указанный на рис. 16.3, а, то равновесное состояние ($x = 0$) неустойчиво. В том случае, когда оба указанных на рис. 16.3, а колебания в переходных процессах стремятся к одной и той же амплитуде и к одной и той же частоте, система будет обладать устойчивыми автоколебаниями с амплитудой a .

На рис. 16.3, б и в показаны случаи, когда равновесное состояние ($x = 0$) системы устойчиво «в малом», т. е. при начальных условиях, не выводящих отклонения в переходном процессе за определенную величину a , и неустойчиво «в большом», т. е. при начальных условиях, выводящих отклонение в переходном процессе за пределы величины a . Здесь граничным процессом является неустойчивый периодический процесс собственного движения системы с амплитудой a (переходные процессы расходятся от него в обе стороны).

На рис. 16.3, г показан случай трех возможных установившихся состояний: 1) равновесное состояние ($x = 0$), 2) колебания с постоянной амплитудой a_1 , 3) колебания с постоянной амплитудой a_2 . При этом колебания с амплитудой a_1 неустойчивы. В результате система будет устойчива «в малом»

по отношению к равновесному состоянию $x = 0$, а «в большом» система будет обладать устойчивыми автоколебаниями с амплитудой a_2 .

Пример. Для иллюстрации особенностей нелинейной системы исследуем переходный процесс и автоколебания в релейной системе автоматического регулирования температуры, изображенной на рис. 1.35. Для этого составим сначала уравнения регулируемого объекта и регулятора.

Пусть регулируемый объект представляет собой некоторую камеру. Учитывая инерционность процесса нагрева и охлаждения, запишем уравнение регулируемого объекта в виде

$$T_1 \frac{d\theta}{dt} + \theta = -k_1 \Phi + f(t), \quad (16.9)$$

где θ — отклонение температуры, Φ — отклонение регулирующего органа, $f(t)$ — внешние возмущения.

При отклонении температуры θ появляется ток в диагонали моста того или иного направления (рис. 1.35) и замыкается тот или иной контакт реле, включающего постоянное напряжение в ту или иную обмотку возбуждения электродвигателя. Приняв во внимание некоторое отставание в этом процессе включения, получим релейную характеристику вида z) рис. 1.36. Далее, считая, что ток I пропорционален отклонению температуры объекта θ ,

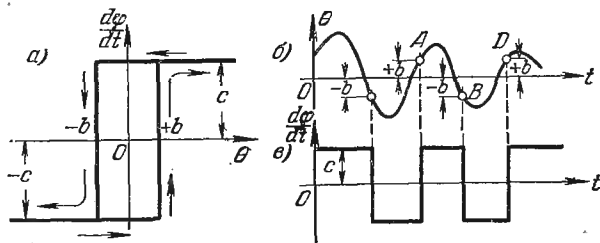


Рис. 16.4.

а скорость $\frac{d\Phi}{dt}$ отклонения регулирующего органа пропорциональна напряжению на обмотках возбуждения электродвигателя, можно в данном случае выходной величиной для указанной релейной характеристики считать прямо $\frac{d\Phi}{dt}$, а входной — θ (рис. 16.4, а).

Следовательно, уравнение регулятора запишется здесь следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= +c & \text{при } \theta > +b, \\ \frac{d\Phi}{dt} &= -c & \text{при } \theta < +b, \end{aligned} \right\} \quad \text{когда } \frac{d\theta}{dt} > 0; \quad (16.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= +c & \text{при } \theta > -b, \\ \frac{d\Phi}{dt} &= -c & \text{при } \theta < -b, \end{aligned} \right\} \quad \text{когда } \frac{d\theta}{dt} < 0. \quad (16.11)$$

Рассмотрим два произвольных участка переходного процесса (при $f(t) = 0$) в данной системе (участки AB и BD на рис. 16.4, б).

На участке AB уравнение регулятора согласно рис. 16.4, в будет $\frac{d\Phi}{dt} = +c$. Дифференцируя (16.9) по t и подставляя туда $+c$, получаем при $f(t) = 0$ следующее уравнение системы регулирования на участке AB :

$$T_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = -k_1 c, \quad (16.12)$$

а на участке BD

$$T_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = +k_1 c. \quad (16.13)$$

Решение уравнения (16.12) будет

$$\frac{d\theta}{dt} = C_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - k_1 c, \quad (16.14)$$

откуда получаем

$$\theta = -T_1 C_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - k_1 c t + C_2. \quad (16.15)$$

Условимся для простоты отсчитывать время t от начала участка AB (рис. 16.5, а). Тогда начальные условия будут

$$\theta = +b, \quad \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}_A \quad \text{при } t=0,$$

где $\dot{\theta}_A$ пока неизвестно. Используя начальные условия, находим произвольные постоянные для уравнения (16.15):

$$C_1 = \dot{\theta}_A + k_1 c, \quad C_2 = b + T_1 C_1. \quad (16.16)$$

Аналогично для участка BD согласно (16.13), отсчитывая время t тоже от начала этого участка (рис. 16.5, б), получим решение

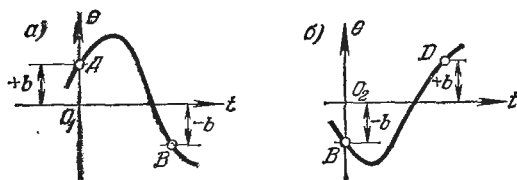
$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= C'_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + k_1 c, \\ \theta &= -T_1 C'_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + k_1 c t + C'_2, \\ C' &= \dot{\theta}_B - k_1 c, \quad C'_2 = -b + T_1 C'_1. \end{aligned} \right\} \quad (16.17)$$

Все остальные участки кривой переходного процесса будут определяться, очевидно, такими же решениями, но только с другими числовыми значениями величин C_1 , C_2 , $\dot{\theta}_A$, C'_1 , C'_2 , $\dot{\theta}_B$. Заметим, что величины $\dot{\theta}_A$ и $\dot{\theta}_B$, необходимые для определения произвольных постоянных, находятся как значения $\dot{\theta}$ в конце предшествующих им участков. Поэтому, если будет

задана величина $\dot{\theta}$ в начальной точке первого участка процесса, то все вышесказанное решение для переходного процесса в системе станет определенным. Такой метод решения задачи называется *методом припасовывания*.

Выясним теперь, возможны ли в данной системе автоколебания, т. е. устойчивое пе-

Рис. 16.5.



риодическое решение. Для этого нужно, очевидно, чтобы в конце D одного периода колебаний (рис. 16.4, б) получились точно такие же значения θ и $\dot{\theta}$, какие были в начале его A . Легко заметить, что при этом оба полупериода (AB и BD) должны быть одинаковыми вследствие симметрии характеристики (рис. 16.4, а). Поэтому для определения автоколебаний

с начальными условиями

$$x_1 = x_{10}, \quad x_2 = x_{20}, \quad \dots, \quad x_n = x_{n0} \quad \text{при } t = 0,$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — переменные, являющиеся искомыми функциями времени, причем x_1 может обозначать регулируемую величину, а $x_2, \dots, x_n$ — вспомогательные переменные; f и g — возмущающее и задающее воздействия.

Пусть, например, в уравнениях (16.21) будет $n = 3$ (система третьего порядка). Переменные x_1, x_2, x_3 здесь могут иметь любой физический смысл.

Но условно их можно представить мысленно как прямоугольные координаты некоторой точки M (рис. 16.7, а).

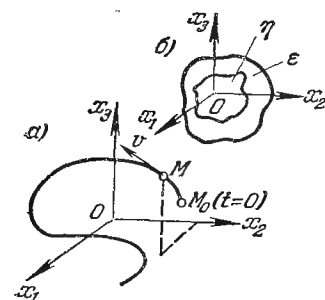


Рис. 16.7.

В реальном процессе регулирования в каждый момент времени величины x_1, x_2, x_3 имеют вполне определенные значения. Это соответствует вполне определенному положению точки M в пространстве (рис. 16.7, а). С течением времени в реальном процессе величины x_1, x_2, x_3 определенным образом изменяются. Это соответствует определенному перемещению точки M в пространстве по определенной траектории. Следовательно, траектория движения точки M может служить наглядной геометрической иллюстрацией дина-

мического поведения системы в процессе регулирования.

Точка M называется *изображающей точкой*, ее траектория называется *фазовой траекторией*, а пространство (x_1, x_2, x_3) называется *фазовым пространством*.

Так как производные по времени от координат точки представляют проекции ее скорости v на оси координат, то дифференциальные уравнения системы в форме (16.21) представляют собой выражения для проекций скорости v изображающей точки M (рис. 16.7, а) на оси координат. Следовательно, по значениям правых частей уравнений (16.21) в каждый момент времени можно судить о направлении движения изображающей точки M , а вместе с тем и о поведении соответствующей реальной системы в процессе регулирования.

Начальные условия процесса регулирования (x_{10}, x_{20}, x_{30}) определяют координаты начальной точки фазовой траектории M_0 (рис. 16.7, а).

Если переменных в уравнениях (16.21) будет всего две: x_1 и x_2 (система второго порядка), то изображающая точка будет двигаться не в пространстве, а на плоскости (*фазовая плоскость*).

Если переменных будет любое число $n > 3$ (система n -го порядка), то фазовое пространство будет не трехмерным, а n -мерным.

Итак, фазовое пространство и фазовые траектории представляют собой лишь геометрический образ динамических процессов, протекающих в системе. В этом геометрическом представлении участвуют координаты и исключено время. Фазовая траектория сама по себе дает лишь качественное представление о характере поведения системы. Чтобы определить количественно положение изображающей точки (а значит, и состояние системы) в любой момент времени, нужно найти решение заданных дифференциальных уравнений (16.21) во времени.

Если уравнения (16.21) составлены в отклонениях от установившегося состояния, то последнее характеризуется значениями $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Следовательно, изображением установившегося состояния системы является начало координат фазового пространства.

Отсюда вытекает, что фазовые траектории устойчивой линейной системы будут асимптотически приближаться к началу координат при неограниченном

увеличении времени. Фазовые траектории неустойчивой линейной системы будут неограниченно удаляться от начала координат.

Для нелинейной системы вследствие ряда особенностей процессов, отмечавшихся выше, фазовые траектории могут принимать самые разнообразные очертания. Если имеется асимптотическая устойчивость для определенного круга начальных условий, то все фазовые траектории, которые начинаются внутри определенной области η , окружающей начало координат фазового пространства (рис. 16.7, б), будут асимптотически приближаться к началу координат. Если устойчивость неасимптотическая, то фазовые траектории, начинающиеся внутри определенной области η вокруг начала координат фазового пространства, могут иметь любые очертания, но не будут выходить за пределы некоторой определенной области ε , окружающей начало координат (рис. 16.7, б).

Формулировка понятия устойчивости по Ляпунову. Невозмущенное движение (установившийся процесс) называется устойчивым, если при заданной сколь угодно малой области ε (рис. 16.7, б) можно найти такую область η , что при начальных условиях, расположенных внутри этой области, возмущенное движение (переходный процесс) будет таким, что изображающая точка не выйдет из области ε при любом сколь угодно большом значении времени t .

В аналитической записи формулировка понятия устойчивости по Ляпунову будет следующей. Невозмущенное движение (установившийся процесс) будет устойчивым, если при заданных положительных сколь угодно малых числах ε_i можно найти такие положительные числа η_i ($i = 1, \dots, n$), что при начальных условиях

$$|x_{i0}| < \eta_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (16.22)$$

решение дифференциальных уравнений возмущенного движения (переходного процесса) удовлетворяет неравенствам

$$|x_i(t)| < \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

при любом сколь угодно большом t , начиная с некоторого $t = T > 0$.

Представим себе для этой аналитической записи геометрический образ в фазовом пространстве. Очевидно, что при ограничении начальных условий по каждой координате неравенствами (16.22) получается n -мерный параллелепипед со сторонами $2\eta_i$, внутри которого должна лежать начальная точка фазовой траектории $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$. На фазовой плоскости ($n = 2$) он обращается в прямоугольник. Аналогично и второе из написанных неравенств геометрически означает, что фазовые траектории не должны выходить из параллелепипеда со сторонами $2\varepsilon_i$.

В формулировке Ляпунова содержится требование сколь угодно малости указанных областей. Однако практически это определение, так же как и теоремы Ляпунова, которые будут приведены ниже, применяется и тогда, когда эти области имеют определенные конечные размеры.

Фазовые траектории для обыкновенных линейных систем. Пусть переходный процесс в некоторой системе описывается уравнением второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0. \quad (16.23)$$

Введем обозначение для скорости изменения отклонения регулируемой величины $y = \frac{dx}{dt}$. Тогда уравнение системы (16.23) преобразуется к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -a_1 y - a_2 x, \\ \frac{dx}{dt} &= y. \end{aligned} \right\} \quad (16.24)$$

Исключим³ из уравнений (16.24) время t , разделив первое из них на второе (при x и $y \neq 0$):

$$\frac{dy}{dx} = -a_1 - a_2 \frac{x}{y}. \quad (16.25)$$

Решение $y = \varphi(x)$ этого дифференциального уравнения с одной произвольной постоянной определяет собой некоторое семейство так называемых интегральных кривых на фазовой плоскости (x, y) , каждая из которых соответствует одному определенному значению произвольной постоянной.

Вся совокупность интегральных кривых представит собой все возможные фазовые траектории, а значит, и все возможные виды переходного процесса в данной системе автоматического регулирования при любых начальных условиях.

Рассмотрим отдельно различные случаи. Уравнению (16.23) соответствуют корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2},$$

причем возможны шесть случаев:

- 1) корни чисто мнимые при $a_1 = 0, a_2 > 0$ (граница устойчивости линейной системы);
- 2) корни комплексные и имеют отрицательные вещественные части при $a_1^2 < 4a_2, a_1 > 0, a_2 > 0$ (устойчивая линейная система);
- 3) корни комплексные и имеют положительные вещественные части при $a_1^2 < 4a_2, a_1 < 0, a_2 > 0$ (неустойчивая линейная система);
- 4) корни вещественные отрицательные при $a_1^2 > 4a_2, a_1 > 0, a_2 > 0$ (устойчивая линейная система);
- 5) корни вещественные положительные при $a_1^2 > 4a_2, a_1 < 0, a_2 > 0$ (неустойчивая линейная система);
- 6) корни вещественные и имеют разные знаки при $a_2 < 0$ (неустойчивая линейная система); в частности, один из корней будет равен нулю при $a_2 = 0$ (граница устойчивости линейной системы).

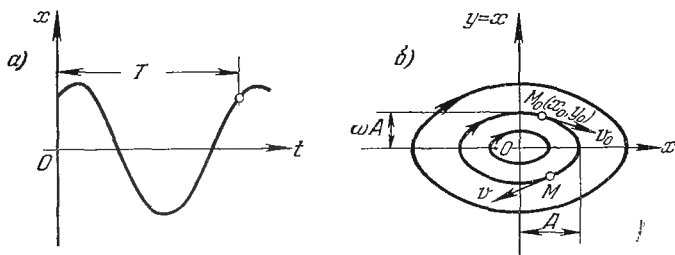


Рис. 16.8.

С л у ч а й 1. В первом случае получаются, как известно, незатухающие колебания (рис. 16.8, а)

$$x = A \sin(\omega t + \beta), \quad y = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \beta), \quad \omega = \sqrt{a_2}, \quad (16.26)$$

с постоянной амплитудой A и начальной фазой β , которые зависят от начальных условий. Для фазовой плоскости уравнения (16.26) представляют собой параметрические уравнения эллипса с полуосями A и ωA (рис. 16.8, б). Уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{(\omega A)^2} = 1$$

можно получить непосредственным решением дифференциального уравнения фазовых траекторий (16.25) при $a_1 = 0$ и $a_2 = \omega^2$, причем A — произвольная постоянная интегрирования.

Итак, периодическим колебаниям системы (рис. 16.8, а) соответствует движение изображающей точки по замкнутой кривой (рис. 16.8, б).

С л у ч а й 2. В этом случае (комплексные корни с отрицательными вещественными частями), как известно, имеют место затухающие колебания (рис. 16.9, а)

$$x = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \beta), \quad y = \frac{dx}{dt} = \gamma Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t + \beta + \delta),$$

где

$$\alpha = \frac{a_1}{2}, \quad \omega = \sqrt{a_2 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}, \quad \gamma = \sqrt{a_2}, \quad \delta = \arctg \frac{\alpha}{\omega},$$

а произвольные постоянные A и β определяются из начальных условий:

$$x = x_0, \quad y = y_0 = \dot{x}_0 \text{ при } t = 0.$$

Значения x и y не возвращаются за период колебания к прежним, а становятся меньше. Это дает на фазовой плоскости (x, y) кривую (рис. 16.9, б),

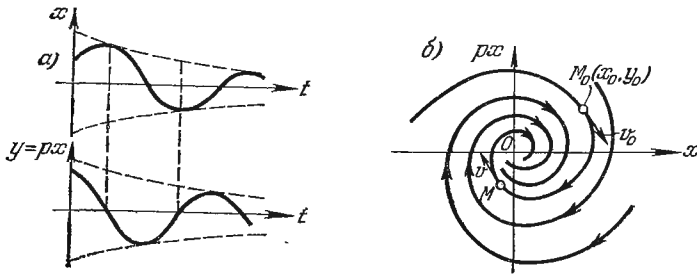


Рис. 16.9.

которая за один оборот не возвращается в прежнюю точку M_0 , а подходит ближе к началу координат.

Итак, затухающим колебаниям системы (рис. 16.9, а) отвечают фазовые траектории в виде спиралей, по которым изображающая точка приближается к началу координат (рис. 16.9, б).

С л у ч а й 3. Этот случай (комплексные корни с положительными вещественными частями) соответствует расходящимся колебаниям (рис. 16.10, а). Рассуждая аналогично предыдущему, получим всю совокупность возможных фазовых траекторий тоже в виде спиралей, но только изображающая точка будет двигаться по ним не к началу координат, а от него (рис. 16.10, б).

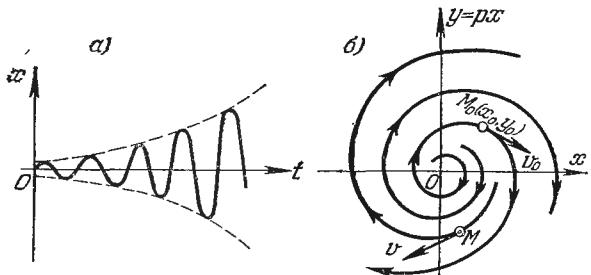


Рис. 16.10.

С л у ч а й 4. Этот случай (вещественные отрицательные корни) соответствует аperiodическому процессу

$$x = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad y = \frac{dx}{dt} = -\alpha_1 C_1 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_2 C_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad (16.27)$$

где

$$\alpha_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

На рис. 16.11, а показаны два возможных варианта (кривые 1 и 2) протекания такого процесса. Легко видеть, что на фазовой плоскости (x, y)

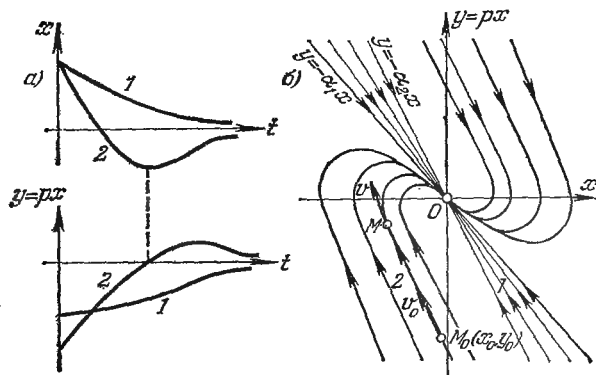


Рис. 16.11.

это изобразится кривыми 1 и 2 соответственно (рис. 16.11, б), так как в первом варианте все время $x > 0$ и $y < 0$, а во втором варианте знаки x и y меняются по одному разу. Границы областей 1 и 2 представляют собой прямые $y = -\alpha_1 x$ и $y = -\alpha_2 x$, получающиеся из уравнений (16.27) соответственно при $\alpha_2 = 0$ и при $\alpha_1 = 0$ (обращение одного из корней в нуль).

В отличие от прежнего здесь все фазовые траектории вливаются непо-

средственно в начало координат O фазовой плоскости. Однако изображающая точка M не попадает в начало координат в конечное время, а приближается асимптотически.

Итак, затухающим аperiodическим процессам в системе отвечают фазовые траектории, вливающиеся в начало координат.

С л у ч а й 5. Этот случай (вещественные положительные корни) соответствует также аperiodическому процессу, определяемому теми же уравнениями (16.27), но при $\alpha_1 < 0$ и $\alpha_2 < 0$. Аналогично предыдущему получаем кривые процесса и фазовые траектории, изображенные на рис. 16.12.

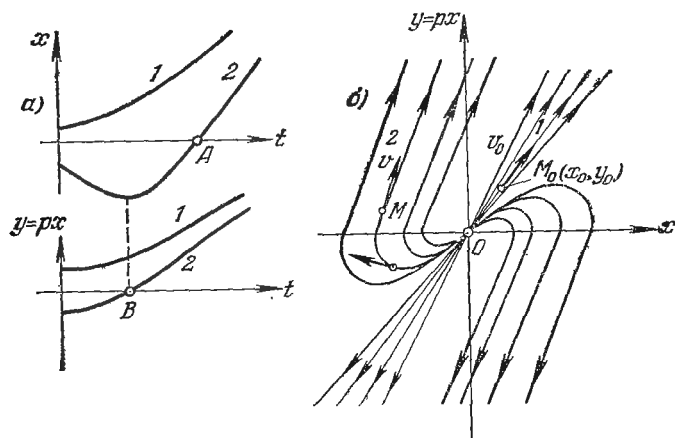


Рис. 16.12.

С л у ч а й 6. В этом случае (вещественные корни разных знаков) также имеет место аperiodический процесс (16.27) (рис. 16.13, а), где α_1 и α_2 имеют разные знаки, но картина фазовых траекторий здесь иная. Так как $a_2 < 0$, то введем обозначение $\alpha^2 = -a_2$, причем для простоты построений рас-

смотрим случай $a_1 = 0$, что соответствует согласно (16.23) уравнению системы $\frac{dy}{dt} - \alpha^2 x = 0$ и согласно (16.25) — уравнению фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = \alpha^2 \frac{x}{y}. \quad (16.28)$$

Интегрирование последних, аналогично случаю 1, дает $\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{(\alpha c)^2} = 1$, т. е. семейство гипербол, изображенное на рис. 16.13, б.

Направления движения изображающей точки M по фазовым траекториям, показанные на рис. 16.13, б, легко определяются в каждой четверти плоскости по знаку dy/dx (16.28).

Аналогичная картина фазовых траекторий получится в данном случае и при $a_1 \neq 0$.

Итак, расходящимся аperiodическим процессам в системе отвечают фазовые траектории типа рис. 16.12, б или типа рис. 16.13, б, причем

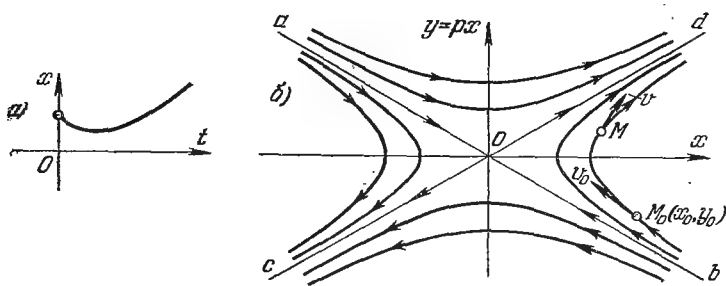


Рис. 16.13.

изображающая точка, двигаясь по ним, в конечном итоге удаляется от начала координат.

Особые точки. В точках, которые соответствуют установившемуся состоянию, получаем согласно (16.25) неопределенное выражение

$$\frac{dy}{dx} = -a_1 - a_2 \frac{0}{0},$$

т. е. неопределенное направление касательных к интегральным кривым (фазовым траекториям). Такие точки называются особыми точками, причем существует следующая классификация для них:

- а) особые точки типа точки O на рис. 16.8, б называются центрами,
- б) особые точки типа рис. 16.9, б называются устойчивыми фокусами,
- в) особые точки типа рис. 16.10, б называются неустойчивыми фокусами,
- г) особые точки типа рис. 16.11, б называются устойчивыми узлами,
- д) особые точки типа рис. 16.12, б называются неустойчивыми узлами,
- е) особые точки типа рис. 16.13, б называются седлами (седло всегда неустойчиво).

Особые линии для нелинейных систем. Реальные системы автоматического регулирования можно считать линейными чаще всего в предположении малости отклонений переменных от их значений в определенном установившемся состоянии.

За пределами указанной области вследствие значительного отклонения характеристик от линейных картина фазовых траекторий может сильно измениться и стать качественно иной.

В частности, если по линейной теории система оказывается неустойчивой и процесс начинает расходиться, то может оказаться, что из-за фактической нелинейности характеристик он не будет расходящимся неограниченно. Амплитуда расходящихся колебаний может увеличиваться только до определенного значения, а затем оставаться постоянной, т. е. неустойчивая

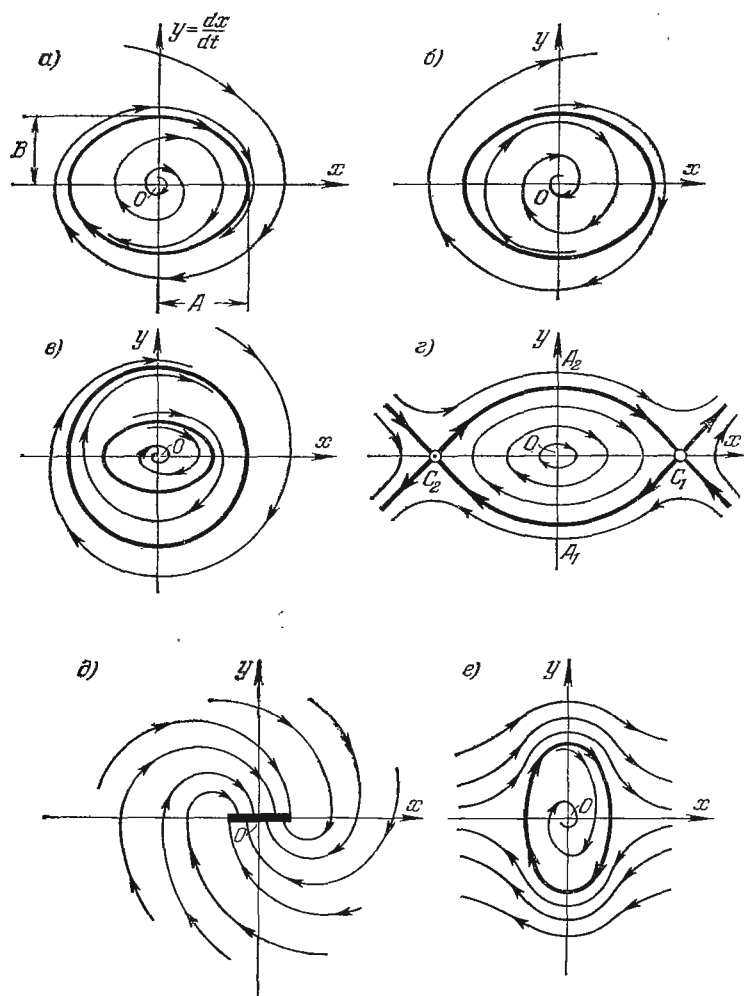


Рис. 16.14.

линейная автоматическая система как бы превращается в устойчивую нелинейную автоколебательную систему (система «генерирует» устойчивые колебания определенной формы).

Картина фазовых траекторий для такой системы изображена на рис. 16.14, а. Здесь вблизи начала координат получаются спирали, как в неустойчивой линейной системе (рис. 16.10, б), но далее все они расходятся не до бесконечности, а приближаются асимптотически к некоторому замкнутому контуру ограниченных размеров, как показано на рис. 16.14, а. К нему же приближаются и все спирали, находящиеся вне контура. Это

соответствует картине процессов во времени, изображенной на рис. 16.3, а. Такого вида замкнутый контур, представляющий собой наиболее важный для теории регулирования тип особых линий на фазовой плоскости, называется устойчивым предельным циклом.

Устойчивый предельный цикл соответствует автоколебаниям системы. Размеры предельного цикла A и B (рис. 16.14, а) представляют амплитуды колебаний самой величины x и скорости ее изменения $y = \frac{dx}{dt}$. Для определения периода автоколебаний надо обратиться к решению уравнений во времени.

Случаю устойчивости системы «в малом» и неустойчивости «в большом» (рис. 16.3, б) соответствует картина фазовых траекторий, изображенная на рис. 16.14, б. Граница начальных условий, до которой система устойчива, имеет чаще всего на фазовой плоскости вид неустойчивого предельного цикла, как на рис. 16.14, б, от которого в обе стороны удаляются спиралевидные фазовые траектории. Это — второй важный тип особых линий, определяющий устойчивость системы «в малом» и неустойчивость «в большом».

Заметим, что в этом случае может быть также еще более удаленный устойчивый предельный цикл (рис. 16.14, в), соответствующий автоколебаниям с большой амплитудой. Это соответствует процессам во времени, изображенным на рис. 16.3, г. Такие же принципиальные качественные изменения картины фазовых траекторий при достаточно больших отклонениях могут наблюдаться и в случаях аperiodических процессов (рис. 16.12, б и 16.13, б), включая превращения их в колебательные и наоборот. Например, картине процессов во времени, показанной на рис. 16.3, в, соответствует картина фазовых траекторий на рис. 16.14, е.

Аналогично для системы, находящейся согласно линейной теории на границе устойчивости (при чисто мнимых корнях), картина фазовых траекторий, изображенная на рис. 16.8, б, может иметь место лишь вблизи состояния установившегося режима O . При больших отклонениях, если линейность характеристик звеньев системы нарушается, картина фазовых траекторий будет другой. Один из возможных вариантов изменения фазовых траекторий при больших отклонениях в этом случае показан на рис. 16.14, г. Здесь, кроме особой точки O типа центра, появляются два седла C_1 и C_2 , что приводит фактически к неустойчивости системы. Но может иметь место и устойчивый предельный цикл. Особые линии такого типа, как $C_1A_1C_2$ и $C_2A_2C_1$ (рис. 16.14, г), на фазовой плоскости называются сепаратрисами (третий тип особых линий). Особые линии более сложного очертания рассматриваться не будут.

Здесь говорилось пока о системах, которые при малых отклонениях рассматриваются как линейные. Но совершенно аналогичная картина получается и для таких нелинейных систем автоматического регулирования, которые даже «в малом» нельзя рассматривать как линейные. Таковыми являются многочисленные типы релейных систем, а также системы с зоной нечувствительности, с гистерезисной петлей, с сухим трением, с зазором. Интересно отметить, что некоторые из таких систем скорее «в большом», чем «в малом», могут приближаться к линейным, когда зона нечувствительности или зазор оказываются малыми по сравнению с величиной отклонений x .

В системах с зоной нечувствительности и с сухим трением существуют, как известно, области застоя, когда установившемуся состоянию при данных внешних условиях (данной нагрузке) соответствует не одна точка, а целая область возможных равновесных состояний системы. На фазовой плоскости это выражается в том, что особая точка вытягивается в особый отрезок (рис. 16.14, д).

Заметим, наконец, что координатами (x, y) фазовой плоскости могут служить не обязательно отклонения регулируемой величины и скорость ее, как было выше. Для этой цели могут быть взяты любые две переменные,

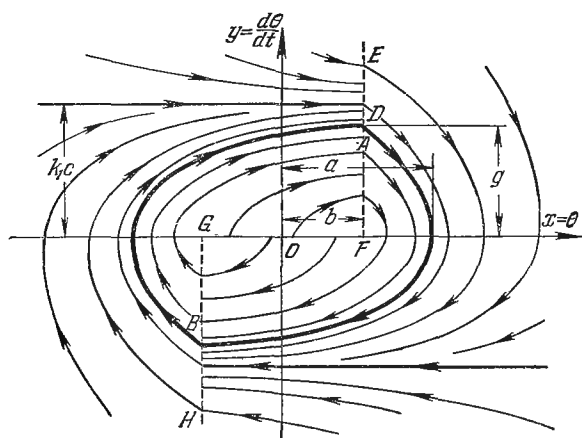


Рис. 16.15.

на рис. 16.15); если же $y < 0$, то при $\theta = -b$ (линия GH). Справа от линии переключения $EFGH$ справедливо уравнение системы (16.12), а слева — (16.13).

Уравнение (16.12) в обозначениях (16.29) примет вид

$$y = \frac{dx}{dt}, \quad T_1 \frac{dy}{dt} + y = -k_1 c,$$

откуда получаем дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T_1} - \frac{k_1 c}{T_1 y}. \quad (16.30)$$

Интегрирование его дает

$$x = k_1 c T_1 \ln |y + k_1 c| - T_1 y + C_1, \quad (16.31)$$

где C_1 — произвольная постоянная. Каждому конкретному значению C_1 соответствует определенная кривая на фазовой плоскости. Семейство кривых, отвечающих различным значениям C_1 , изображено на рис. 16.15 справа от линии $EFGH$. Эти кривые имеют асимптоту $y = -k_1 c$. Направление движения изображающей точки по ним, показанное стрелками, определяется из условия $y = \frac{dx}{dt}$, т. е. x возрастает при $y > 0$ и убывает при $y < 0$.

Уравнение (16.13) в обозначениях (16.29) будет

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T_1} + \frac{k_1 c}{T_1 y}, \quad (16.32)$$

что дает решение

$$x = -k_1 c T_1 \ln |y - k_1 c| - T_1 y + C_2,$$

согласно которому наносится семейство фазовых траекторий слева от линии $EFGH$ (рис. 16.15).

В результате получится, что фазовые траектории расходятся от начала координат и сходятся из бесконечности, т. е. имеет место случай, аналогичный рис. 16.14, а, а значит, где-то должен быть устойчивый предельный цикл. Он обозначен жирной линией на рис. 16.15.

однозначно характеризующие состояние системы второго порядка в произвольный момент времени.

Пример. Изобразим на фазовой плоскости переходный процесс и автоколебания в системе автоматического регулирования температуры, рассмотренной выше. Координаты фазовой плоскости будут

$$x = \theta \quad \text{и} \quad y = \frac{d\theta}{dt}. \quad (16.29)$$

Если $y > 0$, то согласно (16.10) и рис. 16.4, а переключение регулятора происходит при $\theta = +b$ (линия EF

Следовательно, в данной системе автоматического регулирования будут наблюдаться устойчивые автоколебания, к которым сходится переходный процесс с обеих сторон, т. е. при любых начальных условиях.

Автоколебательный процесс является здесь единственно возможным видом установившегося процесса, а строгое поддержание постоянной температуры ($\theta = 0$) невозможно. Амплитуда автоколебаний температуры в данной системе регулирования изображается на рис. 16.15 отрезком a . Период же автоколебаний определяется решением уравнений во времени, как было сделано выше. Половины AB и BD (рис. 16.15) предельного цикла соответствуют полупериодам AB и BD (рис. 16.4, б) автоколебаний.

Отрезок g (рис. 16.15) изображает амплитуду скорости изменения температуры при автоколебаниях; это есть величина (16.18). Видно, что $g < k_1 c$.

Перейдем к составлению уравнений нелинейных систем автоматического регулирования.

§ 16.2. Уравнения систем с нелинейностью релейного типа

Следуя сделанным в § 16.1 замечаниям, приведем несколько примеров составления уравнений нелинейных систем релейного типа.

Система автоматического регулирования напряжения. Пусть имеется шунтовой генератор постоянного тока (регулируемый объект) с вибрационным регулятором напряжения. Упрощенная принципиальная схема такой системы показана на рис. 16.16.

Когда контакты K под действием пружины Π замкнуты, сопротивление, обозначенное через $2r_1$, выключено из цепи возбуждения генератора 1. Система рассчитана так, что при этом напряжение U на клеммах генератора возрастает (при любой реально возможной нагрузке в сети, на которую работает данный генератор). В результате увеличивается ток I_2 в катушке 2 электромагнитного реле и якорь реле притягивается, размыкая тем самым контакты K . При разомкнутых же контактах K в цепь возбуждения включено сопротивление $2r_1$. Это вызывает снижение напряжения U , а значит уменьшение тока I_2 и отпущение реле, в результате чего контакты K снова замыкаются, выключая тем самым сопротивление $2r_1$ из цепи возбуждения. Настройка системы на желаемое номинальное значение регулируемой величины U производится установкой сопротивления R_d .

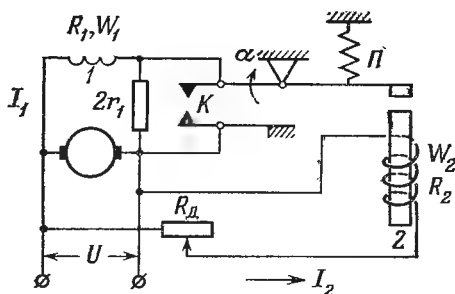


Рис. 16.16.

Уравнение регулируемого объекта (генератора) представим в линейном виде:

$$(T_1 p + 1) \Delta U = -k \Delta r + f(t), \quad (16.33)$$

где Δr — изменение сопротивления цепи возбуждения (регулирующее воздействие). Постоянная времени T_1 и коэффициент k_1 определяются параметрами якоря и цепи возбуждения.

Уравнение чувствительного элемента (катушки электромагнита 2) запишем в виде

$$(T_2 p + 1) \Delta I_2 = k_2 \Delta U. \quad (16.34)$$

Начало отсчета величин отклонений ΔU , ΔI_2 и Δr_1^3 будет определено ниже.

Регулирующий орган (контакты K , скачком включающие и выключающие сопротивление $2r_1$) является нелинейным звеном релейного типа. Выходная величина его — сопротивление r цепи возбуждения — меняется скачкообразно при срабатывании и отпускании реле, т. е. в зависимости от величины тока I_2 в цепи катушки 2 электромагнитного реле. Это изображено на рис. 16.17, а, где $I_{\text{ср}}$ и $I_{\text{отп}}$ — токи полного срабатывания и отпускания реле. Для составления уравнения такого нелинейного звена удобно, как

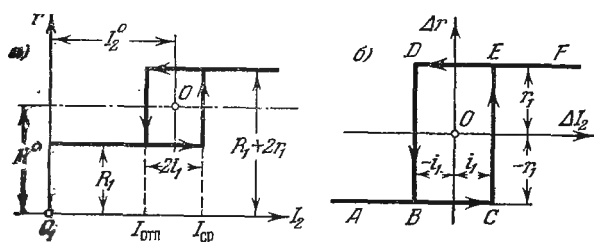


Рис. 16.17.

всегда, ввести отклонения ΔI_2 и Δr от некоторых постоянных значений I_2^0 и R^0 . Как указано на рис. 16.17, а, принимаем

$$I_2^0 = \frac{I_{\text{отп}} + I_{\text{ср}}}{2} = I_{\text{отп}} + i_1, \quad R^0 = R_1 + r_1. \quad (16.35)$$

Тогда характеристика данного нелинейного звена в отклонениях примет вид рис. 16.17, б, симметричный относительно начала координат (релейная характеристика с гистерезисной петлей).

В связи с этим уравнение нелинейного звена (рис. 16.17, б) будет

$$\Delta r = r_1 \operatorname{sign} (\Delta I_2 - i_1) \quad \text{при} \quad \frac{dI_2}{dt} > 0, \quad (16.36)$$

$$\Delta r = r_1 \operatorname{sign} (\Delta I_2 + i_1) \quad \text{при} \quad \frac{dI_2}{dt} < 0, \quad (16.37)$$

где выражение $\operatorname{sign} (\Delta I_2 - i_1)$ обозначает знак величины $(\Delta I_2 - i_1)$. Формулы (16.36) и (16.37) отвечают соответственно движению вправо по линии $ABCEF$ (рис. 16.17) и влево по линии $FEDBA$, причем в точках C и D происходит переключение реле (перескоки в точки E и B соответственно).

Уравнения линейной части системы (16.33) и (16.34), имея в виду исследовать переходный процесс при $f(t) = 0$, объединим в одно:

$$(T_1 p + 1) (T_2 p + 1) \Delta I_2 = -k_1 k_2 \Delta r. \quad (16.38)$$

Постоянные значения, от которых производится здесь отсчет отклонений переменных, определяются из алгебраических уравнений условного номинального установившегося режима

$$U^0 = (R_1 + r_1) I_1^0, \quad (R_2 + R_{\text{д}}) I_2^0 = U^0, \quad I_2^0 = \frac{I_{\text{отп}} + I_{\text{ср}}}{2}$$

с использованием реальных характеристик генератора.

Система автоматического регулирования курса водяной торпеды. Возьмем описанную в § 1.3 простейшую схему (рис. 1.20). Уравнение вращения торпеды вокруг вертикальной оси (рыскание по курсу) как регулируемого объекта запишем приближенно в виде

$$J \ddot{\psi} + c_1 \dot{\psi} = -c_2 \delta, \quad (16.39)$$

где ψ — угол отклонения торпеды от заданного направления, J — ее момент инерции относительно вертикальной оси, $c_1 \dot{\psi}$ — момент сопротивления среды

(воды), $c_2\delta$ — момент руля, δ — угол поворота руля. Разделив (16.39) на c_1 , получим уравнение регулируемого объекта в виде

$$(T_1 p + 1) p \psi = -k_1 \delta, \quad (16.40)$$

где

$$T_1 = \frac{J}{c_1}, \quad k_1 = \frac{c_2}{c_1}.$$

Чувствительным элементом является трехступенный гироскоп, поворачивающий рычаг заслонки в системе питания пневматической рулевой

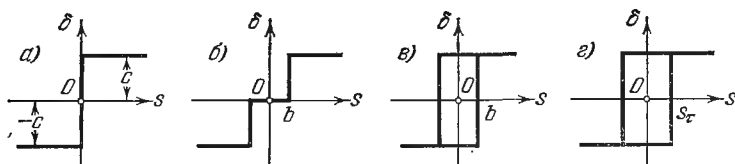


Рис. 16.18.

машинки на угол, пропорциональный углу отклонения торпеды. Следовательно, уравнение чувствительного элемента будет

$$s = k_2 \psi, \quad (16.41)$$

где s — величина перемещения заслонки из нейтрального положения.

Будем считать, что поршень рулевой машинки 3 (рис. 1.20) при открытии заслонки, быстро получая полную скорость, мгновенно¹⁾ перебрасывает руль из одного крайнего положения в другое.

В таком приближенном представлении линейная часть системы ограничивается уравнениями (16.40) и (16.41). Единое уравнение линейной части системы поэтому будет

$$(T_1 p + 1) p s = -k_1 k_2 \delta. \quad (16.42)$$

Рулевая машинка вместе с рулем (привод и регулирующий орган) представляет собой нелинейное звено, уравнение которого согласно вышесказанному можно представить либо в простейшем виде (рис. 16.18, а)

$$\delta = c \operatorname{sign} s, \quad (16.43)$$

либо, если имеется заметная зона нечувствительности (рис. 16.18, б), в виде

$$\left. \begin{aligned} \delta &= 0 && \text{при } -b < s < +b, \\ \delta &= c \operatorname{sign} s && \text{при } |s| > b, \end{aligned} \right\} \quad (16.44)$$

либо, если существенное значение имеет гистерезисная петля (рис. 16.18, в),

$$\left. \begin{aligned} \delta &= c \operatorname{sign} (s - b) && \text{при } ps > 0, \\ \delta &= c \operatorname{sign} (s + b) && \text{при } ps < 0, \end{aligned} \right\} \quad (16.45)$$

либо, наконец, в простейшем случае, но с запаздыванием (рис. 16.18, г)

$$\left. \begin{aligned} \delta &= c \operatorname{sign} (s - |s_\tau|) && \text{при } ps > 0, \\ \delta &= c \operatorname{sign} (s + |s_\tau|) && \text{при } ps < 0, \end{aligned} \right\} \quad (16.46)$$

¹⁾ Точнее, за такое малое время, в течение которого торпеда не успевает заметно повернуться, т. е. много меньшее возможного периода колебаний торпеды.

где

$$s_{\tau} = s(\tau), \quad (16.47)$$

причем τ — время запаздывания срабатывания реле.

При исследовании системы в целом можно принять один из этих четырех вариантов в зависимости от того, какой из них лучше будет соответствовать свойствам данной релейной системы.

§ 16.3. Уравнения систем с нелинейностью в виде сухого трения и зазора

Приведем примеры составления уравнений для нелинейных систем с сухим трением или зазором в механической передаче.

Следящая система с линейным и сухим трением. В § 5.7 составлены уравнения следящей системы в линейном виде. Рассмотрим теперь такой случай, когда к линейному моменту трения $M_{\text{лт}}$ добавляется еще момент сухого трения $M_{\text{ст}}$, имеющий постоянную величину, равную некоторому значению c , и меняющий свое направление (знак) с изменением знака скорости вращения объекта $p\beta$ (рис. 16.19). Следовательно, теперь уравнение управляемого объекта примет вид

$$Jp^2\beta = M_{\text{вр}} - M_{\text{лт}} - M_{\text{ст}}, \quad M_{\text{вр}} = c_1 i_{\text{н}}, \quad M_{\text{лт}} = c_2 p\beta, \quad (16.48)$$

где β — угол поворота вала управляемого объекта, причем

$$\left. \begin{aligned} M_{\text{ст}} &= c \operatorname{sign} p\beta && \text{при } p\beta \neq 0, \\ -c \leq M_{\text{ст}} \leq +c && \text{при } p\beta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.49)$$

Важная особенность сухого трения состоит в том, что это (в отличие от релейных характеристик) далеко не всегда означает мгновенное переключение величины $M_{\text{ст}}$ при $p\beta = 0$.

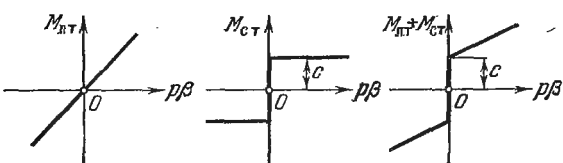


Рис. 16.19.

Здесь возможны два варианта:

- 1) $p\beta = 0$ и $|M_{\text{вр}}| > c$,
- 2) $p\beta = 0$ и $|M_{\text{вр}}| < c$.

(16.50)

В первом случае скорость объекта $p\beta$ пройдет через нулевое значение и его движение бу-

дет продолжаться без остановки дальше по закону (16.48). Во втором же случае произойдет остановка управляемого объекта, в течение которой будет иметь место не переключение, а медленное изменение величины $M_{\text{ст}}$ в интервале $-c \leq M_{\text{ст}} \leq +c$ (или наоборот), причем $M_{\text{ст}}$ будет принимать все время определенные значения

$$M_{\text{ст}} = M_{\text{вр}} \quad (p\beta = 0, |M_{\text{вр}}| < c). \quad (16.51)$$

В этом случае движение возобновится снова только тогда, когда вращающий момент достигнет значения $|M_{\text{вр}}| = c$ и превысит его.

Если же остается $|M_{\text{вр}}| < c$, то система будет неподвижна. Поэтому положение равновесия управляемого объекта оказывается неопределенным внутри некоторого отрезка, а именно при любом значении $|M_{\text{вр}}| < c$. Этим определяется зона застоя системы. Застой проявляется в том, что, с одной стороны, система не будет двигаться при изменении угла задатчика в определенном интервале и, с другой стороны, что система будет обладать ошибкой из-за сухого трения в положении равновесия. В процессе же движения системы в одну сторону с любой скоростью сухое трение внесет постоян-

ную ошибку одного знака, что соответствует как бы дополнительной внешней нагрузке $M_{нг} = c$.

Итак, уравнение управляемого объекта, как нелинейного звена системы, согласно (16.48) и (16.49) с учетом (16.50) будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} Jp^2\beta + c_2p\beta + c \operatorname{sign} p\beta &= c_1 i_{я} \quad \text{при} \quad p\beta \neq 0 \\ \text{или} \quad p\beta &= 0 \quad \text{и} \quad |i_{я}| > \frac{c}{c_1}, \\ \beta &= \text{const} \quad \text{при} \quad p\beta = 0 \quad \text{и} \quad |i_{я}| < \frac{c}{c_1}. \end{aligned} \right\} \quad (16.53)$$

Уравнения всех остальных звеньев данной следящей системы в совокупности образуют линейную часть системы, единое уравнение которой для свободного движения упрощенно запишем в виде

$$(T_{вp} + 1) i_{я} = -[(T_{вp} + 1) k_{6p} + k] \beta. \quad (16.53)$$

Следящая система с зазором. Предположим теперь, что в той же самой следящей системе нелинейность заключается не в сухом трении, а в наличии зазоров в силовой механической передаче между двигателем и управляемым объектом. Все эти зазоры объединим в один и изобразим его условно в виде

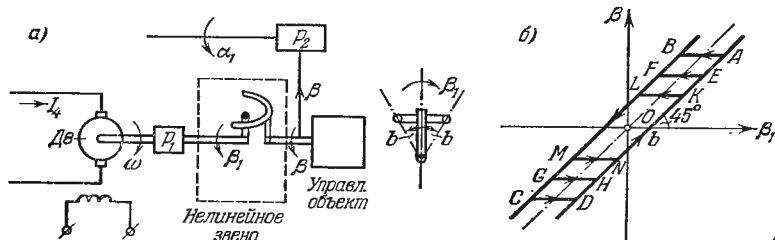


Рис. 16.20.

вилки со свободным ходом $\pm b$. Таким образом, между двигателем и управляемым объектом вклинивается теперь новое нелинейное звено, изображенное на рис. 16.20, а, входную величину которого обозначим β_1 .

Характеристика этого нелинейного звена изображена на рис. 16.20, б. Смысл ее следующий. Если бы не было зазора, то β равнялось бы β_1 и характеристикой была бы прямая под углом 45° , изображенная на рис. 16.20, б штрих-пунктиром. Вследствие зазора при движении в сторону возрастания угла β эта прямая сдвинется вправо на величину b (поводок прижмется к правой стороне вилки). При изменении направления движения сначала поводок будет перемещаться внутри зазора, не двигая вилку ($\beta = \text{const}$). На характеристике это соответствует горизонтальному отрезку длиной $2b$ (AB, или EF, или KL, или другие в зависимости от фактического значения β в это время). Затем начнет двигаться и вилка, то будет соответствовать прямой BC, сдвинутой влево от начала координат на величину b .

При равновесии системы поводок и вилка могут занимать любое относительное положение внутри зазора, что вызывает ошибку системы из-за зазора, равную $\pm b$. При движении системы в одну из сторон будет постоянное отставание объекта из-за зазора на величину $\pm b$, не считая того отставания, которое будет еще из-за нагрузки.

Уравнение управляемого объекта, включавшее в себя и двигатель, теперь разобьется на два нелинейных. Первое нелинейное уравнение управляемого объекта с двигателем будет (ограничиваемся учетом одной

постоянной времени)

$$\left. \begin{aligned} (T_0 p + 1) p \beta_1 &= k_1 i_n \quad \text{при} \quad p \beta \neq 0, \\ (T_1 p + 1) p \beta_1 &= k_1 i_n \quad \text{при} \quad p \beta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16.54)$$

(соответственно с поводком, прижатым к вилке, и с поводком, свободно движущимся внутри зазора); T_1 меньше T_0 на величину J_0/c_2 , где J_0 — момент инерции управляемого объекта. Кроме этого, надо написать второе уравнение нелинейного звена с зазором, соответствующее характеристике рис. 16.20, б:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \beta_1 - b \quad \text{при} \quad p \beta_1 > 0, \\ \beta &= \beta_1 + b \quad \text{при} \quad p \beta_1 < 0, \\ \beta &= \text{const} \quad \text{при} \quad |\beta_1 - \beta| < b. \end{aligned} \right\} \quad (16.55)$$

Следовательно, управляемый объект будет иметь остановки при своих колебаниях, соответствующие участкам AB , CD и т. д. характеристики рис. 16.20, б.

Линейная часть системы остается такой же, как в предыдущем примере, т. е. (16.53).

Система автоматического регулирования давления (учет сухого трения). Рассмотрим систему (рис. 14.7), уравнения которой в линейном виде были

получены в § 14.2. В чувствительном элементе 2 масса незначительно, но зато существенное значение может иметь сухое трение. Поэтому уравнение движения штока мембраны запишем в виде

$$P - F_m - F_T - F_n = 0, \quad (16.56)$$

где F_T — сила сухого трения, имеющая постоянную величину c , меняющая направление при изменении знака скорости py

(рис. 16.21, а) и могущая принимать любые значения во время остановки, т. е.

$$\left. \begin{aligned} F_T &= c \operatorname{sign} py \quad \text{при} \quad py \neq 0, \\ -c &\leq F_T \leq +c \quad \text{при} \quad py = 0; \end{aligned} \right\} \quad (16.57)$$

P — сила давления воздуха камеры на мембрану, F_m — упругая сила мембраны, F_n — сила пружины.

В результате после перехода к безразмерным относительным отклонениям (14.27) и (14.48) получим вместо (14.47) следующее уравнение чувствительного элемента как нелинейного звена:

$$\left. \begin{aligned} b \operatorname{sign} p\eta + \delta\eta &= -\varphi \quad \text{при} \quad p\eta \neq 0 \\ \text{или} \quad p\eta &= 0 \quad \text{и} \quad |\varphi + \delta\eta| = b, \\ \eta &= \text{const} \quad \text{при} \quad |\varphi + \delta\eta| < b, \end{aligned} \right\} \quad (16.58)$$

где $b = \frac{c}{q_m p_n}$, q_m — площадь мембраны, p_n — номинальное давление в камере.

Построим характеристику этого нелинейного звена с сухим трением в координатах $(-\varphi, \eta)$. Легко видеть, что первое из уравнений (16.58) соответствует прямым DA и BC при $p\eta > 0$ и $p\eta < 0$, а второе уравнение ($\eta = \text{const}$) — отрезкам AB , CD , EF , GH и т. п. на рис. 16.21, б. Из сравнения рис. 16.21, б и рис. 16.20, б видно, что сухое трение в таком нелинейном звене (без массы) эквивалентно зазору, половина которого равна b , чего

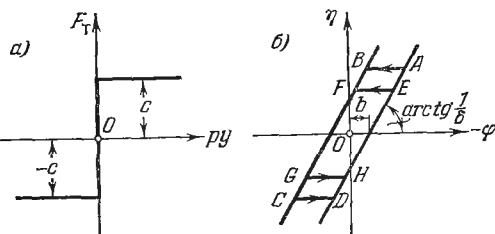


Рис. 16.21.

совершенно нельзя сказать о сухом трении в следящей системе, где учитывалась масса (момент инерции).

Все остальные звенья системы (рис. 14.7) образуют линейную часть, единое уравнение которой при $j = 0$ будет

$$(T_1 p + 1)(T_s p + 1) \varphi = k_1 \eta. \quad (16.59)$$

§ 16.4. Уравнения систем с нелинейностями других видов

Рассмотрим несколько примеров составления уравнений автоматических систем с нелинейностями других видов, чем в §§ 16.2 и 16.3.

Система автоматического регулирования с нелинейной характеристикой привода регулирующего органа. Привод регулирующего органа, каким бы он ни был (электрический, гидравлический, пневматический), всегда имеет, во-первых, некоторую зону нечувствительности в начале координат (рис. 16.22, а), и, во-вторых, зону «насыщения» по краям. Кроме того, может

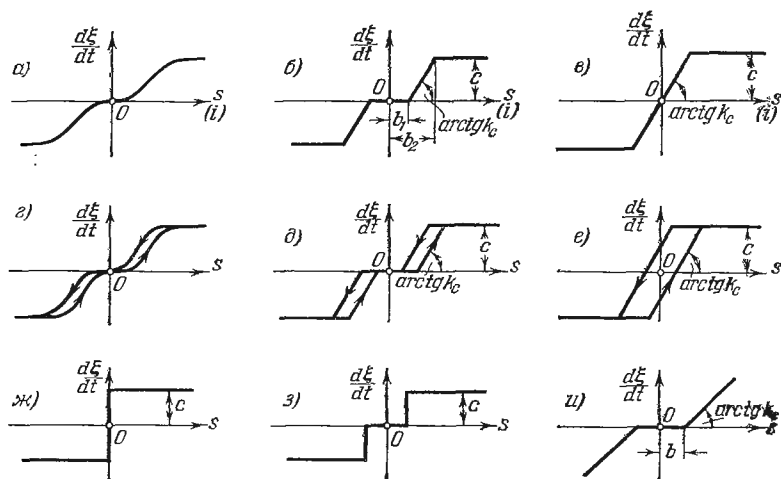


Рис. 16.22.

иметь место еще и гистерезис (рис. 16.22, д). Эти две криволинейные характеристики могут быть приблизительно заменены кусочно-линейными (рис. 16.22, б, д или е, е, и). Наконец, существуют приводы с постоянной скоростью (рис. 16.22, ж, з), относящиеся к нелинейным звеньям релейного типа, уже рассмотренным ранее.

Зона нечувствительности b_1 выражается в том, что электрический двигатель имеет определенный минимальный ток трогания ($i = b_1$), до достижения которого вал двигателя будет неподвижен ($p\xi = 0$). В гидравлическом же двигателе золотник имеет так называемую зону перекрытия (его поршеньки немного шире отверстия, им закрываемого), вследствие чего он откроет путь рабочей жидкости в цилиндр двигателя, только переместившись на некоторую величину $s = b_1$. Аналогично и в случае пневматического привода, где роль золотника играет заслонка.

Зона насыщения обнаруживается в том, что при увеличении тока сверх некоторого значения $i = b_2$ скорость перемещения регулирующего органа остается постоянной ($p\xi = c$); также и для гидравлического двигателя при $s \geq b_2$, когда окна золотника полностью открыты.

Термины «насыщение» и «гистерезис» применяются здесь в обобщенном смысле для обозначения нелинейностей определенного типа; они не обязательно соответствуют физическим явлениям насыщения и гистерезиса.

Уравнение привода регулирующего органа с учетом указанных обстоятельств вместо прежнего линейного будет иметь нелинейный вид:

$$p\xi = F(s), \quad (16.60)$$

где $F(s)$ есть нелинейная функция задаваемая графиком (рис. 16.22, а или з). Для электрических приводов можно записать

$$p\xi = F(i). \quad (16.61)$$

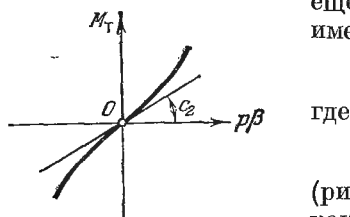
В приближенном кусочно-линейном виде (рис. 16.22, б) уравнение (16.60) записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} p\xi &= 0 && \text{при } -b_1 \leq s \leq +b_1, \\ p\xi &= k_c(s - b_1) && \text{при } +b_1 \leq s \leq +b_2, \\ p\xi &= k_c(s + b_1) && \text{при } -b_1 \geq s \geq -b_2, \\ p\xi &= c \operatorname{sign} s && \text{при } |s| \geq b_2. \end{aligned} \right\} \quad (16.62)$$

В случае наличия гистерезиса (рис. 16.22, д) придется написать два ряда таких же выражений с разными значениями b_1 и b_2 — один для движения вправо ($ps > 0$) и другой для движения влево ($ps < 0$). Этим определяется уравнение привода регулирующего органа как нелинейного звена. Уравнение линейной части составляется обычным способом в зависимости от того, в какой конкретно автоматической системе этот привод применен.

Следящая система с линейным и квадратичным трением. В § 16.3 была рассмотрена следящая система с линейным и сухим трением. Пусть теперь управляемый объект в той же следящей системе обладает кроме линейного еще квадратичным трением, т. е. уравнение объекта имеет вид

$$Jp^2\beta = M_{вр} - M_T,$$



где

$$M_{вр} = c_1 i_n, \quad M_T = c_2 p\beta + c_3 (p\beta)^2 \operatorname{sign} p\beta$$

(рис. 16.23). Тогда уравнение управляемого объекта как нелинейного звена будет

Рис. 16.23.

$$(Jp + c_2) p\beta + c_3 (p\beta)^2 \operatorname{sign} p\beta = c_1 i_n. \quad (16.63)$$

Уравнение линейной части системы в полном виде по-прежнему будет (16.53).

Система автоматического регулирования с переменным коэффициентом усиления. В ряде случаев для повышения качества процесса регулирования бывает желательно, чтобы воздействие на регулируемый орган было не пропорциональным отклонению регулируемой величины, а усиливалось или ослаблялось при увеличении этого отклонения (нелинейный закон регулирования). Примерами такого воздействия с переменным коэффициентом усиления могут служить характеристики с ограниченной линейностью или с насыщением (рис. 16.22, а).

Однако они дают уменьшение коэффициента усиления при увеличении отклонения. Рассмотрим теперь два примера характеристик с переменным коэффициентом усиления, который увеличивается при увеличении отклонения.

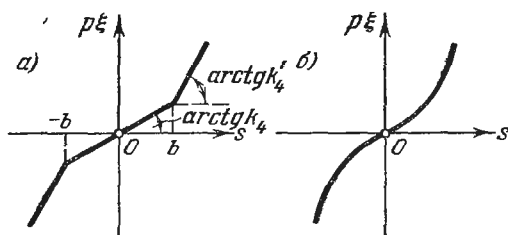


Рис. 16.24.

Уравнение нелинейной части привода регулирующего органа будет в случае характеристики рис. 16.24, а

$$\left. \begin{aligned} p\xi &= k_4 s \quad \text{при } |s| < b, \\ p\xi &= k_4 b + k'_4 (s - b) \quad \text{при } s > b, \\ p\xi &= -k_4 b + k'_4 (s + b) \quad \text{при } s < -b, \end{aligned} \right\} \quad (16.64)$$

а в случае характеристики рис. 16.24, б

$$p\xi = F(s). \quad (16.65)$$

Все рассмотренные примеры иллюстрируют случай, когда общая схема системы имеет вид рис. 16.1, т. е. случай нелинейной системы первого класса (кроме случая сухого трения в следящей системе при наличии остановок). Комбинации нелинейностей приводят к нелинейным системам второго и третьего классов (см. главу 18).

Система автоматического регулирования с логическим устройством. Пусть динамика регулируемого объекта (рис. 16.25) описывается уравнением

$$(T_0 p + 1) p x = k_0 z. \quad (16.66)$$

Уравнения измерителей

$$(T_1 p + 1) u = k_1 x, \quad (T_2 p + 1) v = k_2 p x. \quad (16.67)$$

Уравнение усилителя-преобразователя с логическим устройством

$$(T_3 p + 1) y = k_3 \Phi(u, v). \quad (16.68)$$

Уравнение исполнительного устройства

$$(T_4 p + 1) z = -k_4 y. \quad (16.69)$$

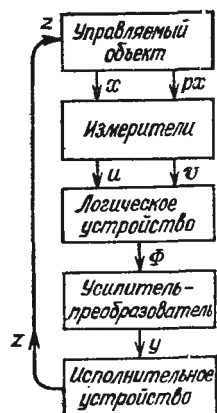


Рис. 16.25.

Кроме того, должна быть задана логика формирования нелинейного закона регулирования $\Phi(u, v)$, которая может быть назначена или синтезирована в очень разнообразных формах для обеспечения простоты и надежности аппаратуры, наибольшего быстродействия, наименьшей затраты энергии на управление, учета ограничения мощности источника энергии и специфики желательных режимов его работы и т. п.

Выбранную тем или иным образом логику формирования нелинейного закона управления можно записывать в аналитической форме. Однако во многих случаях удобнее изображать ее графически на плоскости входных величин логического устройства (u, v) .

Для примера рассмотрим простейшую логику (рис. 16.26): Смысл ее заключается в следующем. Величины u и v , согласно уравнениям (16.67), с точностью до постоянных времени соответствуют отклонению регулируемой величины x и ее первой производной по времени px . Поэтому наличие

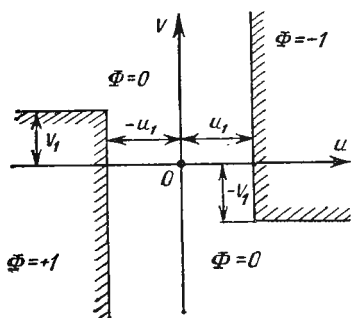


Рис. 16.26.

порогового значения u_1 соответствует тому, что при малых x исполнительное устройство не работает ($\Phi = 0$). Не работает оно также и при больших отклонениях x , но только тогда, когда имеется достаточная по величине скорость px (соответствующая превышению порога $\pm v_1$) со знаком, противо-

положным знаку x , ибо в этом случае отклонение x уменьшается по величине само собой даже при пеработающем исполнительном устройстве системы управления. Исполнительное устройство включается ($\Phi = +1$ или $\Phi = -1$,

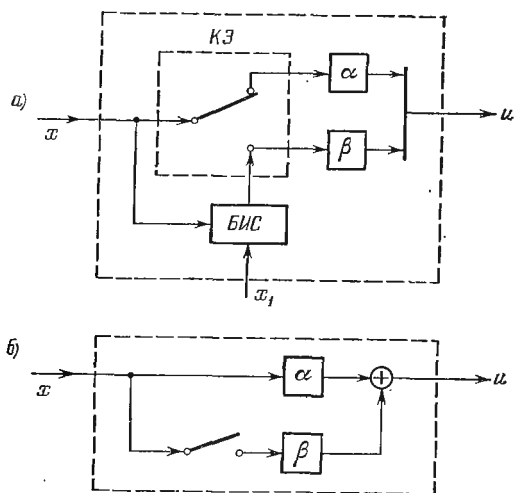


Рис. 16.27.

рис. 16.26) только тогда, когда при достаточно больших отклонениях x ($|u| > u_1$) скорость px имеет тот же знак (т. е. отклонение возрастает по величине) либо когда скорость px имеет противоположный знак, но мала ($|v| < v_1$).

Система с переменной структурой. Как уже указывалось в начале книги (§ 2.3), системы с переменной структурой содержат в себе специальное переключающее устройство для изменения структуры регулятора, которое срабатывает в зависимости от размеров и знаков входных величин.

Примеры переключающих устройств приведены схематически на рис. 16.27, где $КЭ$ — ключевой элемент, $БИС$ — блок изменения структуры. Уравнение принято [42] записывать в виде,

$$u = \Psi x. \quad (16.70)$$

Функция Ψ может строиться по-разному. Например (рис. 16.27, а),

$$\Psi = \begin{cases} \alpha & \text{при } x_1 x > 0, \\ \beta & \text{при } x_1 x < 0. \end{cases} \quad (16.71)$$

Для случая, указанного на рис. 2.9 и 2.10, будем иметь (рис. 16.27, б)

$$\Psi = \begin{cases} \alpha & \text{при } x < x_A, \\ \beta & \text{при } x > x_A. \end{cases} \quad (16.72)$$

Под символами α и β могут также иметься в виду различные выражения: в простейшем случае постоянные

$$\alpha = k_1, \quad \beta = k_2, \quad (16.73)$$

в другом случае

$$\alpha = k_1, \quad \beta = k_2 p, \quad (16.74)$$

и любые другие, в том числе и нелинейные.

Основная же характерная нелинейность здесь состоит в самом факте автоматического переключения в зависимости от состояния входных величин.

ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И АВТОКОЛЕБАНИЙ

§ 17.1. Фазовые траектории и метод точечных преобразований

Понятие о фазовом пространстве, о фазовых траекториях и их типах было уже дано выше. В данном параграфе на примерах построения фазовых траекторий для простейших систем второго порядка будут проиллюстрированы некоторые важные особенности процессов в нелинейных системах автоматического регулирования.

Пример 1. Возьмем систему автоматического регулирования с объектом без самовыравнивания и с приводом регулирующего органа, имеющим постоянную скорость. Уравнение регулируемого объекта без самовыравнивания будет

$$T_a p \varphi = \xi. \quad (17.1)$$

Для регулятора без массы и демпфера с жесткой обратной связью, т. е. при $\delta\eta = -\varphi$, $\sigma = \eta - \xi$, $\xi = \xi$, получим

$$\sigma = -\frac{1}{\delta} \varphi - \xi, \quad (17.2)$$

где φ , η , ξ , ζ и σ — относительные изменения регулируемой величины, смещений чувствительного элемента, регулирующего органа, элемента обратной связи и управляющего золотника (рис. 10.11, а), δ — коэффициент. Привод регулирующего органа пусть имеет постоянную скорость в двух вариантах: 1) с мгновенным переключением (рис. 16.22, ж) при переходе управляющего элемента (золотника, струйной трубки) через нейтральное положение ($\sigma = 0$); 2) с зоной нечувствительности (рис. 16.22, з) вследствие наличия «перекрытия» золотника или струйной трубки. В первом случае уравнение привода регулирующего органа будет

$$p\xi = c \operatorname{sign} \sigma, \quad (17.3)$$

а во втором

$$\begin{aligned} p\xi &= 0 && \text{при } |\sigma| < b, \\ p\xi &= c \operatorname{sign} \sigma && \text{при } |\sigma| > b. \end{aligned} \quad (17.4)$$

Возьмем фазовую плоскость (x, y) , приняв

$$x = \varphi, \quad y = p\varphi. \quad (17.5)$$

Из уравнений (17.1), (17.2) и (17.5) имеем

$$\xi = T_a y, \quad \sigma = -\frac{1}{\delta} x - T_a y. \quad (17.6)$$

Следовательно, переключения привода в первом варианте ($\sigma = 0$) будут

иметь место при

$$x = -\delta T_a y, \quad (17.7)$$

что соответствует прямой AB (рис. 17.1, a) на фазовой плоскости, причем согласно (17.16) значениям $\sigma > 0$ соответствует часть плоскости слева от прямой AB , а $\sigma < 0$ — справа.

На основании первого из соотношений (17.6) с учетом (17.3) при $\sigma < 0$ получаем

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{c}{T_a}, \quad (17.8)$$

а из (17.5)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (17.9)$$

откуда находим уравнения фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{T_a y} \quad (17.10)$$

или, после интегрирования,

$$x = -\frac{T_a}{2c} y^2 + C_1.$$

Это есть семейство парабол, показанное на рис. 17.1, a справа от линии AB (они симметричны относительно оси x). Так как (17.8) и (17.9) являются проекциями скорости v изображающей точки M на оси x и y , то имеем $v_y < 0$,

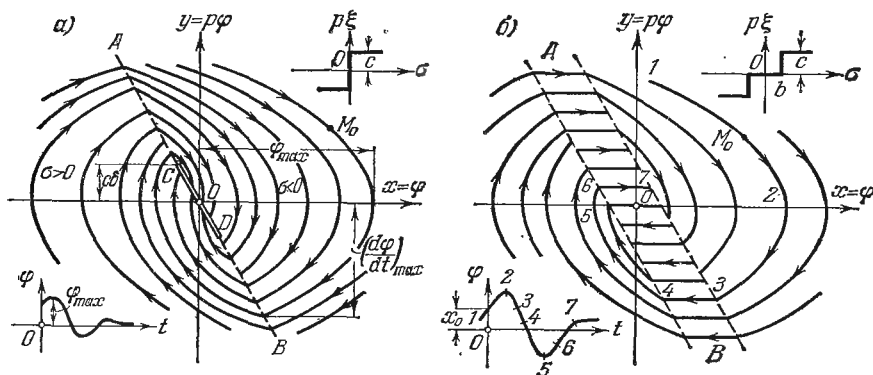


Рис. 17.1.

а знак v_x совпадает со знаком y . В соответствии с этим на рис. 17.1, a укажем стрелочками направление движения изображающей точки M по фазовым траекториям. Аналогичным путем легко строятся параболы слева от прямой AB .

В результате, как видно из общего расположения фазовых траекторий (рис. 17.1, a), получается устойчивая система с затухающим колебательным переходным процессом. Но число колебаний будет конечным. В самом деле, здесь имеется особый отрезок CD , в который вливаются все фазовые траектории. Чтобы выявить поведение системы на этом отрезке, вспомним, что для него согласно (17.7) и (17.5)

$$\delta T_a \varphi + \varphi = 0, \quad \text{или} \quad \varphi = C_2 e^{-\frac{t}{\delta T_a}}.$$

Следовательно, попав на отрезок CD , изображающая точка не может с него уйти, и система будет аperiодически приближаться к установивше-

мусья состоянию, т. е. изображающая точка будет сползать по отрезку CD к началу координат O . Таким образом, имевший место вначале колебательный переходный процесс после конечного числа колебаний вырождается в этот так называемый *скользящий процесс*.

Крайние точки особого отрезка CD определяются, очевидно, как точки, в которых прямая AB касается одной из парабол соответственно правого и левого семейств. Поэтому, подставив значения $\frac{dy}{dx}$ из (17.7) в выражение (17.10), найдем точку C :

$$y_c = c\delta.$$

По найденной картине расположения фазовых траекторий можно качественно представить себе кривую переходного процесса $\varphi(t)$ при любых начальных условиях. Начальными условиями определяется начальное положение изображающей точки M и тем самым — определенная фазовая траектория, иллюстрирующая протекание процесса. Она показывает (рис. 17.1, а) максимальное отклонение регулируемой величины $\varphi_{\max}$, максимальную скорость $(\dot{\varphi})_{\max}$, а также все последующие отклонения, число колебаний и т. п.

Рассмотрим теперь ту же систему, но с учетом зоны нечувствительности. В этом случае переключениям привода (при $\sigma = -b$ и $\sigma = +b$) на фазовой плоскости соответствуют согласно (17.6) две наклонные прямые (рис. 17.1, б):

$$x = -\delta T_a y + b\delta \text{ и } x = -\delta T_a y - b\delta.$$

Между этими прямыми $|\sigma| < b$, правее их $\sigma < -b$, левее их $\sigma > b$ (причем $b > 0$).

При $|\sigma| < b$ из (17.4), (17.6) и (17.5) получаем

$$\frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = y,$$

откуда (при $y \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{или } y = C_3$$

(прямые, параллельные оси x в полосе AB на рис. 17.1, б).

При $|\sigma| > b$ получим прежние параболы. В результате снова система оказывается устойчивой и имеет колебательный переходный процесс, но вместо особой точки O получаем особый отрезок ($y = 0$, $-b\delta < x < b\delta$), т. е. установившееся состояние определяется неоднозначно. Это соответствует тому, что регулятор может находиться в равновесии в любом месте внутри зоны нечувствительности. Здесь точно так же возможен скользящий процесс, как и в случае рис. 17.1, а.

В данном примере система оказывается устойчивой при любых значениях параметров и при любых начальных условиях. Однако здесь для получения системы второго порядка была проведена грубая идеализация уравнений регулятора (пренебрежение массой и демпфированием).

Пример 2. Допустим, что требуется стабилизировать угловое положение некоторого тела, когда сопротивлением среды его вращению можно пренебречь. Уравнение объекта будет

$$J \frac{d\omega}{dt} = M, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (17.11)$$

где J — момент инерции тела, φ — угол поворота тела, ω — его угловая скорость, M — управляющий момент со стороны исполнительного органа системы стабилизации.

Уравнение регулятора (системы стабилизации) запишем в виде

$$M = M_1 \Phi(\varphi, \omega), \quad (17.12)$$

где M_1 — постоянная положительная величина, $\Phi(\varphi, \omega)$ — нелинейный закон регулирования, осуществляемый при помощи логического устройства по тому же простейшему принципу, что и на рис. 16.26, с той лишь разницей, что по углу φ фазовая плоскость ограничена значениями $+\pi$ и $-\pi$, так как это составляет один полный оборот тела (рис. 17.2).

Изобразим процесс регулирования на фазовой плоскости. Уравнение всей системы согласно (17.11) и (17.12) будет

$$\frac{d\omega}{dt} = c\Phi(\varphi, \omega), \quad (17.13)$$

где обозначено

$$c = \frac{M_1}{J},$$

Рис. 17.2.

причем c имеет физический смысл величины углового ускорения, сообщаемого данному телу постоянным моментом M_1 .

Умножив почленно уравнение (17.13) на выражение

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

получим дифференциальное уравнение фазовой траектории

$$\omega d\omega = c\Phi(\varphi, \omega) d\varphi. \quad (17.14)$$

Это уравнение легко интегрируется внутри участков, на которых $\Phi = \text{const}$. В результате для каждого отдельно взятого участка уравнение фазовой траектории будет

$$\frac{\omega^2 - \omega_n^2}{2} = c\Phi(\varphi - \varphi_n), \quad (17.15)$$

где φ_n и ω_n — значения φ и ω в начальной точке данного участка.

Зададим начальные условия процесса:

$$\varphi = 0, \quad \omega = \omega_0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Для данной начальной точки процесса (см. рис. 17.2) имеем $\Phi = 0$. Поэтому на первом участке процесса согласно (17.15) уравнение фазовой траектории будет

$$\omega = \text{const} = \omega_0.$$

Этот участок движения с постоянной скоростью заканчивается в точке 1 (рис. 17.2), где происходит включение исполнительного органа ($\Phi = -1$). Следовательно, для второго участка процесса (после точки 1) из (17.15) получим уравнение фазовой траектории

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2c(\varphi - b), \quad (17.16)$$

так как в начальной точке 1 этого участка $\varphi_n = b$, $\omega_n = \omega_0$. Фазовая траектория (17.16) — парабола, ось которой совпадает с координатной осью φ .

Это соответствует равнозамедленному движению ($\frac{d\omega}{dt} = -c$). Изображая параболу графически, доводим ее до границы $\varphi = \pi$ (участок 1—2 на рис. 17.2), причем в точке 2 согласно (17.16)

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2c(\pi - b)}. \quad (17.17)$$

Это значение переносим в точку 2' (для вращающегося тела $\varphi = \pm\pi$ — это одна и та же точка). Здесь происходит выключение исполнительного органа ($\Phi = 0$). Поэтому дальнейшее движение согласно (17.15) пойдет с постоянной скоростью

$$\omega = \text{const} = \omega_0$$

до точки 3 (рис. 17.2). Таким образом, в рассмотренной начальной части процесса регулирования тело совершило один полный оборот, но в конце этого оборота скорость вращения его стала меньше начальной.

В точке 3 снова включается исполнительный орган ($\Phi = -1$), в результате чего фазовая траектория будет

$$\omega^2 = \omega_2^2 - 2c(\varphi - b), \quad (17.18)$$

так как в точке 3 $\varphi_n = b$, $\omega_n = \omega_2$. Допустим, что соответствующая уравнению (17.18) парабола 3—4 не доходит до границы $\varphi = \pi$. Это означает, что тело больше не совершит полного оборота, а начнет (с точки А) возвращаться в сторону нулевого положения.

В точке 4 (рис. 17.2) имеем скорость $\omega_4 = -b_1$. Следовательно, из (17.18) угловая координата ее будет

$$\varphi_4 = b + \frac{\omega_2^2 - b_1^2}{2c},$$

где ω_2 определяется по формуле (17.17). Дальше (4—5) процесс пойдет с постоянной скоростью (так как $\Phi = 0$), после чего тело войдет в установившийся автоколебательный режим, определяемый предельным циклом (5—6—7—8). Уравнение параболы 7—8 согласно (17.15) будет

$$\frac{\omega^2 - b_1^2}{2} = -c(\varphi - b).$$

Отсюда амплитуда угловых автоколебаний a_φ , как значение φ при $\omega = 0$, будет

$$a_\varphi = b + \frac{b_1^2}{2c}, \quad (17.19)$$

а амплитуда колебаний скорости

$$a_\omega = b_1.$$

Она равна зоне нечувствительности измерителя угловой скорости b_1 , в то время как амплитуда угловых колебаний (17.19) несколько больше зоны нечувствительности измерителя угла b .

Период автоколебаний t_a можно вычислить как сумму времен:

$$t_a = t_{\text{хол}} + t_{\text{раб}},$$

где $t_{\text{хол}}$ и $t_{\text{раб}}$ — времена участков (6—7) + (8—5) и (5—6) + (7—8) соответственно. По законам равномерного и равнозамедленного движений соответственно получаем

$$t_a = 4 \left(\frac{b}{b_1} + \frac{b_1}{c} \right).$$

Итак, установившийся режим стабилизации в данной системе является автоколебательным. Однако уравнение системы (17.13) справедливо только для идеальной системы стабилизации. Всякое реально имеющееся запаздывание в работе усилительно-преобразовательного и исполнительного устройств приведет к увеличению амплитуд автоколебаний по сравнению с полученными здесь значениями. Решение задачи с учетом постоянных времени системы управления будет дано в следующей главе.

Пример 3. Уравнения системы автоматического регулирования курса водяной торпеды в упрощенном варианте имеют вид: линейная часть (16.40) и (16.44), т. е.

$$T_1 p^2 \psi + p \psi = -k_1 \delta, \quad s = k_2 \psi, \quad (17.20)$$

и нелинейное звено (возьмем сначала один случай — рис. 16.18, *в*)

$$\left. \begin{aligned} \delta &= c \operatorname{sign}(s - b) \quad \text{при} \quad ps > 0, \\ \delta &= c \operatorname{sign}(s + b) \quad \text{при} \quad ps < 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.21)$$

Покажем, что здесь равновесное установившееся состояние системы с постоянным значением $\psi = 0$ неустойчиво, но будет иметь место устойчивый автоколебательный процесс.

Возьмем фазовую плоскость (x, y) с координатами $x = \psi$, $y = p\psi$ (угол отклонения и угловая скорость отклонения оси торпеды от заданного курса). Уравнения (17.20) и (17.21) переписутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{y}{T_1} - \frac{k_1}{T_1} \delta, \\ \delta &= c \operatorname{sign}\left(x - \frac{b}{k_2}\right) \quad \text{при} \quad y > 0, \\ \delta &= c \operatorname{sign}\left(x + \frac{b}{k_2}\right) \quad \text{при} \quad y < 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.22)$$

Из сравнения этих уравнений с упрощенными уравнениями системы регулирования температуры в конце § 16.1 видна их полная аналогия. Поэтому здесь, так же как и в случае рис. 16.15, установившийся процесс движения торпеды будет автоколебательным, причем картина фазовых траекторий будет иметь вид, показанный на рис. 17.3, *а*.

При этом кривая AB предельного цикла, соответствующая автоколебательному процессу, определяется из уравнения (16.31) с таким значением произвольной постоянной C_1 , чтобы выполнялось условие

$$y_A = -y_B, \quad \text{т. е.} \quad (y)_{x=\frac{b}{k_2}} = -(y)_{x=-\frac{b}{k_2}}, \quad (17.23)$$

так как только в этом случае и получится замкнутая кривая предельного цикла ABD (рис. 17.3, *а*). Определив таким образом C_1 , найдем амплитуду автоколебаний a как значение x при $y = 0$, т. е. согласно (16.31)

$$a = k_1 c T_1 \ln k_1 c + C_1.$$

Значения же (17.23) дают амплитуду q колебаний скорости y . Можно все это определять и графически прямо по чертежу (рис. 17.3, *а*). Период автоколебаний остается неизвестным.

Введем теперь в характеристику нелинейного звена (рулевой машинки) зону нечувствительности, как показано на рис. 17.3, *б*, *в*. Так, на том участке характеристики $\delta = f(s)$ (рис. 17.3, *б*), где $\delta = 0$, из (17.22) следует, что

$$y = -\frac{x}{T_1} + C_2,$$

что соответствует наклонным прямым внутри полосы EFF_1E_1 на фазовой

плоскости (рис. 17.3, б). Аналогичная полоса HGG_1H_1 будет и в нижней части плоскости. Все остальное заполняется такими же кривыми, как на рис. 17.3, а. В результате с увеличением зоны нечувствительности размеры предельного цикла, а значит, и амплитуда автоколебаний уменьшаются. При $b_1 = 0$ предельный цикл вырождается в точку O .

При дальнейшем увеличении зоны нечувствительности характеристика нелинейного звена и картина фазовых траекторий принимают вид, показанный на рис. 17.3, в. Здесь автоколебания отсутствуют и становится устойчивым установившийся процесс с постоянным значением ψ . Ранее неустойчивый

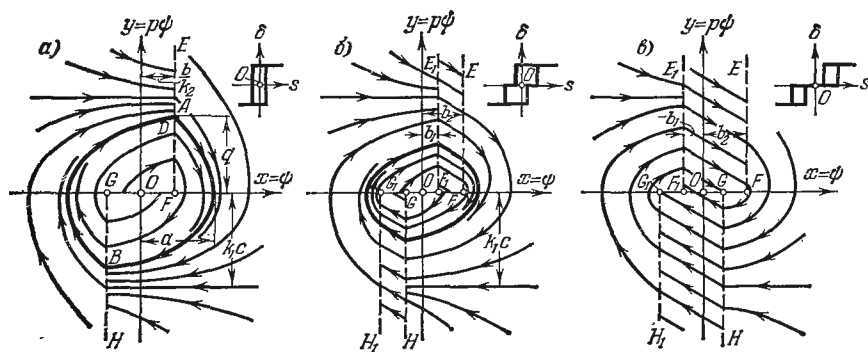


Рис. 17.3.

особый отрезок F_1G теперь стал устойчивым. Дальнейшее увеличение зоны нечувствительности приводит к расширению отрезка F_1G , т. е. к увеличению установившейся ошибки системы из-за слишком широкого участка равновесия.

Пример 4. Рассмотрим вибрационный регулятор напряжения, уравнения которого были составлены в § 16.2, а именно:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) \Delta U &= -k_1 \Delta r, \\ (T_2 p + 1) \Delta I_2 &= k_2 \Delta U, \end{aligned} \right\} \quad (17.24)$$

причем уравнение нелинейного звена (регулирующего органа)

$$\left. \begin{aligned} \Delta r &= r_1 \operatorname{sign} (\Delta I_2 - i_1) \quad \text{при} \quad \frac{dI_2}{dt} > 0, \\ \Delta r &= r_1 \operatorname{sign} (\Delta I_2 + i_2) \quad \text{при} \quad \frac{dI_2}{dt} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.25)$$

В качестве ординаты фазовой плоскости здесь удобнее взять не скорость отклонения регулируемой величины $\frac{dU}{dt}$, как делалось раньше, а вторую переменную ΔI_2 . Итак, примем для этой задачи

$$x = \Delta U, \quad y = \Delta I_2. \quad (17.26)$$

Тогда уравнения (17.24) преобразуются к виду

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{T_1} (x + k_1 \Delta r), \quad (17.27)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T_2} (y - k_2 x), \quad (17.28)$$

где согласно (17.25), (17.26) и (17.28) имеем

$$\left. \begin{aligned} \Delta r &= r_1 \operatorname{sign} (y - i_1) \quad \text{при} \quad y < k_2 x, \\ \Delta r &= r_1 \operatorname{sign} (y + i_1) \quad \text{при} \quad y > k_2 x; \end{aligned} \right\} \quad (17.29)$$

следовательно, первое из этих условий имеет место ниже прямой BB_1 (рис. 17.4), а второе — выше нее. В первом случае переключение реле происходит при $y = -i_1$, т. е. на прямой CD (рис. 17.4), а во втором случае — при

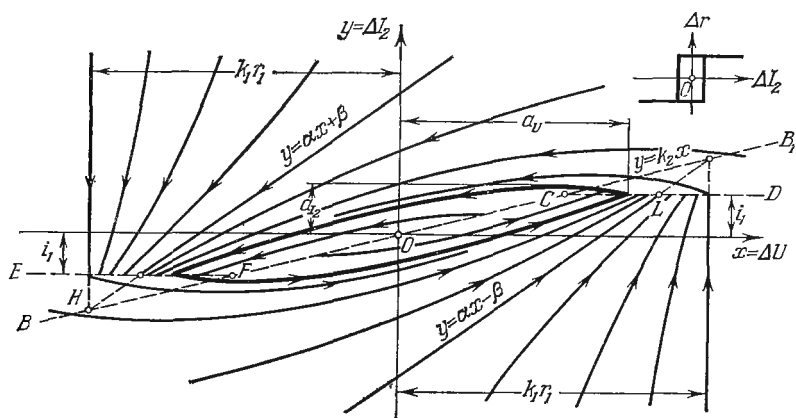


Рис. 17.4.

$y = -i_1$, т. е. на прямой EF . Чертеж сделан в предположении, что $k_1 k_2 r_1 > i_1$. В результате получаем, что выше линии $EFCD$ будет

$$\Delta r = r_1, \quad (17.30)$$

а ниже линии $EFCD$

$$\Delta r = -r_1. \quad (17.31)$$

Рассмотрим сначала верхнюю область. Для нее, деля (17.28) на (17.27), с учетом (17.30) получим уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T_1}{T_2} \frac{y - k_2 x}{x + k_1 r_1}, \quad (17.32)$$

которое можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T_1}{T_2} \frac{y + k_1 k_2 r_1 - k_2 (x + k_1 r_1)}{x + k_1 r_1}$$

и проинтегрировать, применив вспомогательную подстановку

$$y + k_1 k_2 r_1 = z (x + k_1 r_1),$$

где z — новая переменная вместо y . В результате найдем следующее уравнение фазовых траекторий (при $T_1 > T_2$):

$$y = \alpha x + \beta + C_1 (x + k_1 r_1)^\gamma \quad (\gamma > 1), \quad (17.33)$$

где C_1 — произвольная постоянная,

$$\alpha = \frac{k_2 T_1}{T_1 - T_2}, \quad \beta = \frac{k_1 k_2 r_1 T_2}{T_1 - T_2}, \quad \gamma = \frac{T_1}{T_2} > 1 \quad (17.34)$$

(при $\gamma = 1$ решение будет иметь другой вид, а при $\gamma < 1$ будет $\alpha < 0$ и $\beta < 0$; эти решения не будут исследоваться).

Чтобы представить себе всю совокупность фазовых траекторий, можно провести на фазовой плоскости прямую

$$y_1 = \alpha x + \beta \quad (17.35)$$

и ко всем ординатам этой прямой добавлять

$$y_2 = C_1 (x + k_1 r_1)^\gamma, \quad (17.36)$$

придавая C_1 произвольные значения (каждому значению C_1 будет соответствовать определенная фазовая траектория). Это будут параболы степени γ с осью

$$x = -k_1 r_1 \quad (17.37)$$

и с единым началом в точке H (рис. 17.4), имеющей координаты

$$x = -k_1 r_1, \quad y = -k_1 k_2 r_1.$$

На рис. 17.4 показаны все ветви этих парабол, лежащие выше линии $EFCD$ (так как только там справедливы данные выкладки). Направления стрелок на полученных фазовых траекториях определяются тем, что проекция скорости изображающей точки $v_x = \frac{dx}{dt}$ справа от прямой (17.37) согласно (17.27) будет отрицательна, а слева — положительна; проекция же $v_y = \frac{dy}{dt}$ согласно (17.28) выше прямой $y = k_2 x$ будет отрицательна, а ниже — положительна (во всех точках прямой $y = k_2 x$ касательные к фазовым траекториям горизонтальны).

Аналогично строятся и все фазовые траектории ниже линии $EFCD$, так как их дифференциальное уравнение отличается от (17.32) только заменой $+r_1$ на $-r_1$ согласно (17.34).

В результате на рис. 17.4 видим, что все фазовые траектории, исходящие из особого отрезка FOC , расходятся, а все траектории, идущие от краев чертежа, сходятся. Как те, так и другие асимптотически приближаются к установившемуся предельному циклу, обозначенному на чертеже жирной замкнутой кривой (чичевидеобразной). Это соответствует тому, что установившийся процесс в системе является автоколебательным, причем размеры предельного цикла a_U и a_{I_2} представляют собой амплитуды автоколебаний соответственно регулируемого напряжения ΔU и тока в обмотке электромагнита реле ΔI_2 .

Определить фазовую траекторию, образующую этот предельный цикл, можно как такую кривую (17.33), у которой

$$(x)_{y=i_1} = -(x)_{y=-i_1}, \quad (17.38)$$

чем определяется значение произвольной постоянной C_1 . Значение x (17.38) для этой кривой и дает искомую амплитуду a_U . Амплитуда же a_{I_2} определяется как ордината пересечения кривой предельного цикла с прямой $y = k_2 x$ (ибо, как было показано ранее, в точках этой прямой касательные к фазовым траекториям горизонтальны).

Из чертежа (рис. 17.4) видно, что предельный цикл лежит левее точки L и охватывает точку C . Поэтому $x_C < a_U < x_L$, т. е. амплитуда автоколебаний регулируемого напряжения заключена в интервале

$$\frac{i_1}{k_2} < a_U < \frac{i_1 + \beta}{\alpha},$$

где α и β определяются формулами (17.34). Амплитуда же a_{I_2} будет немного больше i_1 .

Пример 5. Рассмотрим следящую систему с сухим трением в управляемом объекте, для которой уравнения были написаны в § 16.3. Уравнение регулируемого объекта (16.52) как нелинейного звена при отсутствии линейного трения ($c_2 = 0$) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} J p^2 \beta + c \operatorname{sign} p \beta = c_1 i_n \quad \text{при} \quad p \beta \neq 0 \quad \text{или} \quad p \beta = 0 \quad \text{и} \quad |i_n| > \frac{c}{c_1}, \\ \beta = \text{const} \quad \text{при} \quad p \beta = 0 \quad \text{и} \quad |i_n| < \frac{c}{c_1}. \end{aligned} \right\} \quad (17.39)$$

При написании уравнения линейной части системы (16.53) пренебрежем постоянными времени (чтобы иметь возможность рассматривать уравнение всей системы как уравнение второго порядка), а именно:

$$i_n = -(k_6 p + k) \beta.$$

Подставив это в уравнения объекта (17.39) и обозначив

$$a_1 = \frac{c_1}{J} k_6, \quad a_2 = \frac{c_1 k}{J}, \quad b_1 = \frac{c}{J}, \quad (17.40)$$

получим уравнение всей следящей системы в целом:

$$(p^2 + a_1 p + a_2) \beta =$$

$$= -b_1 \operatorname{sign} p\beta \quad \text{при} \quad p\beta \neq 0 \quad \text{или при} \quad p\beta = 0 \quad \text{и} \quad |\beta| > \frac{c}{c_1 k}, \quad (17.41)$$

$$\beta = \operatorname{const} \quad \text{при} \quad p\beta = 0 \quad \text{и} \quad |\beta| < \frac{c}{c_1 k}. \quad (17.42)$$

За координаты фазовой плоскости примем, как обычно, $x = \beta$, $y = p\beta$. Условие $y = 0$ и $|x| < \frac{c}{c_1 k}$, при котором согласно (17.42) будет $\beta = \operatorname{const}$,

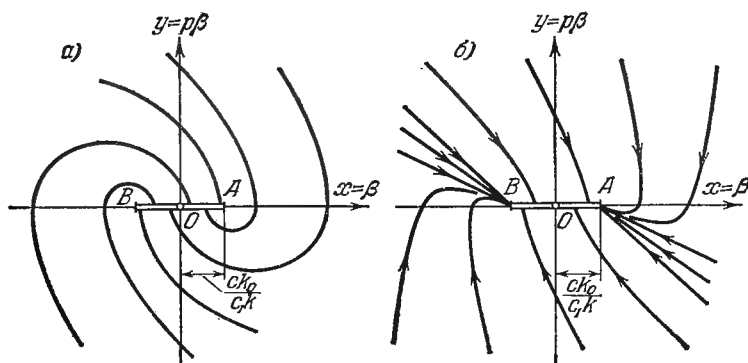


Рис. 17.5.

т. е. система будет в равновесии, изображается на фазовой плоскости отрезком AB (рис. 17.5).

Вне этого отрезка согласно (17.41) необходимо отдельно рассмотреть два случая: $y = p\beta \geq 0$ и $y = p\beta \leq 0$, т. е. верхнюю и нижнюю половины фазовой плоскости. При $y \leq 0$ из (17.41) имеем

$$(p^2 + a_1 p + a_2) x = b_1.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (16.23), но со сдвигом на величину $x = \frac{b_1}{a_2}$. Следовательно, ниже оси x надо нанести такие же кривые, как на рис. 16.9, б (если $a_1^2 < 4a_2$) или как на рис. 16.11, б (если $a_1^2 > 4a_2$), но со сдвигом начала координат в точку A , что и сделано на рис. 17.5, а и б соответственно.

Аналогичные кривые наносятся и выше оси x , но только со сдвигом начала координат в точку B (рис. 17.5), так как согласно (17.41) при $y > 0$ имеем уравнение

$$(p^2 + a_1 p + a_2) x = -b_1.$$

В обоих случаях (рис. 17.5, *а* и *б*) система устойчива, причем в первом случае переходный процесс состоит из конечного числа затухающих колебаний управляемого объекта, а во втором случае имеем аperiодическое движение. Положение равновесия объекта определяется неоднозначно, объект может остановиться в любой точке особого отрезка AB (рис. 17.5), как это было уже ранее при наличии зоны нечувствительности (см. пример 1). Особый отрезок AB определяется соотношением $|M_{\text{вр}}| = |c_1 i_{\text{я}}| < c$, где c — абсолютное значение момента сухого трения при движении управляемого объекта.

Заметим, что произведенное здесь упрощение уравнений системы хотя и позволило решить их точно, но это решение, дающее в результате устойчивость системы при любых числовых значениях параметров системы, неполно отражает действительную картину явлений в данной нелинейной системе.

Метод точечного преобразования. Как видно было из примеров, фазовая траектория обычно складывается из отдельных кусков, представляющих решение уравнений системы по участкам.

Пусть (рис. 17.6, *а*) граничными линиями между кусками фазовых траекторий являются ось x , линия FG и линия LN .

Возьмем начальное положение изображающей точки M_0 где-нибудь на полуоси Ox . Один этап движения системы состоит в переходе изображающей точки на линию FG , ограничивающую этот этап, в некоторое положение M_1 (рис. 17.6, *а*). Следующий этап переводит изображающую точку

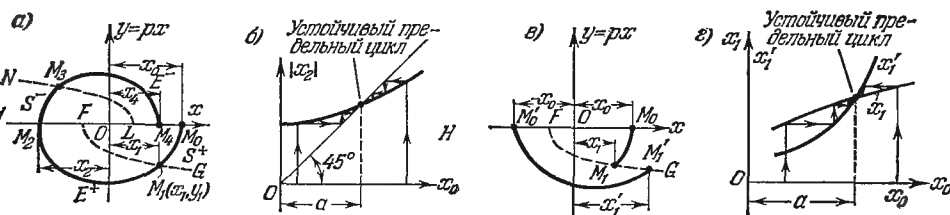


Рис. 17.6.

в положение M_2 на полуоси OH , затем в положение M_3 на кривой LN и, наконец, в положение M_4 на исходной полуоси Ox .

Каждому положению $M_0(x_0, 0)$ на полуоси Ox соответствует определенное положение точки $M_1(x_1, y_1)$ на кривой FG . Это называется *точечным преобразованием* полупрямой Ox в кривую FG . Для краткости ему присваивают название, например: преобразование S^+ . Далее (рис. 17.6, *а*) идет точечное преобразование кривой FG в полупрямую OH , названное E^+ ; затем — точечное преобразование S^- полупрямой OH в кривую LN и преобразование E^- кривой LN в исходную полуось Ox .

Все это в целом (или, как говорят, преобразование $S^+E^+S^-E^-$) называется *точечным преобразованием* полупрямой Ox самой в себя. Это преобразование в данном случае записывается в виде определенной зависимости:

$$x_4 = f(x_0),$$

где через x_4 и x_0 обозначены абсциссы точек M_4 и M_0 (рис. 17.6, *а*). Если при любом x_0 оказывается $x_4 < x_0$, то в системе будет затухающий процесс, а если $x_4 > x_0$ — расходящийся процесс. Если же возможно равенство $x_4 = x_0$, то на фазовой плоскости получится предельный цикл, который, как известно, может изображать либо устойчивый автоколебательный процесс, либо границу устойчивости системы в малом, либо может соответствовать особому случаю бифуркации (см. ниже).

В тех случаях, когда общая картина фазовых траекторий разделяется на две симметричные части, достаточно исследовать только половину всего точечного преобразования.

В рассматриваемом случае верхняя полуплоскость симметрична нижней относительно начала координат. Поэтому достаточно рассмотреть только первую половину преобразования (S^+E^+), т. е. точечное преобразование Ox в полупрямую OH , и выразить его в виде зависимости

$$|x_2| = f(x_0) \quad (x_2 < 0), \quad (17.43)$$

причем условие наличия предельного цикла на фазовой плоскости будет $|x_2| = x_0$ при $x_2 < 0$.

Пусть, например, зависимость (17.43) имеет вид кривой, показанной на рис. 17.6, б. Проведем на этом графике еще прямую из начала координат под углом 45° к координатным осям. Если она пересечет кривую, то в точке пересечения получим $|x_2| = x_0$. Чтобы определить, какому типу предельного цикла это соответствует, надо взять на оси абсцисс начальную точку x_0 сначала слева, а затем справа от точки пересечения и проследить ход точечного преобразования, как показано стрелками на рис. 17.6, б. В данном случае процесс сходится с обеих сторон к точке пересечения. Следовательно, здесь будет устойчивый предельный цикл, соответствующий автоколебательному процессу в системе. При этом абсцисса точки пересечения (рис. 17.6, б) дает амплитуду автоколебаний.

Можно поступить и иначе. Допустим, преобразование S^+ от точки M_0 к точке M_1 выполняется достаточно просто, но оказывается, что по полученной определенной точке M_1 находить соответствующую точку M_2 труднее, чем по заданному положению M_2 определять M_1 . Тогда будем подходить к кривой FG с двух сторон, задавая одновременно точку $M_0(x_0)$ на полуоси Ox и точку $M'_0(-x_0)$ на полуоси OH и находя соответствующие точки M_1 и M'_1 (рис. 17.6, в). В результате получим точечные преобразования полупрямых Ox и OH в кривую FG , выражаемые некоторыми зависимостями:

$$x_1 = f_1(x_0) \text{ и } x'_1 = f_2(x_0).$$

Изобразив это в виде двух кривых (рис. 17.6, г) анализируем их тем же способом, как и кривую с прямой на рис. 17.6, б.

Такие графики (17.6, б и г) называют диаграммами точечного преобразования. Они соответствуют в данном случае устойчивому предельному циклу, т. е. наличию установившегося автоколебательного процесса в системе. Другие возможные типы диаграмм точечного преобразования показаны на рис. 17.7. При этом рис. 17.7, а соответствует неустойчивому предельному циклу; он ограничивает область начальных условий (x_0, y_0) , при которых система оказывается устойчивой относительно установившегося состояния с постоянным значением регулируемой величины ($x = 0$). При начальных же условиях x_0, y_0 , выходящих за контур этого предельного цикла, система неустойчива (система устойчива в малом и неустойчива в большом).

Рис. 17.7, в соответствует двум предельным циклам, из которых меньший неустойчив, а другой (большой) устойчив. Следовательно, при начальных условиях x_0, y_0 , расположенных внутри первого предельного цикла, система устойчива, как и в предыдущем случае, а при всяких других начальных условиях она стремится к установившемуся автоколебательному процессу, который определяется вторым предельным циклом.

Этот случай может вырождаться в случай, изображенный на рис. 17.7, б, когда оба предельных цикла сливаются в один *полуустойчивый*. Подобные особые случаи называются *бифуркационными*.

Наконец, на рис. 17.7, *г* и *д* изображены случаи, когда на диаграмме точечного преобразования кривая $|x_2| = f(x_0)$ не пересекается с прямой, проведенной под углом 45° к осям. Это означает соответственно устойчивость (*г*) и неустойчивость (*д*) системы при любых начальных условиях (до которых справедливы исследуемые уравнения системы).

Заметим, что изложенное выше является лишь качественным рассмотрением, так как в нем отсутствует время t . Остается неизвестным течение процессов во времени, период (частота) автоколебаний. Чтобы получить

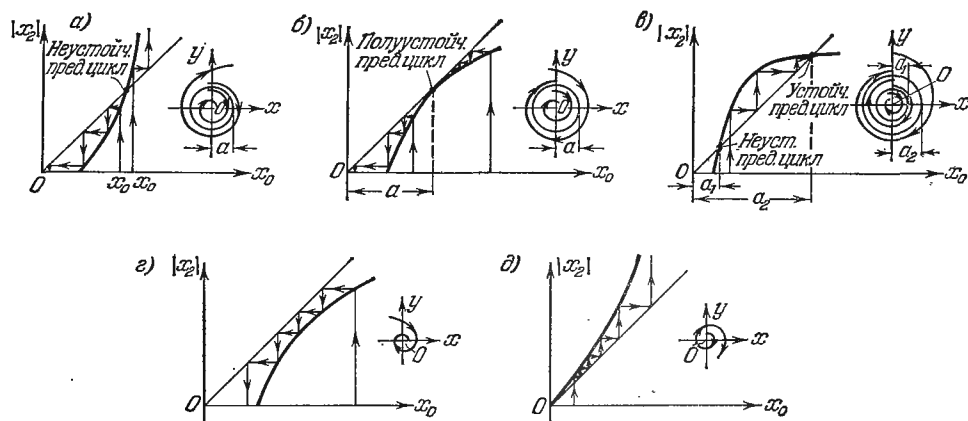


Рис. 17.7.

полное решение задачи, нужно к данному рассмотрению добавить еще решение дифференциальных уравнений на отдельных участках во времени (как в методе припасовывания, см. § 16.1). Поэтому в методе точечного преобразования вводится соответствующий временной параметр (здесь это не рассматривается).

Для систем выше второго порядка вместо фазовой плоскости придется иметь дело с фазовым пространством и с точечным преобразованием не линий, а поверхностей. Там появляются новые особенности процессов. Однако ввиду чрезвычайной сложности таких построений рассматривать их не будем.

Метод изоклин. Выше были рассмотрены такие примеры нелинейных систем второго порядка, для которых фазовые траектории легко находятся интегрированием уравнений по участкам. В тех случаях, когда интегрирование затруднено, ход фазовых траекторий, хотя бы качественно, можно проследить с помощью так называемого метода изоклин (без интегрирования уравнений). Количественно этот способ имеет меньшую точность. Применение его тоже ограничено системами второго порядка.

Изоклиной называется такая линия, во всех точках пересечения которой с фазовыми траекториями последние наклонены под одним и тем же определенным углом к оси абсцисс x . Так, если известно дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (17.44)$$

то для получения изоклины нужно положить

$$\frac{dy}{dx} = c.$$

Уравнение изоклины, следовательно, будет

$$f(x, y) = c, \quad (17.45)$$

где c обозначает определенный тангенс угла наклона фазовых траекторий. Каждому заданному значению c соответствует своя изоклина.

Например, часто встречается нелинейное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} - k(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0,$$

которое можно записать в виде

$$y = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = k(1 - x^2)y - x;$$

тогда дифференциальное уравнение фазовых траекторий будет выглядеть так:

$$\frac{dy}{dx} = k(1 - x^2) - \frac{x}{y},$$

а уравнение изоклин

$$k(1 - x^2) - \frac{x}{y} = c.$$

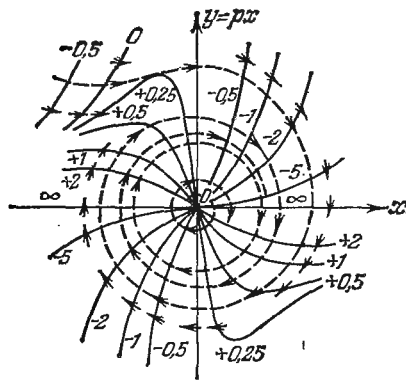


Рис. 17.8.

Задавая различные значения c (при заданном k), для каждого из них строим по этому уравнению кривую на фазовой плоскости — изоклину (сплошные кривые на рис. 17.8). Затем на каждой кривой наносим стрелочки под углами $\alpha = \arctg c$ к оси абсцисс (на рис. 17.8 указаны значения c для каждой кривой). Из этих стрелочек и составляются искомые фазовые

траектории; некоторые из них изображены на рис. 17.8 пунктиром. В данном случае получается устойчивый предельный цикл, что соответствует автоколебаниям в системе.

§ 17.2. Теоремы прямого метода Ляпунова и их применение

Предварительно заметим, что при изложении прямого метода Ляпунова, именуемого также второй методой Ляпунова, будем пользоваться дифференциальными уравнениями автоматической системы в форме уравнений первого порядка, полагая, что они записаны для переходного процесса в отклонениях всех переменных от их значений в установившемся процессе при новых постоянных значениях возмущающего $f = f^0$ и задающего $g = g^0$ воздействий. Следовательно, эти уравнения для нелинейной системы n -го порядка будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \right\} \quad (17.46)$$

где функции $X_1, X_2, \dots, X_n$ произвольны и содержат любого вида нелинейности, но всегда удовлетворяют условию

$$X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0 \text{ при } x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, \quad (17.47)$$

так как в установившемся состоянии все отклонения переменных и их производные равны, очевидно, нулю по самому определению понятия этих отклонений.

Нам понадобятся в дальнейшем еще следующие сведения.

Понятие о знакоопределенных, знакопостоянных и знакопеременных функциях. Пусть имеется функция нескольких переменных

$$V = V(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Представим себе n -мерное фазовое пространство (см. § 16.1), в котором $x_1, x_2, \dots, x_n$ являются прямоугольными координатами (это будут, в частности, фазовая плоскость при $n = 2$ и обычное трехмерное пространство при $n = 3$). Тогда в каждой точке указанного пространства функция V будет иметь некоторое определенное значение. Нам понадобятся в дальнейшем функции $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые обращаются в нуль в начале координат (т. е. при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$) и непрерывны в некоторой области вокруг него.

Функция V называется **знакоопределенной** в некоторой области, если она во всех точках этой области вокруг начала координат сохраняет один и тот же знак и нигде не обращается в нуль, кроме только самого начала координат.

Функция V называется **знакопостоянной**, если она сохраняет один и тот же знак, но может обращаться в нуль не только в начале координат, но и в других точках данной области.

Функция V называется **знакопеременной**, если она в данной области вокруг начала координат может иметь разные знаки.

Приведем примеры всех трех типов функций V . Пусть $n = 2$ и $V = x_1^2 + x_2^2$. Это будет знакоопределенная (положительная) функция, так как $V = 0$ только тогда, когда одновременно $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, и $V > 0$ при всех вещественных значениях x_1 и x_2 . Аналогично при любом n функция $V = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ будет знакоопределенной положительной, а $V = -(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$ — знакоопределенной отрицательной.

Если взять функцию $V = x_1^2 + x_2^2$ при $n = 3$, то она уже не будет знакоопределенной, так как, оставаясь положительной при любых x_1, x_2 и x_3 , она может обращаться в нуль не только при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, но также и при любом значении x_3 , если $x_1 = x_2 = 0$ (т. е. на всей оси x_3 , рис. 17.9, а). Следовательно, это будет знакопостоянная (положительная) функция.

Наконец, функция $V = x_1 + x_2$ будет знакопеременной, так как она положительна для всех точек плоскости справа от прямой $x_1 = -x_2$ (рис. 17.9, б) и отрицательна слева от этой прямой.

Заметим, что в некоторых частных задачах нам понадобится также функция V , которая обращается в нуль не в начале координат, а на заданном конечном отрезке AB (рис. 17.9, в). Тогда знакоопределенность функции V будет обозначать ее неизменный знак и необращение в нуль в некоторой области вокруг этого отрезка.

Функция Ляпунова и ее производная по времени. Любую функцию

$$V = V(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (17.48)$$

тождественно обращающуюся в нуль при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, будем называть функцией Ляпунова, если в ней в качестве величин $x_1, x_2, \dots, x_n$

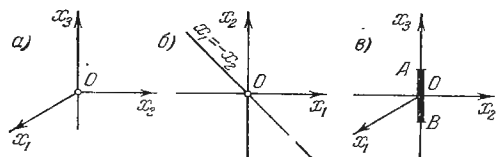


Рис. 17.9.

взяты те отклонения переменных системы регулирования в переходном процессе

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \dots, \quad x_n = x_n(t),$$

в которых записываются уравнения (17.46) для этой системы.

Производная от функции Ляпунова (17.48) по времени будет

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

Подставив сюда значения $\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$ из заданных уравнений системы регулирования в общем случае (17.46), получим производную от функции Ляпунова по времени в виде

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n, \quad (17.49)$$

где $X_1, X_2, \dots, X_n$ — правые части уравнений (17.46) системы автоматического регулирования, представляющие собой заданные функции от отклонений $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Следовательно, производная от функции Ляпунова по времени, так же как и сама V , является некоторой функцией отклонений, т. е.

$$\frac{dV}{dt} = W(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (17.50)$$

причем согласно свойству (17.47) эта функция W , так же как и сама V , тождественно обращается в нуль при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Поэтому к ней в одинаковой степени можно применять все те же понятия знакоопределенности, знакопостоянства и знакопеременности в некоторой области вокруг начала координат, о которых говорилось выше по отношению к функции V .

Здесь шла речь только об уравнениях (нелинейных), в которые не входит в явном виде время t , так как только этот случай будет рассматриваться в дальнейшем. Вообще же метод Ляпунова может применяться и при наличии времени t в явном виде, в частности для уравнений с переменными коэффициентами (линейных и нелинейных).

Базируясь на этих предварительных сведениях, дадим общую формулировку теорем Ляпунова об устойчивости и неустойчивости нелинейных систем и покажем их справедливость. Теоремы эти годятся для исследования устойчивости систем регулирования не только при малых, но и при больших отклонениях, если для них справедливы исходные уравнения данной системы регулирования. Устойчивость системы при любых больших начальных отклонениях называется коротко *устойчивостью в целом*.

Теорема Ляпунова об устойчивости нелинейных систем. Теорема формулируется следующим образом: *если при заданных в форме (17.46) уравнениях системы n -го порядка можно подобрать такую знакоопределенную функцию Ляпунова $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, чтобы ее производная по времени $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тоже была знакоопределенной (или знакопостоянной), но имела знак, противоположный знаку V , то данная система устойчива. При знакоопределенной функции W будет иметь место асимптотическая устойчивость.*

Проиллюстрируем справедливость этой теоремы на наглядных геометрических образах. Для простоты возьмем систему третьего порядка

($n = 3$). Уравнения (17.46) для нее в общем виде будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} &= X_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \right\} \quad (17.51)$$

Возьмем знакоопределенную положительную функцию Ляпунова в виде

$$V = a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + c^2 x_3^2, \quad (17.52)$$

где a, b, c — произвольно заданные вещественные числа. Будем придавать величине V возрастающие постоянные значения: $V = 0, C_1, C_2, C_3, \dots$, что означает

$$\begin{aligned} a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + c^2 x_3^2 &= 0, \\ a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + c^2 x_3^2 &= C_1, \\ a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + c^2 x_3^2 &= C_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Первое из этих выражений соответствует одной точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (началу координат фазового пространства), а остальные — поверхности эллипсоидов в фазовом пространстве, причем каждый последующий эллипсоид содержит внутри себя целиком предыдущий (рис. 17.10).

Возьмем теперь производную от функции Ляпунова по времени. Согласно (17.49) и (17.52)

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2a^2 x_1 X_1(x_1, x_2, x_3) + 2b^2 x_2 X_2(x_1, x_2, x_3) + 2c^2 x_3 X_3(x_1, x_2, x_3) = \\ &= W(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

где функции X_1, X_2, X_3 берутся из заданных уравнений системы регулирования (17.51).

Если полученная таким путем функция $W(x_1, x_2, x_3)$ окажется знакоопределенной отрицательной, т. е. если

$$\frac{dV}{dt} < 0 \quad (17.53)$$

во всех точках исследуемого фазового пространства, кроме одного только начала координат, где

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad (\text{при } x_1 = x_2 = x_3 = 0),$$

то при любых начальных условиях изображающая точка M (рис. 17.10) вследствие (17.53) будет двигаться в сторону уменьшения значения V , т. е. будет пересекать эллипсоиды, изображенные на рис. 17.10, извне внутрь. В результате с течением времени изображающая точка M будет стремиться к началу координат O фазового пространства и уже никак не сможет выйти за пределы тех эллипсоидов, в которые она проникла.

Это и означает затухание всех отклонений x_1, x_2, x_3 в переходном процессе с течением времени. Таким образом, установлена устойчивость данной системы регулирования, что иллюстрирует справедливость теоремы для системы третьего порядка (в случае знакоопределенной функции W).

Отсюда вытекает справедливость теоремы и в общем случае. Рассуждения остаются аналогичными, только вместо трех уравнений (17.51) будет n уравнений (17.46). Как и раньше, для любой знакоопределенной положи-

тельной функции Ляпунова $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$ получим некоторые замкнутые поверхности, окружающие начало координат (рис. 17.10), но уже не в обычном трехмерном, а в n -мерном фазовом пространстве (их иногда называют гиперповерхностями). Поэтому, если производная $\frac{dV}{dt} = W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ окажется знакоопределенной отрицательной, то траектория изображающей точки M в n -мерном пространстве при любых начальных условиях с течением времени будет пересекать указанные поверхности только извне внутрь, что и свидетельствует об устойчивости данной системы.

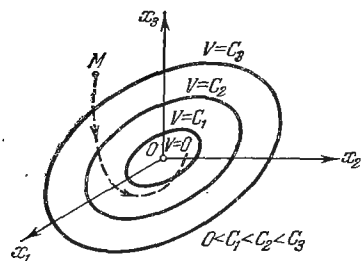


Рис. 17.10.

Если же функция W будет не знакоопределенной, а знакопостоянной, то очевидно, что траектория изображающей точки M не везде будет пересекать поверхности $V = C$, а может их касаться в тех точках, где W обращается в нуль (помимо начала координат). Но так как во всех других местах фазового пространства функция W имеет один и тот же знак, вследствие

чего изображающая точка может идти только извне внутрь поверхности $V = C$, то при решении задачи остается только проверить, не «застраивает» ли изображающая точка там, где $W = 0$ (см. пример ниже).

Замечания к теореме Ляпунова об устойчивости. По поводу сформулированной теоремы Ляпунова об устойчивости системы необходимо сделать следующие два важных замечания.

1. В теореме речь идет о подборе функции Ляпунова $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Вообще говоря, при заданных в форме (17.46) уравнениях системы регулирования можно подобрать несколько различных вариантов функции V , поскольку требуется только знакоопределенность ее и ее производной. Различные варианты функции V , удовлетворяющие теореме, могут дать соответственно различные варианты условий устойчивости для одной и той же системы регулирования. При этом одни из них будут шире, другие уже, последние могут входить в первые как частный случай и т. д.

Поэтому, вообще говоря, данная теорема Ляпунова обеспечивает получение достаточных условий устойчивости, которые не всегда будут и необходимыми, т. е. при выполнении условий теоремы система наверняка будет устойчивой, но эти условия могут не охватывать всей области устойчивости системы по параметрам. В самом деле, если выбрана функция U , удовлетворяющая теореме, нет уверенности в том, что нельзя подобрать другой вариант функции V , который бы еще более полно охватывал область устойчивости данной системы.

Геометрически это значит, что, получив определенное семейство поверхностей $V = C$ (рис. 17.10) и убедившись, что траектории изображающей точки M приближаются к началу координат, пересекая эти поверхности извне внутрь, нельзя быть уверенным в том, что не существует еще других вариантов траекторий изображающей точки M , которые в отдельных местах могут пересекать данные поверхности изнутри вовне, но все же с течением времени в конце концов неограниченно приближаться к началу координат. Такие траектории будут соответствовать другому семейству поверхностей $V = C$, т. е. другому варианту выбора функции Ляпунова.

В ряде технических задач можно вполне удовлетвориться этими достаточными условиями устойчивости. От более или менее удачного подбора функции Ляпунова V будет зависеть большая или меньшая близость полученных достаточных условий устойчивости к необходимым и достаточным, т. е. более или менее полный охват всей области устойчивости данной систе-

мы. Существуют, конечно, и такие функции $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые соответствуют всей области устойчивости.

2. К сформулированной выше теореме Ляпунова необходимо добавить, что понятие устойчивости по Ляпунову допускает, чтобы *при знакоопределенной функции V производная от нее W была не обязательно знакоопределенной или знакопостоянной, а могла быть и тождественно равна нулю во всем рассматриваемом фазовом пространстве*. В этом случае, проводя аналогичные прежним рассуждения, легко убедиться, что изображающая точка M (рис. 17.10) будет оставаться все время на какой-нибудь одной из поверхностей $V = \text{const}$, куда ее забросили начальные условия. В результате система хотя и не будет асимптотически приближаться к установившемуся состоянию, но все же будет все время в достаточной близости от него.

Теорема Ляпунова о неустойчивости нелинейных систем. Поскольку предыдущая теорема Ляпунова дает, вообще говоря, только достаточные условия устойчивости и поскольку кроме области устойчивости нелинейная система может иметь целый ряд особых областей (см. § 16.1), то может возникнуть потребность в отдельном определении области неустойчивости путем использования нижеследующей теоремы Ляпунова, которая дает достаточные условия неустойчивости системы.

Теорема формулируется так: *если при заданных в форме (17.46) уравнениях системы n -го порядка производная $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от какой-нибудь функции Ляпунова $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ окажется знакоопределенной, причем сама функция V в какой-нибудь области, примыкающей к началу координат, будет иметь знак, одинаковый со знаком производной W , то данная система неустойчива*.

Справедливость этой теоремы иллюстрируется геометрически следующим образом. Пусть для какой-нибудь заданной системы второго порядка ($n = 2$) найдена такая знакопеременная функция $V(x_1, x_2)$, для которой производная

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1(x_1, x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2(x_1, x_2) = W(x_1, x_2)$$

оказалась знакоопределенной положительной. Пусть при этом линии $V(x_1, x_2)$ на фазовой плоскости располагаются, как указано на рис. 17.11, где линии AB и CD соответствуют значениям $V = 0$ и разделяют те области, внутри которых $V > 0$ и $V < 0$.

Возьмем изображающую точку M , как показано на рис. 17.11. Поскольку там $V < 0$ и везде

$$W = \frac{dV}{dt} > 0,$$

то изображающая точка M с течением времени будет двигаться и пересекать линии $V = C$, переходя от меньших значений C к большим. Она может при этом лишь временно приблизиться к началу координат, но в конце концов будет неограниченно удаляться от начала координат. Это соответствует расходящемуся процессу, т. е. *неустойчивости* системы. Аналогично можно показать справедливость теоремы и для системы любого порядка n , проводя те же рассуждения для n -мерного фазового пространства.

Наиболее полное решение нелинейных задач теории регулирования с применением указанных теорем дано в известной книге А. И. Лурье [81],

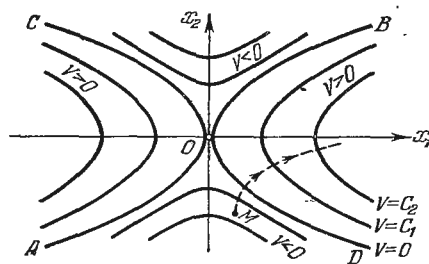


Рис. 17.11.

где предложено брать функцию Ляпунова в виде «квадратичная форма плюс интеграл» (см. также [98]).

Приведем два примера применения изложенных теорем Ляпунова к исследованию нелинейных систем автоматического регулирования.

Пример учета нелинейности привода регулирующего органа. Такой пример применительно к системе самолета с курсовым автопилотом (в упрощенном виде) был рассмотрен в работе А. И. Лурье и В. П. Постникова. Схема данной системы автоматического регулирования представлена на рис. 17.12, а.

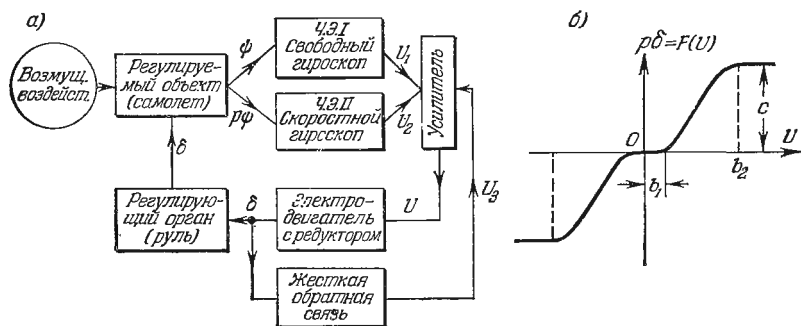


Рис. 17.12.

Пусть все звенья системы являются линейными, за исключением электродвигателя (с редуктором), для которого будем рассматривать его реальную характеристику (рис. 17.12, б). Она может иметь произвольное криволинейное очертание с зоной застоя (при $|U| < b_1$) и с зоной насыщения (при $|U| > b_2$). Наклон характеристики и ее криволинейность могут быть любыми, лишь бы только соблюдались условия

$$\frac{dF}{dU} \geq 0, \quad F > 0 \quad \text{при} \quad U > b_1 \quad \text{и} \quad F < 0 \quad \text{при} \quad U < -b_1. \quad (17.54)$$

Требуется найти условия устойчивости данной системы автоматического регулирования.

Уравнение самолета как регулируемого объекта в грубо упрощенном виде будет

$$(T_1 p + 1) p\psi = -k_1 \delta, \quad (17.55)$$

где ψ — отклонение курсового угла самолета, δ — отклонение руля.

Уравнения чувствительных элементов (гироскопов с потенциометрами):

$$U_1 = k_2 \psi, \quad U_2 = k_3 p\psi. \quad (17.56)$$

Уравнение обратной связи

$$U_3 = k_4 \delta. \quad (17.57)$$

Уравнение усилителя

$$U = k_5 U_1 + k_6 U_2 - k_7 U_3. \quad (17.58)$$

Уравнение электродвигателя с редуктором и рулем

$$p\delta = F(U), \quad (17.59)$$

где $F(U)$ задается графиком рис. 17.12, б.

Уравнения (17.56), (17.57), и (17.58) можно свести к одному:

$$U = k_\psi \psi + k_{p\psi} p\psi - k_{oc} \delta, \quad (17.60)$$

где

$$k_{\psi} = k_2 k_5, \quad k_{p\psi} = k_3 k_6, \quad k_{oc} = k_4 k_7.$$

Для перехода к уравнениям вида (17.46) введем новые переменные:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{T_1 k_1} p\psi + \frac{1}{T_1} \delta, & x_2 &= -\frac{1}{T_1} \delta, \\ x_3 &= \frac{1}{T_1 k_1 k_{p\psi}} U = \frac{k_{\psi}}{T_1 k_1 k_{p\psi}} \psi + \frac{1}{T_1 k_1} p\psi - \frac{k_{oc}}{T_1 k_1 k_{p\psi}} \delta \end{aligned} \right\} \quad (17.61)$$

и безразмерное время

$$\tau = \frac{t}{T_1}. \quad (17.62)$$

С введением этих переменных дифференциальные уравнения всей системы (17.55), (17.59), (17.60) преобразуются к виду (17.46), а именно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= -x_1 + f(x_3), \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -f(x_3), \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= (\gamma - 1)x_1 + \gamma x_2 - r f(x_3), \end{aligned} \right\} \quad (17.63)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{T_1 k_{\psi}}{k_{p\psi}}, & r &= \frac{k_{\psi}}{k_1 k_{p\psi}}, \\ f(x_3) &= F(T_1 k_1 k_{p\psi} x_3), \end{aligned} \right\} \quad (17.64)$$

т. е. функция $f(x_3)$ имеет все те же свойства, что и заданная функция $F(U)$ (рис. 17.12, б), и отличается лишь масштабом чертежа по оси абсцисс в связи с заменой переменной U на x_3 согласно третьему из равенств (17.61).

Установившийся процесс полета при данной системе согласно (17.55), (17.59), (17.60) и графику рис. 17.12, б будет иметь место при

$$\delta = 0, \quad p\psi = 0, \quad |\psi| < \frac{b_1}{k_{p\psi}}, \quad (17.65)$$

т. е. наличие зоны застоя двигателя приводит к тому, что в установившемся процессе курсовой угол может принять любое постоянное значение в пределах (17.65).

В новых переменных (17.61) установившийся процесс полета определяется значениями:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad |x_3| < \frac{b_1}{T_1 k_1 k_{p\psi}}, \quad (17.66)$$

чему соответствует любая точка отрезка AB в фазовом пространстве (рис. 17.13, а).

При отыскании условий устойчивости рассмотрим два случая: $\gamma > 1$ и $0 < \gamma < 1$.

С л у ч а й $\gamma > 1$. Возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{\gamma - 1}{2} x_1^2 + \frac{\gamma}{2} x_2^2 + \int_0^{x_3} f(x_3) dx_3. \quad (17.67)$$

Здесь интеграл будет всегда положительным, так как функция $f(x_3)$ нечетная (см. условие (17.54)). Поэтому V есть знакоопределенная положительная функция, если $\gamma > 1$, обращающаяся в нуль на отрезке установившегося

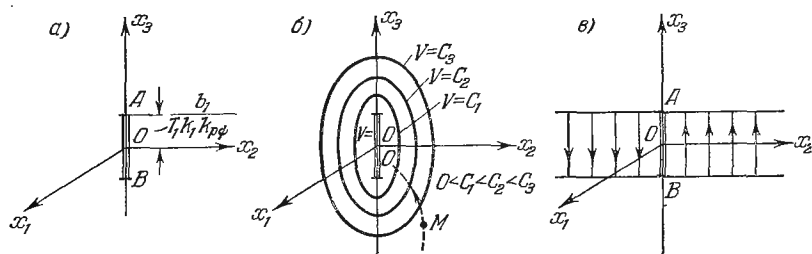


Рис. 17.13.

процесса AB (рис. 17.13). Поверхности $V(x_1, x_2, x_3) = C$ окружают этот отрезок (рис. 17.13, б), стягиваясь к нему с уменьшением C .

Составим производную от функции Ляпунова:

$$W = \frac{dV}{d\tau} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial x_3} \frac{dx_3}{d\tau},$$

причем частные производные возьмем из (17.67), а производные по безразмерному времени — из уравнений системы (17.63). Тогда

$$W = -(\gamma - 1)x_1^2 + (\gamma - 1)x_1 f(x_3) - \gamma x_2 f(x_3) + f(x_3)[(\gamma - 1)x_1 + \gamma x_2 - r f(x_3)].$$

Представим это в виде

$$W = -(\gamma - 1)[f(x_3) - x_1]^2 - (r - \gamma + 1)[f(x_3)]^2. \quad (17.68)$$

Эта функция W знакопостоянная, так как она не включает в себя координату x_2 , а потому обращается в нуль не только на отрезке установившегося процесса AB , а на всей полосе шириной AB в плоскости $x_2 x_3$ (рис. 17.13, в). Но вне этой полосы согласно (17.68) она будет всюду отрицательной при

$$r > \gamma - 1, \text{ если } \gamma > 1. \quad (17.69)$$

Поэтому согласно теореме Ляпунова об устойчивости выражение (17.69) является достаточным условием устойчивости рассматриваемой нелинейной системы самолета с курсовым автопилотом (при любой кривизне и любом наклоне характеристики двигателя, имеющей вид рис. 17.12, б).

Траектория изображающей точки M будет пересекать поверхности $V = C$ извне внутрь везде, где $W = \frac{dV}{d\tau} < 0$. Нужно только проверить, не «застрянет» ли изображающая точка M там, где W обращается в нуль (помимо отрезка установившегося процесса AB). В данном случае речь идет о том, не останется ли изображающая точка на полосе (показанной на рис. 17.13, в), где $W = 0$, если она случайно на нее попадет.

Для решения этого вопроса найдем проекции скорости изображающей точки M $\frac{dx_1}{d\tau}$, $\frac{dx_2}{d\tau}$, $\frac{dx_3}{d\tau}$, когда эта точка находится в любом месте указанной полосы. Поскольку там

$$x_1 = 0, \quad |x_3| < \frac{b_1}{T_1 k_1 k_{p\psi}}, \quad f(x_3) = 0,$$

то искомые проекции скорости согласно (17.63) будут

$$\frac{dx_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = 0, \quad \frac{dx_3}{d\tau} = \gamma x_2.$$

где $F(x_k)$ — однозначная нелинейная функция, обращающаяся в нуль при $x_k = 0$, а k — любое целое число из $1, 2, \dots, n$, то для устойчивости системы достаточно, чтобы для линеаризованной системы (17.71) при замене $F(x_k) = ax_k$ можно было построить функцию Ляпунова V , производная

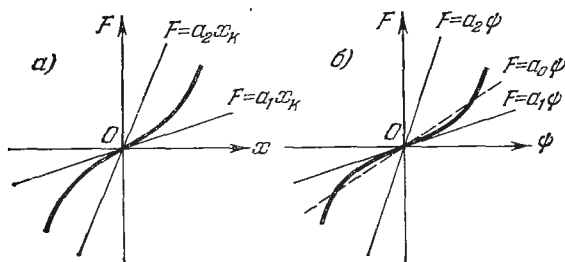


Рис. 17.14.

от которой W является знакоопределенной отрицательной функцией при любом значении a в интервале $a_1 < a < a_2$, если кривая $F(x_k)$ лежит между прямыми $F = a_1 x_k$ и $F = a_2 x_k$, как изображено, например, на рис. 17.14, а.

Пусть, например, в прежней системе самолета с курсовым автопилотом (рис. 17.12, а) уравнение регулируемого

объекта имеет вид (17.55), привод руля имеет линейную характеристику $p\delta = k_8 U$, но реостат при чувствительном элементе I (измерителе регулируемой величины ψ) имеет нелинейную характеристику, в результате чего получается нелинейное уравнение автопилота

$$p\delta = F(\psi) + k_{p\psi} p\psi - k_{oc}\delta, \quad (17.72)$$

где

$$k_{p\psi} = k_3 k_6 k_8, \quad k_{oc} = k_4 k_7 k_8,$$

а $F(\psi)$ — нелинейная функция, например, вида рис. 17.14, б.

Введем обозначения переменных:

$$x_1 = -\delta, \quad x_2 = \psi, \quad x_3 = p\psi.$$

Тогда уравнения автопилота (17.72) и самолета (17.55) примут вид (17.71), а именно:

$$\left. \begin{aligned} px_1 &= -k_{oc}x_1 - k_{p\psi}x_3 - F(x_2), \\ px_2 &= x_3, \\ px_3 &= \frac{k_1}{T_1}x_1 - \frac{1}{T_1}x_3. \end{aligned} \right\} \quad (17.73)$$

Зададимся функцией V в виде

$$V = \frac{1}{2} b_1 x_1^2 + \frac{1}{2} b_2 x_2^2 + \frac{1}{2} b_3 x_3^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3,$$

где все шесть коэффициентов b неизвестны. Потребуем, чтобы функция

$$W = \frac{\partial V}{\partial x_1} px_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} px_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3} px_3 \quad (17.74)$$

при фиксированном значении $F(x_2) = a_0 x_2$ в уравнениях (17.73) имела вид

$$W_0 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \quad (17.75)$$

Тогда путем приравнивания соответствующих коэффициентов выражений (17.74) и (17.75) можно найти все шесть величин b из системы шести алгебраических уравнений. Здесь приводится результат решения только для трех коэффициентов, которые понадобятся в дальнейшем, а именно:

$$b_1 = \frac{D_1}{aD}, \quad b_{12} = \frac{1}{a_0}, \quad b_{13} = \frac{D_{13}}{a_0 D}, \quad (17.76)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D &= (T_1 k_{oc} + 1) (k_{oc} + k_{\psi} k_1) - a_0 k_1 T_1, \\ D_1 &= a_0 k_1 (T_1 k_{\psi} + k_1) + (T_1 k_{oc} + 1) (a_0 + k_1), \\ D_{13} &= T_1 [a_0 (T_1 a_0 + k_{oc} k_1 - k_{\psi}) + k_{oc} (T_1 k_{oc} + 1)]. \end{aligned} \right\} \quad (17.77)$$

Затем потребуем, чтобы выражение (17.74) при замене в уравнениях (17.73) $F(x_2) = ax_2$, где $a = a_0 + \Delta a$, имело вид

$$W = -(c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 + 2c_{12} x_1 x_2 + 2c_{13} x_1 x_3 + 2c_{23} x_2 x_3),$$

что дает значения:

$$\left. \begin{aligned} c_1 = c_3 = 1, \quad c_2 = b_{12} \Delta a + 1, \\ 2c_{12} = -b_1 \Delta a, \quad 2c_{13} = 0, \quad 2c_{23} = b_{13} \Delta a. \end{aligned} \right\} \quad (17.78)$$

Функция W будет знакоопределенной отрицательной, как требуется по условию, если

$$c_2 > 0, \quad c_2 c_3 - c_{23}^2 > 0, \quad c_1 c_2 c_3 + 2c_{12} c_{13} c_{23} - c_{1c_{23}}^2 - c_{2c_{13}}^2 - c_{3c_{12}}^2 > 0.$$

Эти неравенства с учетом (17.78) приводятся к следующему:

$$(\Delta a)^2 - \frac{4b_{12}}{b_1^2 + b_{13}^2} \Delta a - \frac{4}{b_1^2 + b_{13}^2} < 0.$$

Подставив сюда (17.76), увидим, что это условие выполняется, если Δa лежит в интервале $\Delta a_1 < \Delta a < \Delta a_2$, где

$$\Delta a_{1,2} = \frac{2a_0 D}{D_1^2 + D_{13}^2} (D \mp \sqrt{D^2 + D_1^2 + D_{13}^2}), \quad (17.79)$$

откуда видно, что $\Delta a_1 < 0$ и $\Delta a_2 > 0$. При этом требуется еще $D > 0$. Нетрудно проверить, что последнее требование совпадает с критерием устойчивости (см. § 6.2) для данной системы в линеаризованном виде при замене $F(\psi) = a_0 \psi$ (рис. 17.14, б), так как характеристическое уравнение согласно (17.55) и (17.72) в этом случае будет

$$T_1 p^3 + (T_1 k_{oc} + 1) p^2 + (k_{oc} + k_{\psi} k_1) p + a_0 k_1 = 0. \quad (17.80)$$

Итак, для устойчивости рассматриваемой нелинейной системы автоматического регулирования достаточно, во-первых, чтобы выполнялся критерий устойчивости Гурвица $D > 0$ для линеаризованной системы при $F(\psi) = a_0 \psi$ и, во-вторых, чтобы нелинейная характеристика $F(\psi)$, измерителя регулируемой величины лежала, как указано на рис. 17.14, б, между прямыми $F = a_1 \psi$ и $F = a_2 \psi$, причем $a_1 = a_0 + \Delta a_1$, $a_2 = a_0 + \Delta a_2$, где значения $\Delta a_{1,2}$ определяются формулой (17.79), в которой величины D , D_1 , D_{13} согласно (17.77) выражаются через параметры данной системы и через первоначально принятое значение a_0 при линеаризации $F(\psi) = a_0 \psi$.

Как и в предыдущем примере, здесь получаются условия *абсолютной устойчивости*, т. е. условия, не зависящие от формы нелинейности, но в более узких, чем (17.54), пределах, показанных на рис. 17.14, б.

§ 17.3. Определение автоколебаний релейных систем методом припасовывания

В § 17.1 с помощью фазовой плоскости были найдены автоколебания некоторых нелинейных систем второго порядка. Еще ранее, в § 16.1, были исследованы автоколебания в релейной системе второго порядка методом припасовывания. Однако и для релейных систем любого порядка также суще-

и будем считать, что все они различны. Тогда уравнение (17.82) после разложения частного двух многочленов $N_k(p)$ и $D(p)$ на простейшие дроби можно будет записать в виде

$$x_k = - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{N_k(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)} \frac{\xi}{p - \lambda_j}, \quad (17.84)$$

где $D'(\lambda_j)$ обозначает производную от многочлена $D(p)$ по p , в которую подставлено значение $p = \lambda_j$.

Введем новые переменные

$$y_j = \frac{\xi}{p - \lambda_j} \quad \text{или} \quad (p - \lambda_j) y_j = \xi \quad (j = 1, 2, \dots, n-1). \quad (17.85)$$

Выписывая эти соотношения и добавляя к ним последние два из уравнений (17.84), в которых переменные x_k заменяются по формулам (17.84) и (17.85) через y_j , приходим к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} p y_j &= \lambda_j y_j + \xi \quad (j = 1, 2, \dots, n-1), \\ \sigma &= \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j - r \xi, \quad p \xi = F(\sigma), \end{aligned} \right\} \quad (17.86)$$

где

$$\beta_j = - \frac{c_1 N_1(\lambda_j) + c_2 N_2(\lambda_j) + \dots + c_{n-1} N_{n-1}(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)}. \quad (17.87)$$

Введем, наконец, еще новые переменные

$$z_j = p y_j = \lambda_j y_j + \xi \quad (j = 1, 2, \dots, n-1). \quad (17.88)$$

Продифференцировав по времени все уравнения (17.86), кроме последнего, и исключив затем из них $p y_j$ и $p \xi$, получаем канонические уравнения для заданной системы (17.84) в виде

$$\left. \begin{aligned} p z_1 &= \lambda_1 z_1 + F(\sigma), \\ p z_2 &= \lambda_2 z_2 + F(\sigma), \dots, \\ p z_{n-1} &= \lambda_{n-1} z_{n-1} + f(\sigma), \\ p \sigma &= \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots + \beta_{n-1} z_{n-1} - r F(\sigma) \quad (z_n \equiv \sigma), \end{aligned} \right\} \quad (17.89)$$

причем $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ и σ называются каноническими переменными (σ играет роль переменной z_n). Эти уравнения имеют значительно более простой вид, чем исходные уравнения (17.84), что и позволяет провести дальнейшие исследования в более простом и общем виде.

Следует заметить, что вещественным корням λ соответствуют вещественные канонические переменные z , а комплексным корням — комплексные канонические переменные.

Теперь требуется написать только выражения для исходных переменных ($x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \xi$) через канонические ($z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, \sigma$). Получим их. Если все корни λ_j отличны от нуля, то из (17.88) имеем

$$y_j = \frac{z_j - \xi}{\lambda_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1).$$

$\sigma > 0$ и согласно рис. 17.15 $F(\sigma) = c$, уравнения (17.89) имеют вид

$$pz_j = \lambda_j z_j + c \quad (j=1, 2, \dots, n-1), \quad p\sigma = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j z_j - rc.$$

Если корни λ_j не равны нулю, то общее решение этих уравнений будет

$$z_j = -\frac{c}{\lambda_j} + C_j e^{\lambda_j t} \quad (j=1, 2, \dots, n-1),$$

$$\sigma = -c \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\beta_j}{\lambda_j} + r \right) t + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{C_j \beta_j}{\lambda_j} e^{\lambda_j t} + C_n,$$

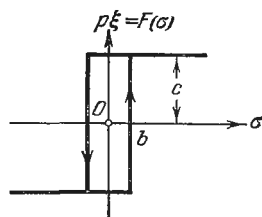


Рис. 17.15.

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные интегрирования. Они определяются из условий периодичности, выражающих собой тот факт, что в конце полупериода колебаний каждая переменная должна быть равна ее значению в начале периода с обратным знаком, а именно:

$$z_j(T) = -z_j(0), \quad (j=1, 2, \dots, n-1), \quad \sigma(T) = -\sigma(0),$$

если время t отсчитывать от начала рассматриваемого полупериода колебаний. В результате получаем:

$$C_j = \frac{2c}{\lambda_j (1 + e^{\lambda_j T})} \quad (j=1, 2, \dots, n-1),$$

$$C_n = \frac{c}{2} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\beta_j}{\lambda_j} + r \right) T - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{C_j \beta_j (1 + e^{\lambda_j T})}{2\lambda_j}.$$

Следовательно, написанное выше решение имеет вид

$$\left. \begin{aligned} z_j &= -\frac{c}{\lambda_j} \left(1 - \frac{2e^{\lambda_j t}}{1 + e^{\lambda_j T}} \right) \quad (j=1, 2, \dots, n-1), \\ \sigma &= -c \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\beta_j}{\lambda_j} + r \right) \left(t - \frac{T}{2} \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\beta_j}{\lambda_j^2} \left(1 - \frac{2e^{\lambda_j t}}{1 + e^{\lambda_j T}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (17.93)$$

в интервале времени $0 < t < T$.

В начале полупериода (в момент переключения реле) согласно рис. 17.15 имеем $\sigma = b$. Подставив это в (17.93), получаем уравнение для определения полупериода автоколебаний T :

$$\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\beta_j}{\lambda_j} + r \right) \frac{T}{2} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\beta_j}{\lambda_j^2} \operatorname{th} \frac{\lambda_j T}{2} = \frac{b}{c}. \quad (17.94)$$

Период автоколебаний будет $2T$. Следовательно, частота автоколебаний

$$\omega = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}.$$

Необходимо заметить, что для того, чтобы действительно произошло переключение реле, нужно согласно рис. 17.15 иметь возрастание величины σ при $\sigma = b$, т. е. в этот момент должно быть $p\sigma > 0$. Отсюда получается, что

должно выполняться следующее условие переключения:

$$r + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\beta_j}{\lambda_j} \operatorname{th} \frac{\lambda_j T}{2} < 0. \quad (17.95)$$

Кроме того, не должно быть обратного переключения реле внутри полупериода, т. е. требуется $\sigma > -b$ при $0 < t < T$. Это можно проверить, построив кривую $\sigma(t)$ по второй из формул (17.93).

Амплитуда автоколебаний для любой переменной определяется как максимальное ее значение внутри полупериода ($0 < t < T$) на основании формул (17.93). Последние дают также и всю кривую автоколебательного процесса на участке $0 < t < T$ (на втором полупериоде она повторяется с обратным знаком, затем с прежним знаком и т. д.).

В случае, если один из корней λ_j равен нулю, например $\lambda_{n-1} = 0$, то формулы (17.93), (17.94) и (17.95) заменяются соответственно следующими:

$$\left. \begin{aligned} z_j &= -\frac{c}{\lambda_j} \left(1 - \frac{2}{1 + e^{\lambda_j T}} e^{\lambda_j t} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, n-2), \\ z_{n-1} &= c \left(t - \frac{T}{2} \right), \\ \sigma &= -c \left[\left(\sum_{j=1}^{n-2} \frac{\beta_j}{\lambda_j} + r \right) \left(t - \frac{T}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\beta_j}{\lambda_j^2} \left(1 - \frac{2}{1 + e^{\lambda_j T}} e^{\lambda_j t} \right) + \frac{\beta_{n-1}}{2} (T - t) \right], \end{aligned} \right\} \quad (17.96)$$

а также

$$\left(\sum_{j=1}^{n-2} \frac{\beta_j}{\lambda_j} + r \right) \frac{T}{2} - \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\beta_j}{\lambda_j^2} \operatorname{th} \frac{\lambda_j T}{2} = \frac{b}{c}, \quad (17.97)$$

$$r + \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\beta_j}{\lambda_j} \operatorname{th} \frac{\lambda_j T}{2} + \frac{\beta_{n-1} T}{2} < 0. \quad (17.98)$$

Устойчивость автоколебаний определяется на основании уравнений данной системы в малых отклонениях от исследуемого автоколебательного процесса. Эти уравнения являются линейными уравнениями с периодически-ми переменными коэффициентами. Согласно теории Ляпунова (приводится без вывода), необходимым и достаточным условием устойчивости автоколебаний является отрицательность вещественных частей всех корней следующего характеристического уравнения:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\beta_j}{\lambda_j} \operatorname{th} \frac{\lambda_j T}{2} \frac{p - \operatorname{th} \frac{\lambda_j T}{2}}{1 - p \operatorname{th} \frac{\lambda_j T}{2}} = r, \quad (17.99)$$

а если $\lambda_{n-1} = 0$, то

$$\sum_{j=1}^{n-2} \frac{\beta_j}{\lambda_j} \operatorname{th} \frac{\lambda_j T}{2} \frac{p - \operatorname{th} \frac{\lambda_j T}{2}}{1 - p \operatorname{th} \frac{\lambda_j T}{2}} + \frac{\beta_{n-1} T}{2} p = r, \quad (17.100)$$

где через p , как и везде ранее, обозначена переменная характеристического уравнения.

Пример. Рассмотрим систему самолета с курсовым автопилотом (в упрощенном виде), которая исследовалась в § 17.2, но только характеристику привода руля возьмем релейную в виде рис. 17.15. В § 17.2 были получены условия устойчивости системы на основании теорем Ляпунова (устойчивость системы по отношению к установившемуся состоянию с постоянным значением угла курса). Теперь же будем искать автоколебания и условия, при которых они имеют место.

Уравнения самолета и автопилота согласно (17.55), (17.60) и (17.59) запишем здесь в виде

$$\left. \begin{aligned} T_1 p^2 \psi + p \psi &= -k_1 \xi, \\ \sigma &= k_\psi \psi + k_{p\psi} p \psi - k_{\text{ос}} \xi, \\ p \xi &= F(\sigma), \end{aligned} \right\} \quad (17.101)$$

где ψ — отклонение самолета от заданного курса, ξ — отклонение руля, σ — управляющее воздействие на рулевую машинку (в закон регулирования введена производная и имеется обратная связь). Пусть последнее из уравнений (17.101) изображается графиком рис. 17.15 (рулевая машинка постоянной скорости).

Положим

$$p \psi = x_1, \quad \psi = x_2, \quad (17.102)$$

приведем уравнения (17.101) к виду (17.81). В наших обозначениях получим:

$$\begin{aligned} p x_1 &= -\frac{1}{T_1} x_1 - \frac{k_1}{T_1} \xi, & p x_2 &= x_1, \\ \sigma &= k_{p\psi} x_1 + k_\psi x_2 - k_{\text{ос}} \xi, & p \xi &= F(\sigma). \end{aligned}$$

Следовательно, в уравнениях (17.81) в данном случае имеем:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{1}{T_1}, & a_{12} &= 0, & b_1 &= -\frac{k_1}{T_1}, \\ a_{21} &= 1, & a_{22} &= 0, & b_2 &= 0, \\ c_1 &= k_{p\psi}, & c_2 &= k_\psi, & r &= k_{\text{ос}}. \end{aligned}$$

Определитель (17.83) здесь будет

$$D(p) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{T_1} - p & 0 \\ 1 & -p \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{T_1} + p \right) p,$$

а корни его

$$\lambda_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad \lambda_2 = 0.$$

Вычислив $N_1(p)$ и $N_2(p)$ согласно указанию к формуле (17.83), а также производную $D'(p)$ и коэффициенты β_1 , β_2 , h_1 , h_2 по формулам (17.87) и (17.92), получим:

$$\begin{aligned} N_1(p) &= \frac{k_1}{T_1} p, & N_2(p) &= \frac{k_1}{T_1}, & D'(p) &= \frac{1}{T_1} + 2p, \\ \beta_1 &= k_1 \left(k_\psi - \frac{k_{p\psi}}{T_1} \right), & \beta_2 &= -k_1 k_\psi, & h_1 &= k_1, & h_2 &= -k_1 T_1. \end{aligned}$$

В результате канонические уравнения (17.89) здесь будут

$$\left. \begin{aligned} pz_1 &= -\frac{1}{T_1} x_1 + F(\sigma), \\ pz_2 &= f(\sigma), \\ p\sigma &= k_1 \left(k_\psi - \frac{k_{p\psi}}{T_1} \right) z_1 - k_1 k_\psi z_2 - k_{oc} F(\sigma), \end{aligned} \right\} \quad (17.103)$$

а выражения (17.94) для прежних переменных x_1 , x_2 , ξ через канонические z_1 и z_2 примут вид

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1 z_1 - k_1 z_2, \\ x_2 &= -k_1 T_1 z_1 + k_1 T_1 z_2 - k_1 y_2, \\ -k_1 k_\psi y_2 &= k_1 T_1 \left(k_\psi - \frac{k_{p\psi}}{T_1} \right) z_1 + (k_1 k_{p\psi} - k_1 T_1 k_\psi + k_{oc}) z_2 + \sigma. \end{aligned}$$

Подставив y_2 из последнего уравнения во второе и используя (17.402), получаем следующие выражения для исходных переменных через канонические:

$$\left. \begin{aligned} p\psi &= k_1 (z_1 - z_2), \quad \xi = z_2, \\ \psi &= \frac{1}{k_\psi} \left[-k_1 k_{p\psi} z_1 + (k_1 k_{p\psi} + k_{oc}) z_2 + \sigma \right]. \end{aligned} \right\} \quad (17.104)$$

Далее согласно (17.97) записываем уравнения для определения полупериода автоколебаний:

$$\begin{aligned} &\left[-k_1 T_1 \left(k_\psi - \frac{k_{p\psi}}{T_1} \right) + k_{oc} \right] \frac{T}{2} + \\ &+ k_1 T_1^2 \left(k_\psi - \frac{k_{p\psi}}{T_1} \right) \operatorname{th} \frac{T}{2T_1} = \frac{b}{c}, \end{aligned}$$

или

$$(1-\alpha) \frac{kT}{2T_1} - \frac{bc\alpha}{ck_{oc}T_1} = \operatorname{th} \frac{T}{2T_1}, \quad (17.105)$$

где введено обозначение

$$\alpha = \frac{k_{oc}}{k_1 (T_1 k_\psi - k_{p\psi})}. \quad (17.106)$$

Левая часть равенства (17.105) изображается прямой AB (рис. 17.16, а), а правая часть — кривой OD . Точка пересечения их является решением, уравнения (17.105).

Из графика видно, что это уравнение имеет решение только при условии $-\infty < \alpha < 1$, (17.107)

причем

$$0 < T < \infty.$$

При $\alpha > 1$ прямая AB не пересекается с кривой OD , что означает отсутствие автоколебаний при этих значениях α .

Но кроме равенства (17.105) необходимо еще выполнение условия переключения (17.98), которое в данном случае будет

$$k_{oc} + k_1 T_1 \left(k_\psi - \frac{k_{p\psi}}{T_1} \right) \operatorname{th} \frac{T}{2T_1} \frac{k_1 k_\psi T}{2} < 0,$$

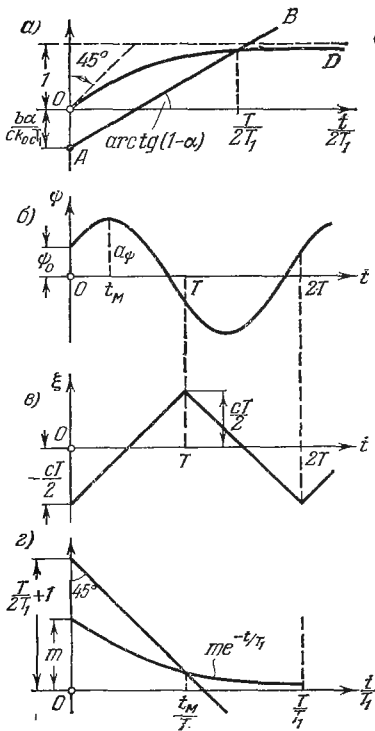


Рис. 17.16.

или

$$\alpha + \operatorname{th} \frac{T}{2T_1} - \frac{k_1 k_\psi T}{k_{oc}} \alpha < 0. \quad (17.108)$$

Следовательно, если даже значение α лежит в интервале (17.107), но не выполняется условие (17.108), то автоколебаний в системе не будет.

Для исследования устойчивости автоколебаний запишем характеристическое уравнение (17.100). Оно получает здесь вид

$$k_1 T_1 \left(k_\psi - \frac{k_{p\psi}}{T_1} \right) \operatorname{th} \frac{T}{2T_1} \frac{p + \operatorname{th} \frac{T}{2T_1}}{1 + p \operatorname{th} \frac{T}{2T_1}} - \frac{k_1 k_\psi T}{2} p = k_{oc}.$$

Случай $1 + p \operatorname{th} \frac{T}{2T_1} = 0$, когда знаменатель обращается в нуль, нереален.

Поэтому, считая $1 + p \operatorname{th} \frac{T}{2T_1} \neq 0$, приведем это уравнение к общему знаменателю, используя обозначение (17.106), что дает

$$\frac{k_1 k_\psi T}{2k_{oc}} p^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) p + \left[\left(\frac{k_1 k_\psi T}{2k_{oc}} + 1 \right) \operatorname{cth} \frac{T}{2T_1} - \frac{1}{\alpha} \operatorname{th} \frac{T}{2T_1} \right] = 0.$$

Поскольку данное характеристическое уравнение имеет вторую степень, то для устойчивости исследуемых колебаний необходима и достаточна положительность его коэффициентов. Коэффициент при p^2 положителен. Коэффициент при p согласно (17.107) тоже положителен. Поэтому условие устойчивости автоколебаний сводится к положительности свободного члена этого уравнения, т. е.

$$\left(\frac{k_1 k_\psi T}{2k_{oc}} + 1 \right) \operatorname{cth} \frac{T}{2T_1} - \frac{1}{\alpha} \operatorname{th} \frac{T}{2T_1} > 0.$$

Отсюда с учетом (17.107) заключаем, что имеются две области устойчивых автоколебаний:

$$-\infty < \alpha < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\left(\operatorname{th} \frac{T}{2T_1} \right)^2}{\frac{k_1 k_\psi T}{2k_{oc}} + 1} < \alpha < 1. \quad (17.109)$$

Между ними лежит область неустойчивого периодического решения

$$0 < \alpha < \frac{\left(\operatorname{th} \frac{T}{2T_1} \right)^2}{\frac{k_1 k_\psi T}{2k_{oc}} + 1}, \quad (17.110)$$

где при начальных условиях, приводящих к отклонениям, которые больше амплитуды этого периодического решения, в системе получаются расходящиеся колебания.

Условие $\alpha < 0$, где всегда имеют место устойчивые автоколебания, согласно (17.106) означает

$$k_{p\psi} > T_1 k_\psi, \quad (17.111)$$

т. е. неустойчивую систему (17.110) можно сделать устойчивой автоколебательной системой путем усиления интенсивности введения производной в закон регулирования согласно (17.111). При этом необходимо параметры системы подобрать так, чтобы добиться достаточно малого значения амплитуды автоколебаний и приемлемой (по техническим условиям) частоты их.

Для вычисления амплитуды автоколебаний нужно сначала по формулам (17.96) записать решения для z_1 , z_2 и σ , а именно:

$$z_1 = cT_1 \left(1 - \frac{2}{1 + e^{-\frac{T}{T_1}}} e^{-\frac{t}{T_1}} \right),$$

$$z_2 = c \left(t - \frac{T}{2} \right),$$

$$\sigma = -c \left\{ \left[-k_1 T_1 \left(k_\psi - \frac{k_{p\psi}}{T_1} \right) + k_{oc} \right] \left(t - \frac{T}{2} \right) + \right. \\ \left. + k_1 T_1^2 \left(1 - \frac{2}{1 + e^{-\frac{T}{T_1}}} e^{-\frac{t}{T_1}} \right) - \frac{k_1 k_\psi}{2} t (T - t) \right\}.$$

Затем по последней из формул (17.104) надо записать решение для угла рыскания самолета $\psi(t)$ и угла отклонения руля $\xi = z_2$, что дает

$$\left. \begin{aligned} \psi &= ck_1 T \left[\frac{t}{2T_1} (T - t) + t - \frac{T}{2} - \frac{k_{p\psi} + T_1}{k_\psi} \left(1 - \frac{2}{1 + e^{-\frac{T}{T_1}}} e^{-\frac{t}{T_1}} \right) \right], \\ \xi &= c \left(t - \frac{T}{2} \right) \quad (0 \leq t \leq T). \end{aligned} \right\} \quad (17.112)$$

По этим уравнениям можно построить графики автоколебаний самолета (рис. 17.16, б) и руля (рис. 17.16, в), причем

$$\psi_0 = ck_1 T_1 \left[\frac{k_{p\psi} + T_1}{k_\psi} \left(\frac{2}{1 + e^{-\frac{T}{T_1}}} - 1 \right) - \frac{T}{2} \right].$$

Амплитуда автоколебаний руля, как видно из рис. 17.16, в, будет

$$a_\xi = \frac{cT}{2},$$

где c — скорость движения руля согласно характеристике рис. 17.15.

Амплитуда автоколебаний самолета (по углу рыскания) a_ψ найдется как максимум функции $\psi(t)$ на участке $0 < t < T$. Взяв от ψ (17.112) производную по t и приравняв ее нулю, получаем следующее уравнение для определения времени $t = t_m$, соответствующего максимуму ψ :

$$\frac{T}{2T_1} + 1 - \frac{t}{T_1} = me^{-\frac{t}{T_1}}, \quad \text{где} \quad m = \frac{2(k_{p\psi} + T_1)}{k_\psi T_1 \left(1 + e^{-\frac{T}{T_1}} \right)}.$$

Это уравнение решается графически, как показано на рис. 17.16, г. Определив таким образом величину t_m , подставляем ее в первую из формул (17.112), что и дает искомую амплитуду автоколебаний самолета

$$a_\psi = \psi(t_m).$$

Частота же автоколебаний определяется через полупериод T , найденный на основании уравнения (17.105) графически (рис. 17.16, а).

Заметим, что задача в данном примере ради простоты решена лишь для упрощенного уравнения движения самолета по курсу (первое из уравнений (17.101)) и в предположении строгого постоянства скорости рулевой машинки.

§ 17.4. Частотный метод В. М. Попова

Решение задачи об абсолютной устойчивости системы с одной однозначной нелинейностью (т. е. устойчивости при любой форме этой нелинейности со слабым ограничением типа (17.54) или типа рис. 17.14) с помощью теорем прямого метода Ляпунова было проиллюстрировано на двух примерах в § 17.2.

Изложим теперь частотный метод, предложенный румынским ученым В. М. Поповым [97], при использовании которого та же задача решается более просто приемами, аналогичными частотным способам исследования устойчивости линейных систем.

Если в системе автоматического регулирования имеется лишь одна однозначная нелинейность

$$y = F(x), \quad (17.113)$$

то, объединив вместе все остальные (линейные) уравнения системы, можно всегда получить общее уравнение линейной части системы (рис. 17.17, а) в виде

$$Q(p)x = -R(p)y, \quad (17.114)$$

где

$$Q(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n,$$

$$R(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m,$$

причем будем считать $m < n$

Пусть нелинейность $y = F(x)$ имеет любое очертание, не выходящее за пределы заданного угла $\arctg k$ (рис. 17.17, б), т. е. при любом x

$$0 < F(x) < kx. \quad (17.115)$$

Пусть многочлен $Q(p)$ или, что то же, характеристическое уравнение линейной части $Q(p) = 0$ имеет все корни с отрицательными вещественными частями или же кроме них имеется еще не более двух нулевых корней. Другими словами, допускается, чтобы $a_n = 0$ или $a_n = 0$ и $a_{n-1} = 0$ в выражении $Q(p)$, т. е. не более двух нулевых полюсов в передаточной функции линейной части системы

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}.$$

Приведем без доказательства формулировку теоремы В. М. Попова: для установления устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такое конечное действительное число h , при котором при всех $\omega \geq 0$

$$\operatorname{Re} (1 + j\omega h) W(j\omega) + \frac{1}{k} > 0, \quad (17.116)$$

где $W(j\omega)$ — амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части системы. При наличии одного нулевого полюса требуется еще, чтобы

$$\operatorname{Im} W(j\omega) \rightarrow -\infty \text{ при } \omega \rightarrow 0,$$

а при двух нулевых полюсах

$$\operatorname{Re} W(j\omega) \rightarrow -\infty \text{ при } \omega \rightarrow 0, \text{ а } \operatorname{Im} W(j\omega) < 0 \text{ при малых } \omega.$$

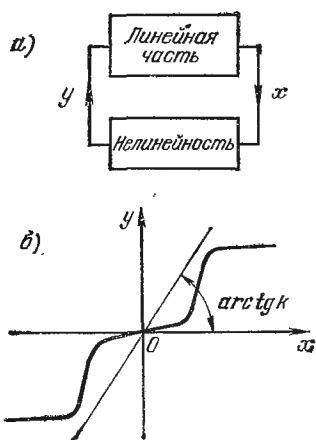


Рис. 17.17.

Теорема справедлива также и при наличии в знаменателе $Q(p)$ передаточной функции линейной части не более двух чисто мнимых корней, но при этом требуются некоторые другие простые добавочные условия [2], называемые условиями предельной устойчивости.

Другая формулировка той же теоремы, дающая удобную графическую интерпретацию, связана с введением *видоизмененной частотной характеристики* $W^*(j\omega)$, которая определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} U^*(\omega) &= \operatorname{Re} W^*(j\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega), \\ V^*(\omega) &= \operatorname{Im} W^*(j\omega) = \omega T_0 \operatorname{Im} W(j\omega), \end{aligned} \right\} \quad (17.117)$$

где $T_0 = 1 \text{ сек}$ — нормирующий множитель.

График $W^*(j\omega)$ имеет вид (рис. 17.18, а), аналогичный $W(j\omega)$, когда в выражениях $Q(p)$ и $R(p)$ разность степеней $n - m > 1$. Если же разность

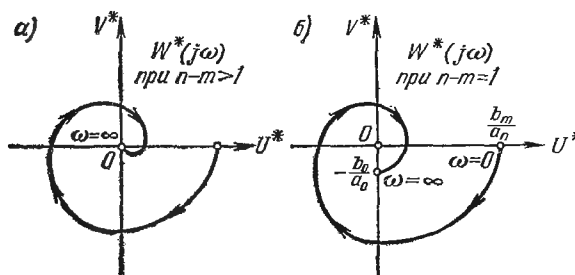


Рис. 17.18.

степеней $n - m = 1$, то конец графика $W^*(j\omega)$ будет на мнимой оси ниже начала координат (рис. 17.18, б).

Преобразуем левую часть неравенства (17.116):

$$\operatorname{Re} (1 + j\omega h) W(j\omega) + \frac{1}{k} = \operatorname{Re} W(j\omega) - \omega h \operatorname{Im} W(j\omega) + \frac{1}{k}.$$

Тогда, положив

$$W^*(j\omega) = U^*(\omega) + jV^*(\omega)$$

и используя соотношения (17.117), получим вместо (17.116) для теоремы В. М. Попова условие

$$U^*(\omega) - \frac{h}{T_0} V^*(\omega) + \frac{1}{k} = U^*(\omega) - h_0 V^*(\omega) + \frac{1}{k} > 0 \quad (17.118)$$

при всех $\omega \geq 0$.

Очевидно, что равенство

$$U^*(\omega) - h_0 V^*(\omega) + \frac{1}{k} = 0 \quad (17.119)$$

представляет уравнение прямой на плоскости $W^*(j\omega)$.

Отсюда вытекает следующая графическая интерпретация теоремы В. М. Попова: для установления устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такую прямую на плоскости $W^*(j\omega)$, проходящую через точку $(-\frac{1}{k}, j0)$, чтобы вся кривая $W^*(j\omega)$ лежала справа от этой прямой.

На рис. 17.19 показаны случаи выполнения теоремы. В этих случаях нелинейная система устойчива при любой форме однозначной нелинейности, ограниченной лишь условием (17.115). На рис. 17.20 показаны случаи, когда

теорема не выполняется, т. е. нелинейная система не имеет абсолютной устойчивости.

Заметим, что, например, в задаче о самолете с автопилотом (§ 17.2) условие (17.54) означает любое расположение нелинейной характеристики во всем первом (и третьем) квадранте. Во всех подобных случаях согласно

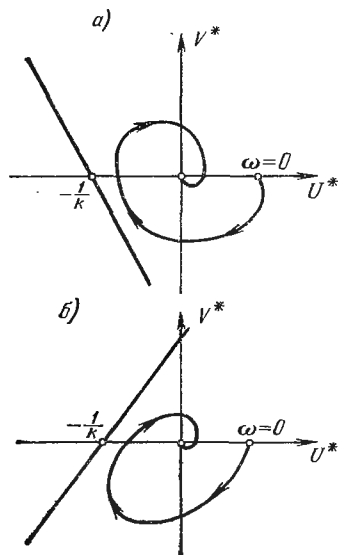


Рис. 17.19.

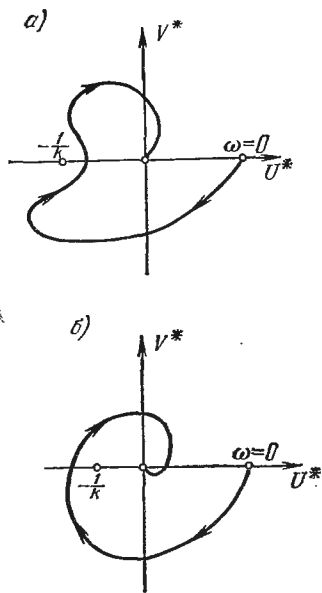


Рис. 17.20.

рис. 17.17 имеем $k = \infty$. В теореме В. М. Попова при этом вместо (17.116) получаем условие

$$\operatorname{Re} (1 + j\omega h) W(j\omega) > 0, \quad (17.120)$$

а вместо (17.118)

$$U^*(\omega) - h_0 V^*(\omega) > 0 \quad (17.121)$$

при всех $\omega > 0$. Поэтому в графической интерпретации прямая должна проходить не так, как показано было на рис. 17.19, а через начало координат.

В частности, для указанного примера (§ 17.2) уравнения (17.63) можно преобразовать к виду

$$y = f(x_3), \quad (1 + p) p^2 x_3 = [rp^2 + (1 + r)p + \gamma] y,$$

где обозначено $y = -px_2$, причем p — производная по τ .

Передаточная функция линейной части системы будет

$$W(p) = \frac{rp^2 + (1+r)p + \gamma}{(1+p)p^2}.$$

Отсюда

$$W(j\omega) = \frac{-r\omega^2 + j(1+r)\omega + \gamma}{-\omega^2(1+j\omega)}.$$

Умножив числитель и знаменатель на $1 - j\omega$, получим

$$\operatorname{Re} W(j\omega) = \frac{\gamma + \omega^2}{-\omega^2(1 + \omega^2)}, \quad \operatorname{Im} W(j\omega) = \frac{(1+r-\gamma)\omega + r\omega^3}{-\omega^2(1 + \omega^2)},$$

а согласно (17.117)

$$\left. \begin{aligned} U^* &= \frac{\gamma + \omega^2}{-\omega^2(1 + \omega^2)}, \\ T_0^{-1}V^* &= \frac{(1+r-\gamma)\omega^2 + r\omega^4}{-\omega^2(1 + \omega^2)} = \frac{1+r-\gamma+r\omega^2}{-1-\omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.122)$$

Неравенство (17.121) принимает вид

$$-(\gamma + \omega^2) + h\omega^2(1 + r - \gamma + r\omega^2) > 0. \quad (17.123)$$

Очевидно, что это неравенство может быть выполнено при любом $\omega > 0$, если

$$1 + r - \gamma > 0 \quad (17.124)$$

и если h берется сколь угодно большим, чтобы обеспечить неравенство (17.123) при сколь угодно малых ω .

Полученное условие (17.124) выполняется при

$$r > \gamma - 1, \text{ если } \gamma > 1,$$

$$r > 0, \text{ если } 0 < \gamma < 1,$$

что точно совпадает с найденными ранее условиями абсолютной устойчивости данной системы (17.69) и (17.70). Смысл практической реализации этих условий был разъяснен в § 17.2.

Графически критерий устойчивости выражается в том, что вся кривая $W^*(j\omega) = U^*(\omega) + jV^*(\omega)$, построенная согласно (17.122), расположена

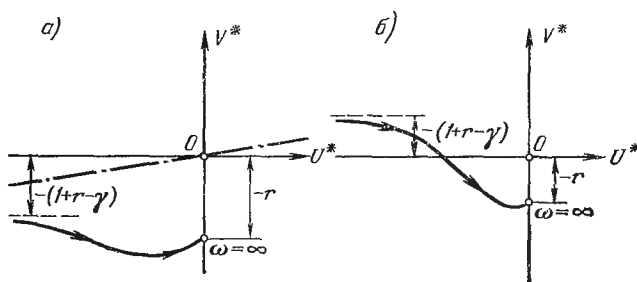


Рис. 17.21.

(рис. 17.21, а) справа от прямой $U^* - hV^* = 0$, обозначенной штрих-пунктиром, со сколь угодно малым наклоном, если $1 + r - \gamma > 0$. Если же $1 + r - \gamma < 0$ (рис. 17.21, б), то такую прямую провести невозможно и, следовательно, нелинейная система не будет абсолютно устойчивой.

Здесь был приведен простой пример, в котором условия устойчивости по методу В. М. Попова выражаются в общем буквенном виде. В большинстве технических задач этого не получится. Однако видно, что описанный частотный критерий устойчивости В. М. Попова для систем с одной однозначной нелинейностью в его графической форме может быть применен при любой сложности линейной части системы и численно заданных коэффициентах уравнений. Более того, он может быть применен в случае, когда не заданы уравнения, но известна экспериментально снятая амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части $W(j\omega)$. Чтобы установить устойчивость системы согласно рис. 17.19, $W(j\omega)$ надо перестроить в характеристику $W^*(j\omega)$, пользуясь формулами (17.117).

Очертание нелинейности может быть неизвестным. Необходимо знать лишь, в пределах какого угла (рис. 17.17) она расположена. Для конкретно заданных форм нелинейности область устойчивости, вообще говоря, будет несколько шире, но данным методом это не определяется (см. главу 18).

§ 17.5. Исследование систем с переменной структурой

Понятие о системах с переменной структурой было дано в начале книги (§ 2.3), а об их уравнениях — в конце главы 16.

Покажем методику исследования систем с переменной структурой при отсутствии внешнего воздействия на примере системы второго порядка при линейном объекте и линейных структурах регулятора, так что нелинейность системы будет заключаться в автоматическом переключении этих структур.

Имея в виду второй порядок системы, используем изображение процессов на фазовой плоскости, которое для линейных систем представлено было выше на рис. 16.8—16.13.

Рассмотрим систему (рис. 17.22), не обладающую при постоянной структуре

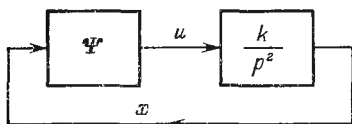


Рис. 17.22.

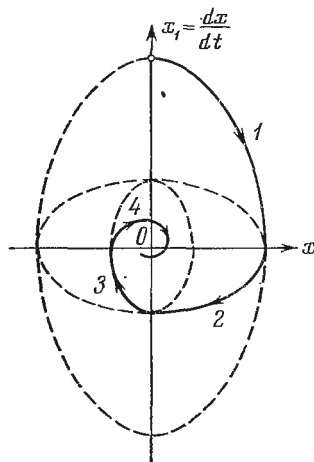


Рис. 17.23.

собственной устойчивостью [42]. В самом деле, если $\Psi = \text{const}$, то уравнение системы будет

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c k x = 0$$

и получатся незатухающие колебания, изображаемые на фазовой плоскости concentric эллипсами (рис. 16.8).

Если же звену Ψ придать вид, как на рис. 16.27, а, где $x_1 = \frac{dx}{dt}$ с переключением согласно формуле (16.71), где $\alpha = k_1$, $\beta = k_2$, причем $k_1 > k_2 > 0$, то получим уравнения системы

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k_1 k x = 0 \quad \text{при} \quad x_1 x > 0, \quad (17.125)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k_2 k x = 0 \quad \text{при} \quad x_1 x < 0. \quad (17.126)$$

Первое из них будет действовать в первом и третьем квадрантах фазовой плоскости (рис. 17.23), а второе — в четвертом и втором квадрантах. С эллипса 1 в первом квадранте (соответствует коэффициенту k_1) изображающая точка переходит на эллипс 2 в четвертом квадранте (соответствует коэффициенту k_2), затем на эллипс 3, concentric с первым (снова коэффициент k_1), далее на эллипс 4, concentric с эллипсом 2, и т. д. В результате таких переключений система становится устойчивой.

В данном примере переходный процесс представляет собой затухающие колебания. В большинстве случаев для избежания колебательных процессов

в системах с переменной структурой следует стремиться реализовать скольльзящий режим. Для этого переключения в системе должны производиться в таких местах, где фазовые траектории направлены навстречу друг другу.

Покажем это на примере.

Пусть в той же системе (рис. 17.22) звено также устроено по принципу рис. 16.27, а, но

$$x_1 = y - cx, \quad \text{где} \quad y = \frac{dx}{dt}. \quad (17.127)$$

Тогда прежнее выражение для Ψ :

$$\Psi = \begin{cases} \alpha & \text{при } x_1 x > 0, \\ \beta & \text{при } x_1 x < 0, \end{cases}$$

получает другой смысл. Возьмем при этом

$$\alpha = k_1, \quad \beta = -k_1.$$

Получим два уравнения системы:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k_1 k x = 0 \quad \text{при } x_1 x > 0, \quad (17.128)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - k_1 k x = 0 \quad \text{при } x_1 x < 0. \quad (17.129)$$

Линиями раздела между областями их действия будут

$$x = 0 \quad \text{и} \quad x_1 = y - cx = 0,$$

т. е. ось ординат и наклонная прямая на фазовой плоскости (рис. 17.24). При этом уравнение (17.128) будет действовать в первом и третьем секторах фазовой плоскости. Поэтому там фазовыми траекториями будут служить согласно рис. 16.8 концентрические эллипсы. Уравнение же (17.129) будет действовать во втором и четвертом секторах фазовой плоскости (рис. 17.24), где фазовые траектории изобразятся в соответствии с рис. 16.3.

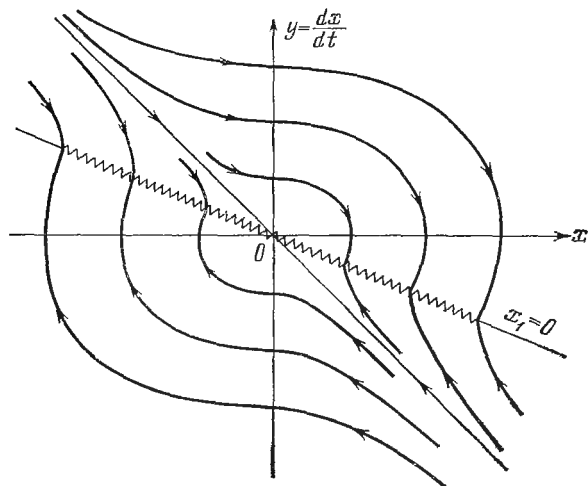


Рис. 17.24.

Обе эти линейные структуры (17.128) и (17.129) по отдельности не обладают устойчивостью. Благодаря же переключениям система в целом становится устойчивой.

В отличие от предыдущей системы, здесь, как видно из рис. 17.24, нет колебательного процесса. При любых начальных условиях фазовая траектория прихо-

дит на наклонную прямую $x_1 = 0$, где она встречается с фазовой траекторией с противоположным ей направлением движения. Поэтому переход изображающей точки через прямую $x_1 = 0$ невозможен. В результате изображающая точка вынуждена двигаться вдоль прямой $x_1 = 0$ в сторону начала координат, что и представляет собой скольльзящий режим переходного процесса в данной системе.

Практически скользящее движение будет сопровождаться вибрациями вследствие быстрых переключений то в одну, то в другую сторону, как и показано на рис. 17.24. Ввиду неидеальности системы (дополнительной инерционности или запаздывания) эти вибрации будут иметь конечные амплитуду и частоту. При идеальном же рассмотрении, проведенном выше, амплитуда их равна нулю, а частота — бесконечности.

Рассмотрение реального переходного процесса скользящего типа с конечными вибрациями за счет дополнительной инерционности, повышающей порядок уравнения, возможно с помощью приближенного метода гармонической линеаризации. Это можно сделать аналогично рассмотрению медленно меняющихся сигналов в автоколебательных системах (§ 19.2), если за медленно меняющийся сигнал принять основное апериодическое движение в скользящем процессе, а наложенные на него вибрации рассчитать, как автоколебательную составляющую процесса (см. [101]).

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И АВТОКОЛЕБАНИЙ

§ 18.1. Гармоническая линеаризация нелинейностей

В этой главе будет изложен метод гармонической линеаризации для приближенного определения периодических решений (автоколебаний) и устойчивости нелинейных систем любого порядка, который по идее близок к методу эквивалентной линеаризации или методу гармонического баланса Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, а по результатам — также и к методу малого параметра Б. В. Булгакова.

Рассматриваемый приближенный метод является мощным средством исследования нелинейных автоматических систем в смысле простоты и довольно большой универсальности его аппарата в применении к самым разнообразным нелинейностям. Однако надо иметь в виду, что он решает задачу приближенно. Имеются определенные ограничения его применимости, о которых будет сказано ниже. Эти ограничения обычно хорошо соблюдаются в задачах теории автоматического регулирования. Практические расчеты и эксперимент показывают приемлемость этого метода для многих видов нелинейных систем.

Пусть дано какое-нибудь нелинейное выражение вида

$$y = F(x, px) \quad (18.1)$$

и задано

$$x = a \sin \psi, \psi = \omega t. \quad (18.2)$$

Тогда

$$px = a\omega \cos \psi. \quad (18.3)$$

Разложив функцию в правой части выражения (18.1) в ряд Фурье, получим

$$\begin{aligned} y = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) d\psi + \\ & + \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \sin \psi d\psi \right] \sin \psi + \\ & + \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi \right] \cos \psi + \text{высшие гармоники}. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Положим

$$\int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) d\psi = 0, \quad (18.5)$$

что означает отсутствие постоянной составляющей в данном разложении. В настоящей главе будет везде предполагаться выполнение условия отсутствия постоянной составляющей (18.5). Впоследствии (глава 19) будет дан метод исследования автоколебаний при наличии постоянной составляющей, т. е. в случае невыполнения условия (18.5).

Если принять во внимание, что из (18.2) и (18.3)

$$\sin \psi = \frac{x}{a} \quad \text{и} \quad \cos \psi = \frac{px}{a\omega}$$

то формулу (18.4) при условии (18.5) можно будет записать в виде

$$y = q(a, \omega) x + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} px + \text{высшие гармоники}, \quad (18.6)$$

где q и q' — коэффициенты гармонической линеаризации, определяемые формулами:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (18.7)$$

Итак, нелинейное выражение (18.1) при $x = a \sin \omega t$ заменяется выражением (18.6), которое с точностью до высших гармоник аналогично линейному. Эта операция и называется *гармонической линеаризацией*. Коэффициенты $q(a, \omega)$ и $q'(a, \omega)$ постоянны при постоянных значениях a и ω , т. е. в случае периодического процесса. В переходном колебательном процессе с изменением a и ω коэффициенты q и q' изменяются (см. гл. 20). Для разных амплитуд и частот периодических процессов коэффициенты выражения (18.6) будут различны по величине. Это очень важное для дальнейшего обстоятельство является существенным отличием гармонической линеаризации, по сравнению с обычным способом линеаризации (§ 3.4), приводящим к чисто линейным выражениям, которые применялись в предыдущих разделах книги. Указанное обстоятельство и позволит путем применения к выражению (18.6) линейных методов исследования проанализировать основные свойства нелинейных систем, которые не могут быть обнаружены при обычной линеаризации.

Приведем также формулы гармонической линеаризации для более простой нелинейности:

$$y = F(x). \quad (18.8)$$

Здесь возможны два варианта: 1) кривая $F(x)$ имеет гистерезисную петлю (например, рис. 16.18, в, рис. 16.22, г, д), и 2) кривая $F(x)$ не имеет гистерезисной петли (рис. 16.8, б, рис. 16.22, а и др.).

При наличии гистерезисной петли, когда фактически наблюдается зависимость от знака производной, нелинейная функция $y = F(x)$ после гармонической линеаризации заменяется следующим выражением (при $x = a \sin \omega t$):

$$y = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x + \text{высшие гармоники}, \quad (18.9)$$

где

$$q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad q' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi d\psi \quad (18.10)$$

при условии отсутствия постоянной составляющей:

$$\int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) d\psi = 0.$$

Если же кривая $F(x)$ не имеет гистерезисной петли, то $q^* = 0$, так как при $x = a \sin \psi$ будет

$$q' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi d\psi = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^0 F(x) dx = 0$$

(при гистерезисной петле этот интеграл не был нулем вследствие различия в очертании кривой $F(x)$ при возрастании и убывании x).

Следовательно, при отсутствии гистерезисной петли нелинейное выражение (18.8) заменяется более простым:

$$y = q(a)x + \text{высшие гармоники},$$

т. е. криволинейная или ломаная характеристика $y = F(x)$ с точностью до высших гармоник заменяется прямолинейной, тангенс угла наклона которой q зависит от размера амплитуды колебаний a . Другими словами, нелинейное звено уподобляется «линейному» с передаточным числом (коэффициентом усиления), зависящим от амплитуды a колебаний входной величины x .

Гистерезисная же петля вводит согласно (18.9), кроме того, еще производную, дающую отставание по фазе, так как $q'(a) < 0$. Таким образом, нелинейное отставание по координате в виде гистерезисной петли превращается при гармонической линеаризации в эквивалентное линейное отставание по фазе.

Можно создать специальное нелинейное звено с опережающей петлей, что будет эквивалентно линейному опережению фазы при введении производной, но с тем отличием, что величина опережения фазы будет зависеть от размера амплитуды колебаний, чего нет в линейных системах.

В случаях, когда нелинейное звено описывается сложным уравнением, включающим сумму различных линейных и нелинейных выражений, каждый из нелинейных членов подвергается гармонической линеаризации по отдельности. Произведение же нелинейностей рассматривается обязательно в целом как одна сложная нелинейность. При этом могут встретиться иного характера нелинейные функции.

Например, при гармонической линеаризации второго из уравнений (16.3) придется дело с функцией $F(p^2x, px)$ при $x = a \sin \omega t$. В этом случае получаем

$$\left. \begin{aligned} F(p^2x, px) &= \left[\frac{q_2(a, \omega)}{-\omega^2} p^2 + \frac{q_1(a, \omega)}{\omega} p \right] x + \text{высшие гармоники}, \\ q_2 &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(-a\omega^2 \sin \psi, a\omega \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ q_1 &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(-a\omega^2 \sin \psi, a\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (18.11)$$

при условии

$$\int_0^{2\pi} F(-a\omega^2 \sin \psi, a\omega \cos \psi) d\psi = 0.$$

Если же функция $F(p^2x, px)$ или функция $F(px)$ будет единственной нелинейной функцией в уравнении нелинейного звена, то при гармонической

линеаризации можно положить $px = a \sin \omega t$ и

$$F(p^2x, px) = q(a, \omega) px + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} p^2x + \text{высшие гармоники}$$

аналогично прежним формулам (18.6 и (18.7). Но при этом величина a во всех выкладках будет амплитудой колебаний скорости px , а не самой координаты x . Последняя же будет иметь тогда амплитуду $a_x = a/\omega$.

При вычислении коэффициентов гармонической линеаризации по формулам (18.10) надо иметь в виду, что при симметричных нелинейных характеристиках интеграл $(0, 2\pi)$ можно получить удвоением интеграла $(0, \pi)$, т. е.

$$\int_0^{2\pi} = 2 \int_0^{\pi}, \quad (18.12)$$

а для симметричных относительно начала координат безгистерезисных характеристик $F(x)$ при вычислении $q(a)$ можно писать

$$\int_0^{2\pi} = 4 \int_0^{\pi/2}. \quad (18.13)$$

Приведем выражения для коэффициентов некоторых простейших нелинейных звеньев. Затем их можно будет непосредственно использовать при решении различных конкретных задач.

Коэффициенты гармонической линеаризации релейных звеньев. Найдем коэффициенты $q(a)$ и $q'(a)$ уравнений наиболее типичных релейных звеньев по формулам (18.10). Возьмем общий вид характеристики релейного звена

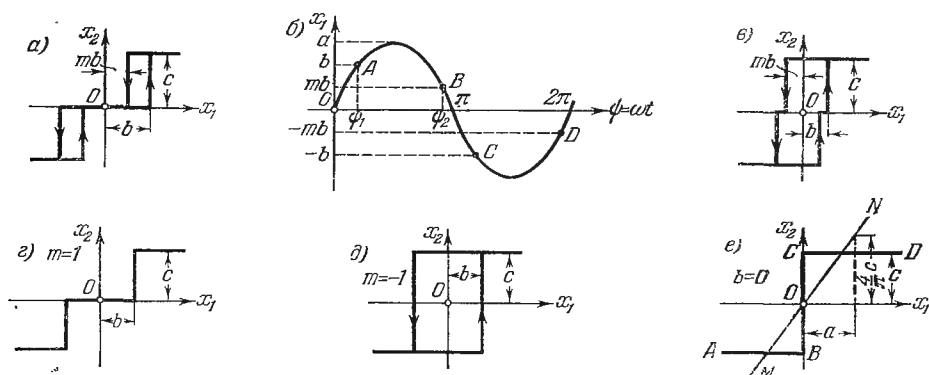


Рис. 18.1.

$x_2 = F(x_1)$, изображаемой графиком рис. 18.1, а, где m есть любое дробное число в интервале $-1 \leq m \leq 1$. Как частные случаи будут получены уравнения других типов релейных звеньев.

Если колебания входной величины $x_1 = a \sin \omega t$ имеют амплитуду $a < b$, то согласно рис. 18.1, а движения в системе не будет. Если амплитуда $a > b$, то переключения реле происходят в точках A, B, C, D (рис. 18.1, б), в которых имеем

$$\psi_1 = \arcsin \frac{b}{a}, \quad \psi_2 = \pi - \arcsin \frac{mb}{a}. \quad (18.14)$$

Следовательно, после использования свойств (18.12) каждый из интегралов (18.10) разбивается на три слагаемых:

$$\int_0^\pi = \int_0^{\psi_1} + \int_{\psi_1}^{\psi_2} + \int_{\psi_2}^\pi,$$

причем первое и третье из них согласно рис. 18.1, *a* и *b* будут нулями. Поэтому выражения (18.10) принимают вид

$$q(a) = \frac{2}{\pi a} \int_{\psi_2}^{\psi_1} c \sin \psi d\psi, \quad q'(a) = \frac{2}{\pi a} \int_{\psi_1}^{\psi_2} c \cos \psi d\psi,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{2c}{\pi a} (\cos \psi_1 - \cos \psi_2) = \frac{2c}{\pi a} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{a^2}} \right), \\ q' &= -\frac{2c}{\pi a} (\sin \psi_1 - \sin \psi_2) = -\frac{2cb}{\pi a^2} (1 - m) \quad (a > b), \end{aligned} \right\} \quad (18.15)$$

а уравнение релейного звена с характеристикой вида рис. 18.1, *a* будет иметь вид (18.9) с полученными здесь значениями $q(a)$ и $q'(a)$.

Рассмотрим частные случаи.

Для релейного звена с характеристикой без гистерезисной петли, но с зоной нечувствительности b (рис. 18.1, *z*), полагая $m = 1$, из вышенаписанных формул получаем

$$q = \frac{4c}{\pi a} \cos \psi_1 = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad q' = 0 \quad (a > b). \quad (18.16)$$

Для релейной характеристики с гистерезисной петлей типа рис. 18.1, *д*, полагая $m = -1$, имеем

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{4c}{\pi a} \cos \psi_1 = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \\ q' &= -\frac{4c}{\pi a} \sin \psi_1 = -\frac{4cb}{\pi a^2} \quad (a > b). \end{aligned} \right\} \quad (18.17)$$

Наконец, для идеального релейного звена (рис. 18.1, *e*), полагая $b = 0$, находим

$$q = \frac{4c}{\pi a}, \quad q' = 0. \quad (18.18)$$

На последнем примере легко видеть смысл гармонической линеаризации релейной характеристики. Написанное выражение для q означает замену ломаной характеристики $ABCD$ прямолинейной MN (рис. 18.1, *e*) с таким наклоном, чтобы эта прямая MN приблизительно заменяла собой тот участок ломаной $ABCD$, который охватывается заданной амплитудой a . Отсюда становится вполне понятной обратно пропорциональная зависимость q от a , даваемая формулой (18.18), так как чем больше амплитуда a колебаний входной величины x_1 , тем более пологий должна быть прямая MN , приблизительно заменяющая ломаную $ABCD$.

Аналогично обстоит дело и с релейной характеристикой на рис. 18.1, *z*, для которой наклон заменяющей ее прямой дается формулой (18.16). Следовательно, всякое безгистерезисное релейное звено в колебательном процессе эквивалентно такому «линейному» звену, передаточное число (коэффициент усиления) которого $q(a)$ уменьшается с увеличением амплитуды колебаний входной величины, начиная с $a = b \sqrt{2}$.

Что касается релейного звена с гистерезисной петлей, то согласно (18.9) и (18.17) оно заменяется линейным звеном с аналогичным прежнему коэффи-

коэффициентом усиления $q(a)$, но кроме того, еще с введением отрицательной производной в правой части уравнения. Введение отрицательной производной в противовес положительной (см. § 10.2) вносит отставание по фазе в реакции звена на входное воздействие. Это служит «линейным эквивалентом», заменяющим эффект действия нелинейности в виде гистерезисной петли. При этом коэффициент $q'(a)$ при производной согласно (18.17) тоже уменьшается с увеличением амплитуды a колебаний входной величины x_1 , что и понятно, так как эффект влияния гистерезисной петли на процесс колебаний в релейном звене должен быть тем меньше, чем больше амплитуда колебаний по сравнению с шириной гистерезисной петли.

Коэффициенты гармонической линеаризации других простейших нелинейных звеньев. Рассмотрим нелинейное звено с зоной нечувствительности и с насыщением (рис. 18.2, а). Согласно рис. 18.2, б, где

$$\psi_1 = \arcsin \frac{b_1}{a}, \quad \psi_2 = \arcsin \frac{b_2}{a} = \arcsin \frac{c + b_1 k}{a k}, \quad (18.19)$$

интеграл (18.10) на участке $(0, \pi)$ разбивается на пять слагаемых, причем два из них равны нулю. Поэтому

$$q = \frac{2}{\pi a} \int_{\psi_1}^{\psi_2} k(a \sin \psi - b_1) \sin \psi d\psi + \frac{2}{\pi a} \int_{\psi_2}^{\pi - \psi_2} c \sin \psi d\psi + \frac{2}{\pi a} \int_{\pi - \psi_2}^{\pi - \psi_1} k(a \sin \psi - b_1) \sin \psi d\psi,$$

откуда с заменой $c = (b_2 - b_1)k$ и $b_1 = a \sin u_1$, $b_2 = a \sin u_2$ получаем

$$q = \frac{2k}{\pi} \left(\psi_2 - \psi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_2 - \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \right) \quad (a > b_2), \quad (18.20)$$

где ψ_1 и ψ_2 определяются формулами (18.19). Ввиду отсутствия гистерезисной петли здесь $q' = 0$.

Итак, уравнение нелинейного звена с характеристикой вида рис. 18.2, а будет $x_2 = q(a) x_1$, где $q(a)$ определяется выражением (18.20).

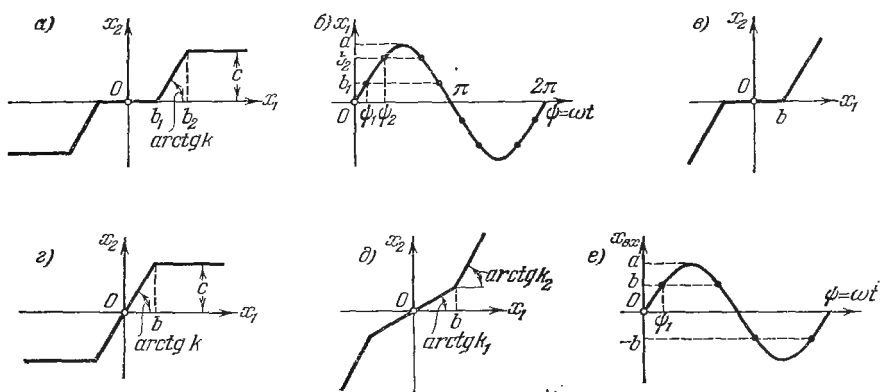


Рис. 18.2.

Как частный случай отсюда получается значение $q(a)$ для звена с зоной нечувствительности без насыщения (рис. 18.2, в). Для этого в предыдущем решении нужно положить $a < b$ и, следовательно, $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$q = k - \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \quad (a > b). \quad (18.21)$$

Как видим, звено с зоной нечувствительности уподобляется здесь линейному звену с уменьшенным за ее счет коэффициентом усиления. Это уменьшение коэффициента усиления значительно при малых амплитудах и невелико при больших, причем $0 \leq q(a) \leq k$ при $b \leq a \leq \infty$.

Для второго частного случая — звено с насыщением без зоны нечувствительности (рис. 18.2, з), — полагая $b_1 = 0$, т. е. $\psi_1 = 0$, из (18.20) и (18.19) получаем

$$q = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{c}{ak} + \frac{c}{ak} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2 k^2}} \right) \quad (18.22)$$

$$\left(a > \frac{c}{k} \right),$$

причем при $a \leq \frac{c}{k}$ имеем $q = k$ (линейная характеристика). При амплитудах колебания входной величины, захватывающих зону насыщения, данное звено заменяется как бы линейным звеном с тем меньшим коэффициентом усиления $q(a)$, чем больше амплитуда (в противоположность предыдущему).

Для звена с переменным коэффициентом усиления согласно рис. 18.2, б и в по формуле (18.10) с учетом (18.12) получаем

$$q = \frac{2}{\pi a} \int_0^{\psi_1} k_1 a \sin \psi \sin \psi d\psi +$$

$$+ \frac{2}{\pi a} \int_{\psi_1}^{\pi - \psi_1} [k_2 (a \sin \psi - b) + k_1 b] \sin \psi d\psi + \frac{2}{\pi a} \int_{\pi - \psi_1}^{\pi} k_1 a \sin \psi \sin \psi d\psi,$$

что с заменой $\sin \psi_1 = b$ дает

$$q = k_2 - \frac{2}{\pi} (k_2 - k_1) \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \quad (a > b). \quad (18.23)$$

Здесь ломаная характеристика (рис. 18.2, б) заменяется одной прямой со средним между k_1 и k_2 наклоном $q(a)$, причем этот наклон изменяется в интервале $k_1 \leq q(a) \leq k_2$ при увеличении амплитуды $b \leq a \leq \infty$. Для амплитуд $a < b$ имеем линейную характеристику с наклоном k_1 .

Для нелинейного звена с насыщением и с гистерезисной петлей (рис. 18.3, а) уравнение получит уже вид (18.9), где согласно рис. 18.3, б и формулам (18.10)

$$q = \frac{2}{\pi a} \int_0^{\psi_2} k (a \sin \psi - b) \sin \psi d\psi + \frac{2}{\pi a} \int_{\psi_2}^{\pi - \psi_1} c \sin \psi d\psi +$$

$$+ \frac{2}{\pi a} \int_{\pi - \psi_1}^{\pi} k (a \sin \psi + b) \sin \psi d\psi;$$

Рис. 18.3.

аналогично и для $q'(a)$. Отсюда

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{k}{\pi} \left(\psi_2 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_2 + \psi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \right), \\ q' &= -\frac{k}{\pi} (\sin^2 \psi_2 - \sin^2 \psi_1) \quad (a > b_2), \end{aligned} \right\} \quad (18.24)$$

где

$$\psi_2 = \arcsin \frac{b_2}{a} = \arcsin \frac{c+bk}{ak}, \quad \psi_1 = \arcsin \frac{b_1}{a} = \arcsin \frac{c-bk}{ak}. \quad (18.25)$$

Если в таком нелинейном звене амплитуда колебаний входной величины x_1 будет $a < b$, то в процессе колебаний не будет захватываться зона насыщения и получится чисто гистерезисная характеристика (рис. 18.3, в). В данном случае

$$\psi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_1 = \arcsin \left(1 - \frac{2b}{a} \right). \quad (18.26)$$

Уравнение звена с гистерезисной характеристикой вида рис. 18.3, в поэтому будет иметь форму (18.9), где согласно (18.24)

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{k}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \psi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \right), \\ q' &= -\frac{k}{\pi} \cos^2 \psi_1 = -\frac{4kb}{\pi a} \left(1 - \frac{b}{a} \right) \quad (a > b). \end{aligned} \right\} \quad (18.27)$$

Величина ψ_1 вычисляется по формуле (18.26).

Такого же типа характеристика (рис. 18.3, в) получалась и для чувствительного элемента с сухим трением в системе регулирования давления, рассмотренной в § 16 (см. рис. 16.21, в), когда мы пренебрегали массой. Следовательно, для такого нелинейного звена с сухим трением будут справедливы те же формулы (18.27) с заменой в них только

$$k = \frac{1}{\delta}, \quad (18.28)$$

а уравнение (16.58) для колебательного процесса в форме (18.9) будет

$$\eta = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] \varphi + \text{высшие гармоники}. \quad (18.29)$$

Этого же типа характеристика (рис. 18.3, в) имела место и для нелинейного звена с зазором в следящей системе (см. рис. 16.20, в), причем там $k = 1$. Следовательно, уравнение (16.55) данного нелинейного звена (для колебательного процесса) запишется в виде

$$\beta = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} \right] \beta_1 + \text{высшие гармоники}, \quad (18.30)$$

где $q(a)$ и $q'(a)$ определяются по формулам (18.27), в которых надо считать $k = 1$.

Для нелинейностей, не заданных аналитически, существует графический способ определения $q(a)$ (см. § 3.8 в книге [100]).

§ 18.2. Алгебраические способы определения автоколебаний и устойчивости в нелинейных системах первого класса

Основываясь на вышеизложенной гармонической линеаризации, составим гармонически линеаризованное уравнение всей замкнутой нелинейной автоматической системы в целом (рис. 16.4). Пусть известно дифференциальное уравнение линейной части системы

$$Q(p) x_1 = -R(p) x_2, \quad (18.31)$$

причем линейная часть может иметь структуру любой сложности (и любой порядок уравнения).

Уравнение нелинейного звена

$$x_2 = F(x_1, p x_1)$$

в колебательном процессе после гармонической линейризации запишем в виде

$$x_2 = \left[q(a, \omega) + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} p \right] x_1. \quad (18.32)$$

В частности, для нелинейной характеристики $x_2 = F(x_1)$ без гистерезисной петли будет

$$x_2 = q(a) x_1.$$

Уравнение нелинейного звена (18.32) записано, как видим, без учета высших гармоник, фигурировавших в предыдущем параграфе. Это сделано отнюдь не потому, что они малы. В отдельно взятом нелинейном звене при подаче на вход $x_1 = a \sin \omega t$ в общем случае на выходе обязательно появятся

высшие гармоники. Однако в замкнутой автоматической системе (рис. 18.4, а) линейная часть имеет обычно амплитудную частотную характеристику одного из двух видов, показанных на рис. 18.4, б. Поэтому высшие гармоники, имеющиеся у переменной x_2 , гасятся в линейной части и переменная x_1 оказывается достаточно близкой к синусоиде: $x_1 = a \sin \omega t$. В таком виде и будем искать приближенное периодическое решение для нелинейной автоматической системы. Свойство линейной части системы, определяющее вид амплитудной частотной характеристики типа изображенной на рис. 18.4, б, именуется *свойством фильтра*. Аналитическое обоснование сказанного см. в книге [100, § 2.2].

Как видим, в коэффициенты уравнения (18.32) входят амплитуда a и частота ω искомого колебательного процесса.

На основании уравнений (18.31) и (18.32) можно написать гармонически линейризованное характеристическое уравнение замкнутой нелинейной системы в виде

$$Q(p) + R(p) \left(q + \frac{q'}{\omega} p \right) = 0 \quad (18.33)$$

с теми же особенностями в коэффициентах, что и в уравнении (18.6), описанными в § 18.1.

В том случае, когда в замкнутой системе возникают собственные незатухающие колебания постоянной амплитуды $a = a_n$ и постоянной частоты $\omega = \omega_n$ (автоколебания), коэффициенты уравнения (18.32), а значит, и коэффициенты характеристического уравнения (18.33), становятся постоянными. Вместе с тем из линейной теории известно, что появление указанных колебаний в системе при постоянных коэффициентах соответствует наличию пары чисто мнимых корней в характеристическом уравнении системы.

Следовательно, можно обнаружить в замкнутой нелинейной системе появление незатухающих собственных колебаний вида $x \approx a_n \sin \omega_n t$ ($a_n = \text{const}$, $\omega_n = \text{const}$), подставив в характеристическое уравнение (18.33) $p = j\omega_n$. Если эта подстановка $p = j\omega_n$ соответствует каким-нибудь веще-

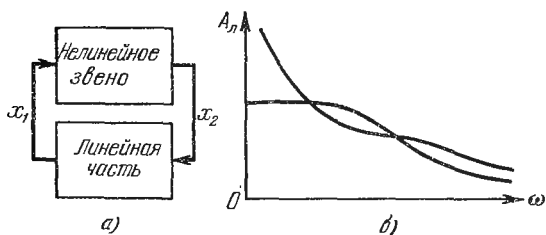


Рис. 18.4.

ственным положительным значениям $a = a_{\Pi}$ и $\omega = \omega_{\Pi}$ при заданных параметрах системы, то такие колебания возможны. Но подстановка $p = j\omega_{\Pi}$ в характеристическое уравнение с постоянными коэффициентами эквивалентна отысканию границы устойчивости линейной системы. Следовательно, появление незатухающих собственных колебаний в нелинейной системе можно обнаружить применением к характеристическому уравнению (18.33) любого из методов определения границы устойчивости линейной системы, изложенных в главе 6.

Основной способ определения периодических решений. Используем непосредственную подстановку $p = j\omega$ в гармонически линеаризованное характеристическое уравнение, а именно

$$Q(j\omega) + R(j\omega) [q(a, \omega) + jq'(a, \omega)] = 0, \quad (18.34)$$

при неизвестных постоянных значениях амплитуды a и частоты ω , входящих в коэффициенты q и q' , причем для однозначной нелинейной характеристики $F(x_1)$ будет

$$Q(j\omega) + R(j\omega) q(a) = 0.$$

Выделим в выражении (18.34) вещественную и мнимую части:

$$X(\omega) + jY(\omega) = 0, \quad (18.35)$$

и введем для частоты и амплитуды искомого периодического решения обозначения: $\omega = \omega_{\Pi}$, $a = a_{\Pi}$. Это дает два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} X(\omega_{\Pi}, a_{\Pi}) &= 0, \\ Y(\omega_{\Pi}, a_{\Pi}) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18.36)$$

из которых и определяются неизвестные частота ω_{Π} и амплитуда a_{Π} .

Если уравнения (18.36) не имеют положительных вещественных решений для a_{Π} и ω_{Π} , то периодические решения вообще (а значит, и автоколебания) в данной нелинейной системе невозможны.

Исследование устойчивости периодического решения дается ниже.

С помощью уравнений (18.36) можно не только определять частоту ω_{Π} и амплитуду a_{Π} автоколебаний при заданных параметрах системы, но и построить графики зависимостей ω_{Π} и a_{Π} от какого-либо параметра системы, например коэффициента усиления k . Для этого нужно считать в уравнениях (18.36) параметр k переменным и записывать эти уравнения в виде

$$\left. \begin{aligned} X(\omega_{\Pi}, a_{\Pi}, k) &= 0, \\ Y(\omega_{\Pi}, a_{\Pi}, k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.37)$$

Отсюда можно найти зависимости

$$a_{\Pi} = a_{\Pi}(k), \quad \omega_{\Pi} = \omega_{\Pi}(k)$$

и построить их, например, в виде графиков рис. 18.5, а, б. На основании этих графиков можно будет выбирать параметр k так, чтобы амплитуда автоколебаний была достаточно малой, чтобы частота их не была опасной для данной системы или же, наконец, чтобы автоколебаний не было вовсе ($k < k_{\text{гр}}$).

Кроме того, с помощью тех же уравнений (18.36) можно строить линии равных значений амплитуды и частоты автоколебаний на плоскости двух каких-либо параметров системы, например k и T . Для этого уравнения (18.36) записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} X(\omega_{\Pi}, a_{\Pi}, k, T) &= 0, \\ Y(\omega_{\Pi}, a_{\Pi}, k, T) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.38)$$

Зададимся различными числовыми значениями амплитуды a_{Π} и получим для каждого из них по уравнениям (18.38) зависимости

$$k = k(\omega_{\Pi}) \text{ и } T = T(\omega_{\Pi}).$$

После этого, меняя ω_{Π} , можно построить по точкам соответствующие кривые $a_{\Pi} = \text{const}$ в координатах (k, T) , как показано сплошными линиями на рис. 18.5, в. На этих кривых получаются отметки частот ω_{Π} , которые также можно соединить (пунктирные кривые).

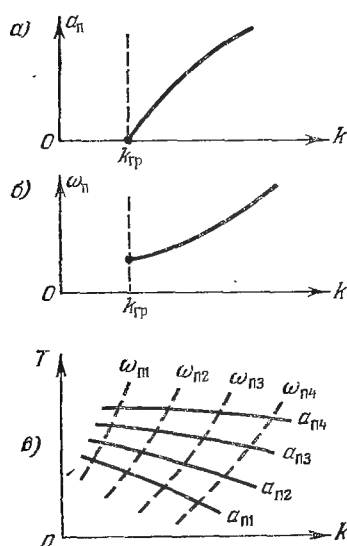


Рис. 18.5.

График рис. 18.5, в позволяет выбирать значения двух параметров $(k \text{ и } T)$ нелинейной системы. Если такие графики построить для различных возможных структурных схем системы, то можно будет выбирать также и наиболее выгодную структурную схему проектируемой замкнутой автоматической системы с учетом нелинейностей.

Использование графиков коэффициентов гармонической линеаризации. Во многих задачах коэффициенты q и q' , входящие в уравнение (18.34), сложно зависят от амплитуды a , а в ряде случаев и от частоты ω . В таких случаях удобнее указанное уравнение записывать в виде

$$Q(j\omega) + R(j\omega)(q + jq') = 0, \quad (18.39)$$

не подставляя зависимости q и q' от a и ω . Тогда вместо уравнений (18.36) получим для определения периодического решения уравнения:

$$X(\omega, q, q') = 0, \quad Y(\omega, q, q') = 0. \quad (18.40)$$

Для общего случая задач, в которых каждый из коэффициентов гармонической линеаризации q и q' зависит сложным образом от обеих неизвестных a и ω , т. е.

$$q = q(a, \omega), \quad q' = q'(a, \omega), \quad (18.41)$$

можно применить следующий прием решения.

Задаваясь различными значениями a и ω , построим по формулам (18.41) две серии кривых: $q(\omega)$ и $q'(\omega)$ при разных $a = \text{const}$ (рис. 18.6). Затем из уравнений (18.40) выразим

$$q = Z_1(\omega), \quad q' = Z_2(\omega) \quad (18.42)$$

и эти две кривые нанесем на тех же графиках. Теперь остается на этих двух кривых найти такие точки C и B , в которых кривые $Z_1(\omega)$ и $Z_2(\omega)$ пересекают линии с одинаковыми значениями a при одном и том же значении ω . Полученные величины a и ω будут решением задачи, т. е. амплитудой a_{Π} и частотой ω_{Π} искомого периодического решения.

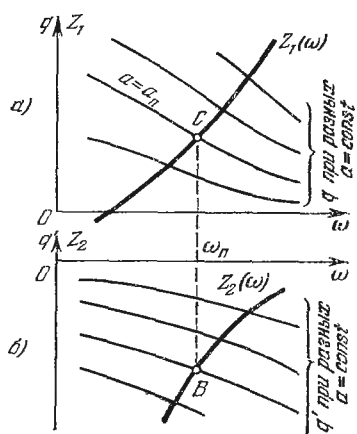


Рис. 18.6.

Во многих встречающихся на практике задачах вместо (18.41) будет

$$q = q(a) \text{ и } q' = q'(a). \quad (18.43)$$

Тогда кривые q и q' на рис. 18.6 для разных амплитуд будут иметь вид горизонтальных прямых линий.

В простейшем случае, когда в системе имеется однозначная нечетно-симметричная нелинейность $F(x)$, для которой $q = q(a)$ и $q' = 0$, из уравнений (18.40) можно найти

$$q(a) = Z(\omega). \quad (18.44)$$

Тогда, исключив q из уравнений (18.40), найдем частоту $\omega = \omega_n$ как функцию параметров системы. Затем, изобразив график зависимости $q(a)$ (рис. 18.7), проведем на нем согласно (18.44) горизонтальные линии $q = Z(\omega)$ для разных постоянных значений $\omega = \omega_n$, т. е. для разных соотношений параметров системы. Точки пересечения этих прямых ($\omega = \omega_n$) с кривой $q(a)$ (например, на рис. 18.7 точки a_{n1} и a_{n2}) определяют в каждом случае амплитуды периодических решений. Если пересечений нет, то и периодических решений в системе не будет. В простейших случаях уравнение (18.44) решается аналитически.

Графический способ. Для гармонически линеаризованного характеристического уравнения (18.33) можно написать выражение кривой Михайлова

$$D(j\tilde{\omega}) = Q(j\tilde{\omega}) + R(j\tilde{\omega}) \left[q(a, \omega) + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} j\tilde{\omega} \right], \quad (18.45)$$

где знак $\sim$ введен, чтобы отличать текущий параметр $\tilde{\omega}$, изменяющийся вдоль кривой Михайлова, от частоты ω , входящей в выражение гармонической линеаризации нелинейности.

Тогда при любых заданных постоянных a и ω кривая Михайлова будет иметь такой же вид, как для обыкновенных линейных систем. Искомое периодическое решение $x_1 = a_n \sin \omega_n t$, т. е. неизвестные a_n и ω_n , определяются прохождением кривой Михайлова через начало координат (рис. 18.8, а).

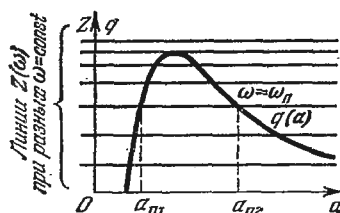


Рис. 18.7.

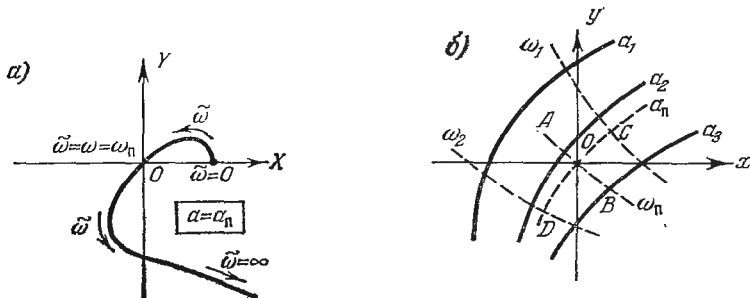


Рис. 18.8.

Поскольку в точке прохождения кривой Михайлова через начало координат текущее значение $\tilde{\omega}$ должно совпадать со значением $\omega = \omega_n$, входящим в коэффициенты гармонической линеаризации, то для удобства решения можно заранее отождествить в выражении (18.45) значения $\tilde{\omega}$ и ω . Тогда искомые частоту $\omega = \omega_n$ и амплитуду $a = a_n$ автоколебаний можно будет определить путем построения кривых

$$f(\omega) = Q(j\omega) + R(j\omega) [q(a, \omega) + jq'(a, \omega)], \quad (18.46)$$

которые в общем случае не будут совпадать с кривыми Михайлова. При этом надо выбрать такое значение a , при котором кривая пройдет через начало координат.

Если например, для каких-нибудь трех различных значений a кривые $f(\omega)$ проходят указанным на рис. 18.8, б образом, то искомые значения $a = a_{\Pi}$ и $\omega = \omega_{\Pi}$ можно найти путем следующей интерполяции:

$$a_{\Pi} = a_2 + \frac{AO}{AB} (a_3 - a_2), \quad \omega_{\Pi} = \omega_1 + \frac{CO}{CD} (\omega_2 - \omega_1).$$

Этот способ целесообразен лишь в самых сложных случаях, когда изложенные выше способы не удастся применить.

Использование коэффициентных соотношений для определения периодического решения. Для обнаружения факта наличия пары чисто мнимых корней в характеристическом уравнении (18.33) можно также применить известные алгебраические критерии устойчивости линейных систем. Так, если гармонически линеаризованное уравнение (18.33) нелинейной системы имеет третью степень относительно p , то его можно записать в виде

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0, \quad (18.47)$$

причем коэффициенты его будут содержать в себе искомые значения частоты ω_{Π} и амплитуды a_{Π} автоколебаний.

Условие наличия пары чисто мнимых корней по критерию Гурвица (см. § 6.2) будет

$$a_1 a_2 = a_0 a_3, \quad (18.48)$$

оно дает только одно уравнение с двумя неизвестными a_{Π} и ω_{Π} . Чтобы найти второе, представим уравнение (18.47) при наличии мнимых корней $p = \pm j\omega_{\Pi}$ в виде

$$(p^2 + \omega_{\Pi}^2) (a_0 p + b) = 0.$$

Раскрыв здесь скобки и приравняв коэффициенты этого уравнения соответствующим коэффициентам (18.47), найдем

$$a_0 \omega_{\Pi}^2 = a_2. \quad (18.49)$$

Из двух уравнений (18.48) и (18.49) определяются неизвестные амплитуда a_{Π} и частота ω_{Π} автоколебаний, входящие в состав коэффициентов (18.47). При этом точно так же, как в основном способе, здесь на основании уравнений (18.48) и (18.49) можно строить графики зависимостей a_{Π} и ω_{Π} от одного параметра системы или на плоскости двух параметров с целью их выбора.

Если гармонически линеаризованное уравнение (18.33) нелинейной системы имеет четвертую степень относительно p :

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0, \quad (18.50)$$

то условие наличия пары чисто мнимых корней согласно § 6.2 будет

$$a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 = 0. \quad (18.51)$$

Кроме того, записывая уравнение (18.50) в виде

$$(p^2 + \omega_{\Pi}^2) (a_0 p^2 + b_1 p + b_2) = 0,$$

раскрывая здесь скобки и приравнивая полученные коэффициенты соответствующим коэффициентам (18.50), находим

$$a_1 \omega_{\Pi}^2 = a_3. \quad (18.52)$$

С помощью двух уравнений (18.51) и (18.52) решаются все вышеуказанные задачи для нелинейной системы четвертого порядка.

Заметим, что для систем с нелинейностью вида $\dot{x}_2 = F(x_1)$ без гистерезисной петли частота ω не входит в коэффициенты характеристического урав-

нения. Поэтому из уравнения (18.48) или (18.51) сразу определяется амплитуда a_n , а затем из (18.49) или (18.52) — частота ω_n . Для систем с более сложными нелинейностями получаются два уравнения с двумя неизвестными.

Учет временного запаздывания в нелинейной системе. В нелинейной системе, как и в линейной, может иметься постоянное по времени запаздывание τ .

При этом уравнение линейной части (18.31) получит вид

$$Q(p)x_1 = -R(p)e^{-p\tau}x_2.$$

Выражение (18.34) при этом будет

$$Q(j\omega) + R(j\omega)(\cos \tau\omega - j \sin \tau\omega)(q + jq') = 0. \quad (18.53)$$

К уравнению (18.53) можно применить основной способ отыскания периодических решений или другой из изложенных выше.

Устойчивость периодических решений. Выше уже указывалось, что не всякое периодическое решение уравнений собственного движения нелинейной системы будет соответствовать автоколебаниям, а только устойчивое. В конкретных задачах часто из физических соображений бывает сразу видно, возникают автоколебания или нет. Поэтому иногда нет нужды в математическом исследовании устойчивости найденного периодического решения. Однако в ряде случаев все же приходится этот вопрос исследовать.

Задача исследования устойчивости периодического решения сводится, вообще говоря, к анализу линейного уравнения с периодическими переменными коэффициентами. А. М. Ляпуновым [82] разработаны соответствующие методы. Но их использование во многих случаях представляет пока еще большие трудности. Поэтому здесь строгое исследование устойчивости периодических решений излагаться не будет.

Опишем три приближенных способа исследования устойчивости периодического решения: 1) осреднение коэффициентов, 2) использование кривой Михайлова, 3) аналитический критерий.

Осреднение коэффициентов при исследовании устойчивости периодического решения. Запишем дифференциальное уравнение замкнутой системы в малых отклонениях Δx от исследуемого периодического решения: $x = a_n \sin \omega_n t$. Для линейной части системы на основании уравнения (18.31) получим

$$Q(p)\Delta x_1 = -R(p)\Delta x_2. \quad (18.54)$$

Уравнение нелинейного звена, например $x_2 = F(x_1, px_1)$, примет при этом для малых отклонений вид

$$\Delta x_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_n \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial px_1} \right)_n \Delta px_1 \quad (18.55)$$

(аналогично и для других типов нелинейных уравнений), где индекс «n» означает, что в частные производные нужно подставить $x_1 = a_n \sin \omega_n t$ и $px_1 = a_n \omega_n \cos \omega_n t$. Эти частные производные и являются периодическими переменными коэффициентами. В задачах теории регулирования они могут меняться как плавно, так и скачками (см. примеры в § 18.3). Осредним полученные периодические коэффициенты, после чего вместо (18.55) будем иметь линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\Delta x_2 = [\kappa(a_n, \omega_n) + \kappa_1(a_n, \omega_n)p] \Delta x_1, \quad (18.56)$$

где

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_n d\psi, \quad \kappa_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial px_1} \right)_n d\psi, \quad \psi = \omega_n t. \quad (18.57)$$

Характеристическое уравнение системы, определяющее устойчивость периодического решения, согласно (18.54) и (18.56) будет

$$Q(p) + R(p) [\kappa(a_n, \omega_n) + \kappa_1(a_n, \omega_n) p] = 0. \quad (18.58)$$

Если оно удовлетворяет линейному критерию устойчивости, то исследуемое периодическое решение устойчиво.

В случаях, когда нелинейное звено описывается уравнением вида $x_2 = F(x_1)$ (с гистерезисной петлей или без нее), осредненное характеристическое уравнение для исследования периодического решения будет

$$Q(p) + R(p) \kappa(a_n) = 0, \quad (18.59)$$

где

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_n d\psi, \quad \psi = \omega_n t. \quad (18.60)$$

Использование кривой Михайлова для исследования устойчивости периодического решения. Каждому конкретному значению a будет соответствовать определенная кривая Михайлова (18.45). При $a = a_n$ она пройдет через начало координат (рис. 18.9).

Для исследования устойчивости периодического решения с амплитудой $a = a_n$ дадим малое приращение амплитуде Δa . Тогда при $a = a_n + \Delta a$ кривая Михайлова займет либо положение 1, либо положение 2 (рис. 18.9). При этом, как известно из линейной теории (§ 6.3), кривая 1, охватывающая начало координат, соответствует затухающим колебаниям переходного процесса, а кривая 2 — расходящимся колебаниям.

Поэтому, если при $\Delta a > 0$ кривая Михайлова займет положение 1, а при $\Delta a < 0$ — положение 2, то переходный процесс в системе будет таким, что колебания с амплитудой, большей чем a_n , затухают, а колебания с амплитудой, меньшей чем a_n , расходятся.

Следовательно, переходный процесс с обеих сторон сходится к исследуемому периодическому процессу с амплитудой a_n . Это означает устойчивость последнего, т. е. в системе имеют место автоколебания. Если же при $\Delta a > 0$ получится кривая 2, а при $\Delta a < 0$ — кривая 1, то переходный процесс в обе стороны расходится, т. е. исследуемое периодическое решение неустойчиво (система устойчива в малом и неустойчива в большом, как на рис. 16.3, б).

Аналитический критерий устойчивости периодического решения. Развивая предыдущий способ, видим, что нет необходимости строить сами кривые Михайлова. Все исследование можно произвести аналитически. В самом деле, для того чтобы узнать, примет ли кривая Михайлова при $\Delta a > 0$ положение 1 (рис. 18.9), достаточно определить, куда будет перемещаться с увеличением a та точка кривой Михайлова ($\tilde{\omega} = \omega_n$), которая при $a = a_n$ находится в начале координат. Если она будет перемещаться по направлениям OA_1 , OA_2 или OA_3 (рис. 18.10, а), то периодический процесс с амплитудой $a = a_n$ устойчив, а если по направлениям OA_4 или OA_5 — неустойчив.

Это направление перемещения точки $\tilde{\omega} = \omega_n$ из начала координат с увеличением a определяется, очевидно, следующими проекциями на координатные оси X и Y :

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)_n \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right)_n, \quad (18.61)$$

где X и Y обозначают вещественную и мнимую части аналитического выражения кривой Михайлова, а индекс «п» означает подстановку $a = a_{\text{п}}$, $\tilde{\omega} = \omega_{\text{п}}$. Как видно из рис. 18.10, a , для устойчивости исследуемого периодического решения вектор, определяемый проекциями (18.61), должен лежать с определенной стороны от касательной MN к кривой Михайлова, направление которой в свою очередь определяется проекциями

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \tilde{\omega}}\right)_{\text{п}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial \tilde{\omega}}\right)_{\text{п}}. \quad (18.62)$$

Из расположения вектора с проекциями (18.61) по отношению к вектору с проекциями (18.62) и видна непосредственно устойчивость или неустойчивость данного периодического решения с амплитудой $a_{\text{п}}$.

На рис. 18.10, б и в показаны те же векторы, что и на рис. 18.10, а, но для других видов кривых Михайлова. Видно, что во всех случаях для устойчивости исследуемого периодического решения требуется, чтобы вектор

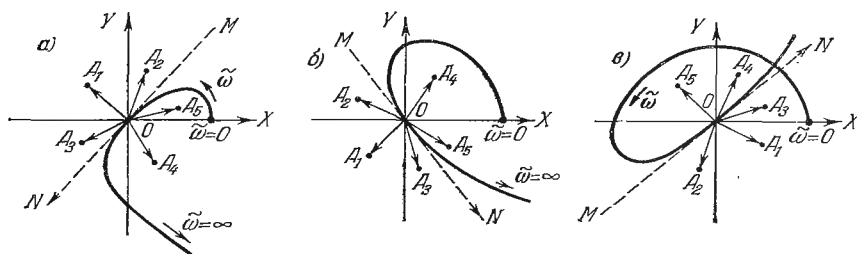


Рис. 18.10.

с проекциями (18.61) лежал справа от касательной MN , если смотреть вдоль кривой Михайлова в сторону возрастания $\tilde{\omega}$, причем направление касательной MN определяется вектором с проекциями (18.62). Это геометрическое условие устойчивости периодического решения можно записать в следующем аналитическом виде:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)_{\text{п}} \left(\frac{\partial Y}{\partial \tilde{\omega}}\right)_{\text{п}} - \left(\frac{\partial X}{\partial \tilde{\omega}}\right)_{\text{п}} \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)_{\text{п}} > 0, \quad (18.63)$$

или иначе:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\partial X}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial a}\right)_{\text{п}} \left(\frac{\partial Y}{\partial \tilde{\omega}}\right)_{\text{п}} - \left(\frac{\partial X}{\partial \tilde{\omega}}\right)_{\text{п}} \left(\frac{\partial Y}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\partial Y}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial a}\right)_{\text{п}} > 0.$$

Здесь важно, что частные производные берутся не по частоте ω , а по текущему параметру кривой Михайлова $\tilde{\omega}$, т. е. имеются в виду выражения X и Y не в форме (18.35), а как вещественная и мнимая части выражения (18.45) в функции от $\tilde{\omega}$ при $\omega = \text{const}$ (если она входит в коэффициенты, стоящие в квадратных скобках этого выражения).

Выполнение условия (18.63) устойчивости периодического решения во всякой конкретной задаче можно проверить аналитически, без построения кривых. Этого достаточно для систем третьего и четвертого порядков, если все коэффициенты гармонически линеаризованного характеристического уравнения положительны. Для систем же пятого и более высокого порядков требуется дополнительно проверить общий ход кривой Михайлова, чтобы убедиться, что имеет место случай, например, рис. 18.11, а, но не рис. 18.11, б. Заметим, что вместо построения кривой Михайлова можно и тут воспользоваться аналитическим дополнительным условием, потребовав

выполнения критерия Гурвица для многочлена

$$D_1(p) = \frac{D(p)}{p^2 - \omega_{\Pi}^2}, \quad (18.64)$$

где $D(p)$ — левая часть гармонически линеаризованного характеристического уравнения (18.33) при $a = a_{\Pi}$ и $\omega = \omega_{\Pi}$. При этом если $D(p)$ имеет пятую или шестую степень, достаточно убедиться в положительности коэффициентов $D_1(p)$.

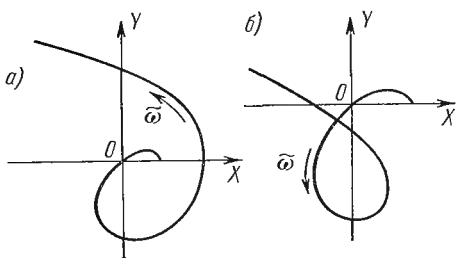


Рис. 18.11.

Устойчивость равновесного состояния системы. Приведенные в начале данного параграфа гармонически линеаризованные уравнения нелинейной системы годятся только для колебательных процессов, определяемых периодическими решениями, и для колебательных переходных процессов в непосредственной близости от указанных периодических решений. Поэтому, стро-

го говоря, с помощью этих приближенных уравнений можно анализировать только сами периодические решения и их устойчивость или неустойчивость при малых отклонениях от исследуемого колебательного режима, что выше и делалось.

Практически же из анализа полученных приближенных уравнений нелинейной системы часто можно делать значительно более широкие выводы. В частности, можно оценивать устойчивость системы в тех областях ее параметров, в которых периодические решения отсутствуют вовсе.

Пусть, например, определено, что периодическое решение, амплитуда которого показана на рис. 18.5, a , устойчиво (оно соответствует автоколебаниям). Условимся факт устойчивости периодического решения обозначать

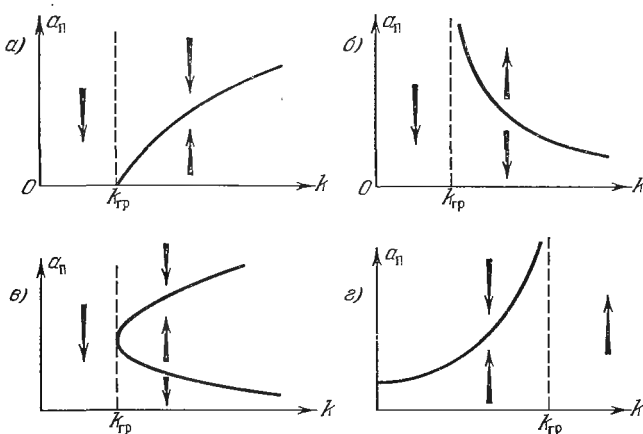


Рис. 18.12.

на графике вертикальными стрелками, сходящимися к данному периодическому решению (рис. 18.12, a). Этим обозначением иллюстрируется то, что переходные процессы с обеих сторон (т. е. с большими, чем a_{Π} , и с меньшими, чем a_{Π} , начальными амплитудами) сходятся к автоколебательному процессу с амплитудой a_{Π} . Пусть в данном случае k обозначает коэффициент усиления регулятора. График рис. 18.12, a показывает, что в системе возникают автоколебания при $k > k_{\text{гр}}$. Естественно сделать отсюда вывод о том, что в обла-

сти $0 < k < k_{\text{гр}}$ (где нет периодического решения) данная система регулирования будет устойчива, что также обозначено на рис. 18.12, *а* вертикальной стрелкой.

Аналогичное заключение для области $0 \leq k \leq k_{\text{гр}}$ можно сделать и в случае неустойчивого периодического решения на рис. 18.12, *б*, и в случае наличия двух периодических решений на рис. 18.12, *в*, одно из которых устойчиво, другое неустойчиво. Если же автоколебания наблюдаются в области $0 \leq k \leq k_{\text{гр}}$, как показано на рис. 18.12, *г*, то естественно предположить, что область $k > k_{\text{гр}}$ будет областью неустойчивости данной нелинейной системы.

Наконец, если периодических решений для исследуемой нелинейной системы не получается вовсе ни при каких значениях ее параметров, то согласно геометрическому способу определения автоколебаний (см. выше) получим, что кривая Михайлова будет либо охватывать начало координат при всяком значении a , либо не охватывать его при всех a . Отсюда можно сделать вывод, что в первом случае данная нелинейная система устойчива, а во втором — неустойчива.

Развитие, а также сравнение данного способа определения устойчивости равновесия нелинейной системы с методом Ляпунова, показывающее эффективность такого способа, см. в книге [100], §§ 2.7—2.9.

§ 18.3. Примеры исследования нелинейных систем первого класса

Рассмотрим несколько примеров применения изложенного в предыдущем параграфе метода.

Пример 1. Найдем влияние ограничения линейной характеристики двигателя (рис. 18.13, *а*) на процессы в следящей системе. Пусть остальные

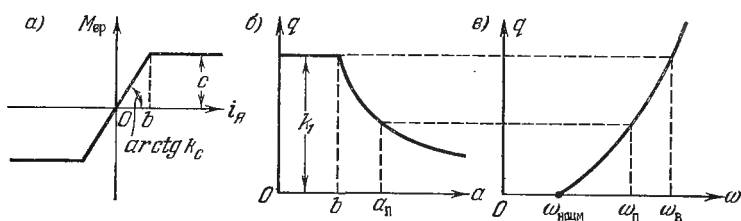


Рис. 18.13.

звенья системы линейны. Тогда уравнение управляемого объекта с двигателем вместо (16.63) примет вид

$$(T_{op} + 1) p\beta = c'F(i_{\text{дв}}),$$

где $F(i_{\text{дв}})$ определяется графиком рис. 18.13, *а*. Применяя к правой части этого уравнения формулы гармонической линеаризации (18.22) с заменой $c = bk_c$, получаем уравнение управляемого объекта с двигателем в виде

$$(T_{op} + 1) p\beta = q(a) i_{\text{дв}}, \quad (18.65)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q &= k_1 = c'k_c \quad \text{при } a \leq b, \\ q &= \frac{2}{\pi} k_1 \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \quad \text{при } a > b, \end{aligned} \right\} \quad (18.66)$$

что изображено графически на рис. 18.13, *б*. Здесь a обозначает амплитуду колебаний величины $i_{\text{дв}}$.

Общее уравнение остальной части следящей системы согласно (16.53) будет

$$(T_{\text{в}p} + 1) i_{\text{н}} = -[k + (T_{\text{в}p} + 1) k_6 p] \beta. \quad (18.67)$$

На основании (18.65) и (18.66) получаем характеристическое уравнение

$$(T_{\text{o}p} + 1) (T_{\text{в}p} + 1) p + q(a) [k + (T_{\text{в}p} + 1) k_6 p] = 0. \quad (18.68)$$

После приведения его левой части к виду $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$ и подстановки $p = j\omega$ получаем уравнения типа (18.36) в виде

$$\left. \begin{aligned} X &= kq(a_{\text{н}}) - [T_{\text{o}} + T_{\text{в}} + T_{\text{в}} k_6 q(a_{\text{н}})] \omega_{\text{н}}^2 = 0, \\ Y &= [1 + k_6 q(a_{\text{н}})] \omega_{\text{н}} - T_{\text{o}} T_{\text{в}} \omega_{\text{н}}^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.69)$$

Выясним влияние параметра k (общего коэффициента усиления) на автоколебания в данной системе. Из последнего уравнения находим

$$q(a_{\text{н}}) = \frac{T_{\text{o}} T_{\text{в}} \omega_{\text{н}}^2 - 1}{k_6}, \quad (18.70)$$

а из первого

$$k = \left[\frac{T_{\text{o}} + T_{\text{в}}}{q(a_{\text{н}})} + T_{\text{в}} k_6 \right] \omega_{\text{н}}^2. \quad (18.71)$$

Формула (18.70) дает график, изображенный на рис. 18.13, *в*, где

$$\omega_{\text{наим}} = \frac{1}{\sqrt{T_{\text{o}} T_{\text{в}}}}, \quad \omega_{\text{в}} = \sqrt{\frac{1 + k_1 k_6}{T_{\text{o}} T_{\text{в}}}}. \quad (18.72)$$

Графики на рис. 18.13, *б* и *в* определяют связь между амплитудой $a_{\text{н}}$ и частотой $\omega_{\text{н}}$ периодического решения в данной системе.

Найдем зависимость амплитуды $a_{\text{н}}$ от величины параметра k . Для этого,

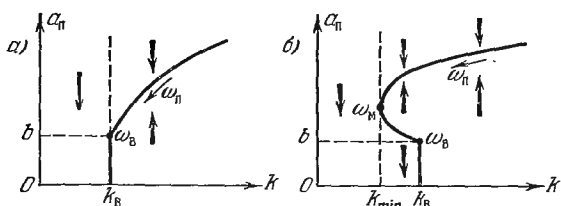


Рис. 18.14.

задаваясь различными $\omega_{\text{н}}$, будем брать из графика рис. 18.13 соответствующие значения $a_{\text{н}}$, а по формуле (18.71) вычислять k . В результате получим график $a_{\text{н}}(k)$ типа рис. 18.14, *а* или *б*. Чтобы определить, в каких случаях каждый из них имеет место, найдем k_{min} .

Дифференцируя (18.71) по $\omega_{\text{н}}$ с учетом (18.70) и приравнявая результат нулю, получаем соответствующее значение $\omega_{\text{м}}$ в виде

$$\omega_{\text{м}}^2 = \frac{1}{T_{\text{o}} T_{\text{в}}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{T_{\text{o}}}{T_{\text{в}}}} \right), \quad (18.73)$$

причем k_{min} определяется подстановкой $\omega_{\text{м}}$ в (18.70) и (18.71), а именно:

$$k_{\text{min}} = \frac{k_6}{T_{\text{в}}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{T_{\text{o}}}{T_{\text{в}}}} \right). \quad (18.74)$$

Очевидно, что если $\omega_{\text{м}} > \omega_{\text{в}}$, то k_{min} не существует и имеет место первый случай (рис. 18.14, *а*), а при $\omega_{\text{м}} < \omega_{\text{в}}$ — второй (рис. 18.14, *б*). Сравнивая (18.73) и (18.72), приходим к выводу, что для системы, параметры которой удовлетворяют условию

$$k_1 k_6 \leq \sqrt{1 + \frac{T_{\text{o}}}{T_{\text{в}}}}, \quad (18.75)$$

справедлив график на рис. 18.14, а, а для системы с параметрами

$$k_1 k_6 > \sqrt{1 + \frac{T_0}{T_B}} \quad (18.76)$$

— на рис. 18.14, б.

Исследуем устойчивость найденного периодического решения по критерию (18.63). Согласно (18.66) частота ω не входит в коэффициенты. Поэтому в выражении (18.45) для кривой Михайлова функции $X(\tilde{\omega})$ и $Y(\tilde{\omega})$ совпадают с (18.69).

Найдем производные:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial \tilde{\omega}} \right)_{\Pi} &= -2[T_0 + T_B + T_B k q(a_{\Pi})] \omega_{\Pi} = -2T_0 \omega_{\Pi} (1 + T_B^2 \omega_{\Pi}^2) < 0, \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial \tilde{\omega}} \right)_{\Pi} &= 1 + k_6 q(a_{\Pi}) - 3T_0 T_B \omega_{\Pi}^2 = -2T_0 T_B \omega_{\Pi}^2 < 0, \\ \left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)_{\Pi} &= (k - T_B k_6 \omega_{\Pi}^2) \left(\frac{dq}{da} \right)_{\Pi} = \frac{(T_0 + T_B) \omega_{\Pi}^2}{q(a_{\Pi})} \left(\frac{dq}{da} \right)_{\Pi} < 0, \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right)_{\Pi} &= k_6 \omega_{\Pi} \left(\frac{dq}{da} \right)_{\Pi} < 0, \end{aligned} \right\} \quad (18.77)$$

так как согласно рис. 18.13, б производная dq/da отрицательна.

Легко проверить, что при $\omega > \omega_m$, где ω_m определяется формулой (18.73), критерий (18.63) удовлетворяется, а при $\omega < \omega_m$ не удовлетворяется. Отсюда делаем заключение, что все периодические решения на рис. 18.14, а устойчивы (т. е. соответствуют автоколебаниям). Вертикальными стрелками там показано, что переходные процессы с большими и меньшими амплитудами сходятся к данному периодическому процессу. На рис. 18.14, б только верхняя ветвь кривой (выше точки ω_m) соответствует устойчивым периодическим решениям, т. е. автоколебаниям, а нижняя ($\omega_m \div \omega_B$) — неустойчивым.

Как уже отмечалось, через a_{Π} здесь обозначена амплитуда колебаний величины i_{Π} . Чтобы узнать амплитуду a_{β} автоколебаний регулируемой величины β , надо воспользоваться уравнением (18.65), откуда

$$a_{\beta} = \frac{q(a_{\Pi})}{\omega_{\Pi} \sqrt{T_0^2 \omega_{\Pi}^2 + 1}} a_{\Pi} = \frac{T_0 T_B \omega_{\Pi}^2 - 1}{k_6 \omega_{\Pi} \sqrt{T_0^2 \omega_{\Pi}^2 + 1}} a_{\Pi} \quad (18.78)$$

как модуль соответствующей передаточной функции при $p = j\omega_{\Pi}$, умноженный на a_{Π} . При этом величины a_{Π} и ω_{Π} определяются графиком рис. 18.14, а или б.

Учитывая, что $q(a) = k_1$ при $a = b$ (см. рис. 18.13, б), найдем по формуле (18.71) с подстановкой $\omega_{\Pi} = \omega_B$ из (18.72) величину k_B , отмеченную на рис. 18.14:

$$k_B = \left(\frac{T_0 + T_B}{k_1} + T_B k_6 \right) \frac{1 + k_1 k_6}{T_0 T_B}. \quad (18.79)$$

Точно такое же значение k является границей устойчивости для линейной системы, когда уравнение управляемого объекта с двигателем вместо (18.65) имеет линейный вид $(T_{1p} + 1)p\beta = k_1 i_{\Pi}$. Отсюда можно сделать вывод о том, что в случае (18.75), для которого имеет место график рис. 18.14, а, данная нелинейная система сохраняет устойчивость в той же области, что и линейная система, но она обладает еще установившимся автоколебательным режимом там, где линейная система неустойчива. Следовательно, ограничение линейной характеристики типа насыщения в двигателе (рис. 18.13, а) препятствует раскачиванию системы, которое получается при $k > k_B$ в линейной системе. Это наблюдается и на практике.

В случае же (18.76), для которого график, определяющий автоколебания, имеет вид рис. 18.14, б, автоколебания могут уже появиться при $k < k_B$ (но $> k_M$), т. е. раньше наступления границы устойчивости линейной системы. Но в этом случае, как видно из рис. 18.14, б, при малых начальных амплитудах переходного процесса (ниже кривой $\omega_M \omega_B$) сохраняется еще

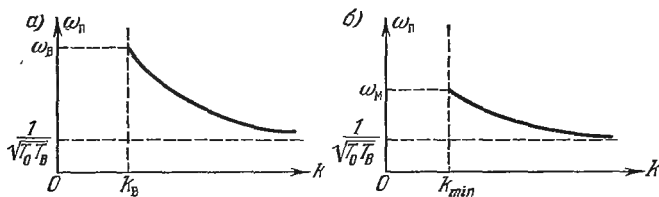


Рис. 18.15.

устойчивость равновесного состояния. Здесь в области параметров $k_M < k < k_B$ (рис. 18.14, б) имеется как бы два предельных цикла (рис. 16.14, в), а в области $k_B < k < \infty$ — один.

Случай, изображенный на рис. 18.14, б, называется «жестким возбуждением» автоколебаний. Такое возбуждение автоколебаний раньше наступления границы устойчивости возможно, как видно из (18.76), только при достаточно большом k_B , который, по существу, является коэффициентом гибкой обратной связи. При отсутствии такой связи указанное явление не имело бы места.

На рис. 18.15, а и б даны графики для величины частоты автоколебаний ω_n в зависимости от параметра k соответственно для случаев, изображенных на рис. 18.14, а и б.

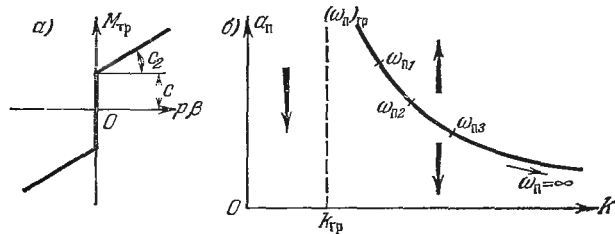


Рис. 18.16.

Пример 2. Рассмотрим теперь следующую систему с линейной характеристикой привода, но учтем сухое трение совместно с линейным (рис. 18.16, а). Уравнение управляемого объекта с двигателем имеет при этом вид (16.52). Здесь возможны два случая: 1) колебания без остановок, когда обеспечиваются условия первого из уравнений (16.52); 2) колебания с остановками, когда действуют попеременно оба уравнения (16.52). Рассмотрим первый случай и определим условия его существования.

Итак, записываем первое из уравнений (16.52), поделив его на c_2 , в виде

$$\left. \begin{aligned} T_0 p^2 \beta + p \beta + k_7 \operatorname{sign} p \beta &= k_1 i_n, & k_7 &= \frac{c}{c_2}, \\ k_1 &= \frac{c_1}{c_2}, & T_0 &= \frac{J}{c_2}, \end{aligned} \right\} \quad (18.80)$$

с условием, что

$$|i_n| > \frac{k_7}{k_1} \text{ при } p \beta = 0. \quad (18.81)$$

Обозначим $x = p \beta$. Тогда это уравнение будет

$$(T_0 p + 1) x + F(x) = k_1 i_n, \quad (18.82)$$

где

$$F(x) = k_7 \operatorname{sign} x. \quad (18.83)$$

Поскольку движение предполагается без остановок, то нелинейную функцию (18.83) подвергаем гармонической линейаризации, как релейную характеристику, и на основании формулы (18.18), полагая $x = a \sin \omega t$, получаем

$$F(x) \approx \frac{4k_7}{\pi a} x, \quad (18.84)$$

где a — амплитуда колебаний скорости $x = p\beta$. Амплитуда колебаний самого угла β при этом, очевидно, будет

$$a_\beta = \frac{a}{\omega} \quad \left(\beta = -\frac{a}{\omega} \cos \omega t \right).$$

Выражение (18.84) представляет собой известную формулу линейаризации сухого трения с помощью вибраций. Найдем условия, при которых она здесь справедлива. Согласно (18.81) и (18.82) имеем

$$|i_N|_{p\beta=0} = \left| \frac{T_0 p x}{k_1} \right|_{x=0} = \left| \frac{T_0 a \omega \cos \omega t}{k_1} \right|_{\sin \omega t=0} = \frac{T_0 a \omega}{k_1} > \frac{k_7}{k_1},$$

откуда

$$a \omega > \frac{k_7}{T_0} \quad \text{или} \quad a_\beta \omega^2 > \frac{k_7}{T_0}, \quad (18.85)$$

что и является условием, при котором справедливо дальнейшее решение. Характеристическое уравнение всей замкнутой системы согласно (18.82), (18.84) и (16.53) получает вид

$$(T_{\text{в}p} + 1) \frac{4k_7}{\pi a} p + k_1 (T_{\text{в}p} + 1) k_{\text{в}p} + k_1 k + (T_{\text{о}p} + 1) (T_{\text{в}p} + 1) p = 0.$$

После подстановки $p = j\omega$ получаем

$$\left. \begin{aligned} X &= k_1 k - \left(\frac{4k_7}{\pi a} T_{\text{в}} + k_1 k_{\text{в}} T_{\text{в}} + T_{\text{в}} + T_{\text{о}} \right) \omega^2 = 0, \\ Y &= \left(\frac{4k_7}{\pi a} + k_1 k_{\text{в}} + 1 \right) \omega - T_{\text{о}} T_{\text{в}} \omega^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.86)$$

Чтобы исследовать влияние коэффициента k на динамику системы, выразим из этих двух уравнений величины k и a_{Π} через ω_{Π} :

$$k = \frac{T_{\text{о}} \omega_{\Pi}^2}{k_1} (T_{\text{в}}^2 \omega_{\Pi}^2 + 1), \quad a_{\Pi} = \frac{4k_7}{\pi (T_{\text{о}} T_{\text{в}} \omega_{\Pi}^2 - 1 - k_1 k_{\text{в}})}. \quad (18.87)$$

Заметим, что $a_{\Pi} = \infty$ при

$$(\omega_{\Pi})_{\text{гр}}^2 = \frac{1 + k_1 k_{\text{в}}}{T_{\text{о}} T_{\text{в}}}, \quad k_{\text{гр}} = \frac{1 + k_1 k_{\text{в}}}{k_1} \left(\frac{1 + k_1 k_{\text{в}}}{T_{\text{о}}} + \frac{1}{T_{\text{в}}} \right). \quad (18.88)$$

Изменяя ω_{Π} в интервале $(\omega_{\Pi})_{\text{гр}} \leq \omega_{\Pi} \leq +\infty$, строим по формулам (18.87) график $a_{\Pi} = f(k)$, представленный на рис. 18.16, б. Условие, при котором справедливо это решение, было выражено неравенством (18.85). Подставив в него значения $a = a_{\Pi}$ и $\omega = \omega_{\Pi}$ из (18.87), приводим его к виду

$$\frac{4 \sqrt{2 T_{\text{о}} b}}{\pi [b - 2 T_{\text{в}} (1 + k_1 k_{\text{в}})]} > 1, \quad (18.89)$$

где

$$b = \sqrt{T_{\text{о}}^2 + 4 k_1 k T_{\text{о}} T_{\text{в}}^2} - T_{\text{о}}.$$

Для исследования устойчивости найденного периодического решения на основании (18.86) находим

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)_{\Pi} > 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right)_{\Pi} < 0, \quad \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)_{\Pi} < 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)_{\Pi} < 0.$$

Критерий (18.63) при этом не выполняется, что означает неустойчивость

найденного периодического решения. Это и показано условно вертикальными стрелками на рис. 18.16, б.

Легко проверить, что значение $k_{\text{гр}}$ (18.88) совпадает с границей устойчивости линейной системы без сухого трения. Следовательно, добавление сухого трения несколько расширяет область устойчивости системы, но весьма своеобразно, а именно: неустойчивость найденного периодического решения означает, что при $k > k_{\text{гр}}$ и при выполнении условия (18.89) система может быть устойчивой в малом (при начальных условиях, которые дают начальную амплитуду собственных колебаний системы в переходном процессе, лежащую ниже кривой на рис. 18.16, б). Однако система неустойчива в большом (при начальных амплитудах собственных колебаний выше этой кривой). Последнее можно объяснить физически тем, что при больших амплитудах и соответственно при больших скоростях движения демпфирующее влияние силы сухого трения, которая сохраняет одну и ту же величину при любой скорости, становится несущественным, вследствие чего система оказывается неустойчивой, как и при отсутствии сухого трения.

При невыполнении условия (18.89) требуется исследование обоих уравнений (16.52) совместно (это будет уже нелинейность второго класса, так как она затрагивает обе величины: входную i_n и выходную β). При этом

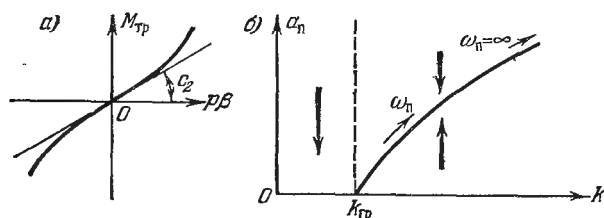


Рис. 18.17.

колебания угла β будут происходить с остановками. Это — задача более сложная.

Пример 3. Пусть теперь в той же системе действует не сухое трение, а сопротивление движению объекта, пропорциональное квадрату скорости, с

линейной составляющей рис. 18.17, а. Уравнение управляемого объекта с двигателем имеет в этом случае вид (16.63). Перепишем здесь его иначе по аналогии с предыдущим примером:

$$(T_0 p + 1)x + F(x) = k_1 i_n, \quad x = p\beta, \quad (18.90)$$

где

$$T_0 = \frac{J}{c_2}, \quad k_1 = \frac{c_1}{c_2}, \quad F(x) = k_8 x^2 \operatorname{sign} x, \quad k_8 = \frac{c_3}{c_2}.$$

Полагая $x = a \sin \omega t$, по формулам гармонической линеаризации (18.10) получаем

$$q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} k_8 a^2 \sin^2 \psi (\operatorname{sign} \sin \psi) \sin \psi d\psi = \\ = \frac{1}{\pi a} \int_0^{\pi} k_8 a^2 \sin^3 \psi d\psi - \frac{1}{\pi a} \int_{\pi}^{2\pi} k_8 a^2 \sin^3 \psi d\psi = \frac{8k_8 a}{3\pi}.$$

Следовательно,

$$\dot{F}(x) \approx \frac{8k_8 a}{3\pi} x.$$

Составив, как и раньше, характеристическое уравнение, приходим к выражениям:

$$\left. \begin{aligned} X &= k_1 k - \left(T_0 + T_B + k_1 k_B T_B + \frac{8k_8 a}{3\pi} T_B \right) \omega^2 = 0, \\ Y &= \left(1 + k_1 k_B + \frac{8k_8 a}{3\pi} \right) \omega - T_0 T_B \omega^3 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (18.91)$$

откуда находим:

$$k = \frac{T_0 \omega_{\Pi}^2}{k_1} (T_0^2 \omega_{\Pi}^2 + 1), \quad a_{\Pi} = \frac{3\pi}{8k_8} (T_0 T_0 \omega_{\Pi}^2 - 1 - k_1 k_6). \quad (18.92)$$

Граничные значения ω_{Π} и k совпадают здесь с прежними (18.88), но они соответствуют уже не $a_{\Pi} = \infty$, а $a_{\Pi} = 0$. В результате получаем график для определения амплитуды и частоты периодического решения, изображенный на рис. 18.17, б.

Поскольку здесь

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)_{\Pi} < 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right)_{\Pi} > 0, \quad \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)_{\Pi} < 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)_{\Pi} < 0,$$

то критерий (18.63) выполняется. Поэтому найденное периодическое решение устойчиво. Следовательно, квадратичное трение приводит к автоколебаниям в той области параметров, где система без этого добавочного трения была бы неустойчивой. Это объясняется усилением демпфирующего действия квадратичной силы трения при увеличении амплитуды (и скорости) колебаний, что препятствует неограниченному раскачиванию системы. Заметим, что переход закона сопротивления движению объекта от линейного к квадратичному при больших скоростях отражает реальные явления.

Амплитуда и частота автоколебаний определяются здесь графиком рис. 18.17, б или формулами (18.92), причем амплитуда колебаний угла β будет $a_{\beta} = a_{\Pi}/\omega_{\Pi}$.

Пример 4. Пусть в той же следящей системе требуется учесть влияние зазора в механической передаче между двигателем и управляемым объектом (схематически он показан на рис. 16.20) при линейной характеристике двигателя и при линейном трении. В колебательных процессах, которые здесь рассматриваются, зависимость между углами поворота β (после зазора) и β_1 (до зазора) будет иметь нелинейный вид, показанный на рис. 16.20, б, где b — половина ширины зазора. Кроме этой нелинейной зависимости здесь присутствует вторая нелинейность (16.54). Полагая, что момент инерции управляемого объекта J_1 велик по сравнению с приведенным моментом инерции двигателя, будем считать в уравнении (16.54) $T_1 = 0$.

Первая нелинейность (рис. 16.20, б) после гармонической линеаризации при $\beta_1 = a \sin \omega t$ согласно формуле (18.30) принимает вид

$$\beta = \left[q(a) - \frac{q'(a)}{\omega} p \right] \beta_1, \quad (18.93)$$

где $q(a)$ и $q'(a)$ определяются по формулам (18.27), в которых надо считать $k = 1$ (так как характеристика рис. 16.20, б имеет наклон 45°), а именно:

$$q = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \psi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \right), \quad q' = \frac{1}{\pi} \cos^2 \psi_1 = \frac{4b}{\pi a} \left(1 - \frac{b}{a} \right), \quad (18.94)$$

причем

$$\psi_1 = \arcsin \left(1 - \frac{2b}{a} \right). \quad (18.95)$$

Вторую нелинейность (16.54) запишем в виде $F(p^2 \beta_1, p \beta_1) = k_1 \tilde{x}_n$. Она подвергается гармонической линеаризации по формулам (18.11) также при $\beta_1 = a \sin \omega t$.

Зависимость между углами β_1 и β показана на рис. 18.18. При этом из нижнего графика и из формул (16.54) видно, что

$$F(p^2 \beta_1, p \beta_1) = T_0 p^2 \beta_1 + p \beta_1$$

при

$$0 < \psi < \frac{\pi}{2}, \quad \pi - \psi_1 < \psi < \frac{3\pi}{2}, \quad 2\pi - \psi_1 < \psi < 2\pi$$

и (учитывая, что $T_1 = 0$)

$$F(p^2 \beta_1, p \beta_1) = p \beta_1$$

при

$$\frac{\pi}{2} < \psi < \pi - \psi_1, \quad \frac{3\pi}{2} < \psi < 2\pi - \psi_1.$$

Условие отсутствия постоянной составляющей здесь выполняется, а третья из формул (18.11) принимает вид

$$q_1(a, \omega) = \frac{1}{\pi a} \left[\int_0^{2\pi} (a\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi + \int_0^{\pi/2} T_0(-a\omega^2 \sin \psi) \cos \psi d\psi + \right. \\ \left. + \int_{\pi-\psi_1}^{3\pi/2} T_0(-a\omega^2 \sin \psi) \cos \psi d\psi + \int_{2\pi-\psi_1}^{2\pi} T_0(-a\omega^2 \sin \psi) \cos \psi d\psi \right];$$

аналогично определяется и $q_2(a, \omega)$. Произведя интегрирование и сравнив результаты с выражениями (18.94), получаем

$$q_1(a, \omega) = \omega - q'(a) T_0 \omega^2,$$

где $q'(a)$ то же, что в формулах (18.94). В результате вместо нелинейного уравнения (16.54) при $T_1 = 0$ имеем

$$[q_2(a) T_0 p + 1 - q'(a) T_0 \omega] p \beta_1 = k_1 i_{\text{я}}, \quad (18.96)$$

где

$$q_2(a) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \psi_1 - \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \right),$$

причем $q'(a)$ и ψ_1 те же, что и в (18.94) и (18.95). На рис. 18.19, а изображены графики для величин коэффициентов $q(a)$, $q_1(a)$, $q_2(a)$.

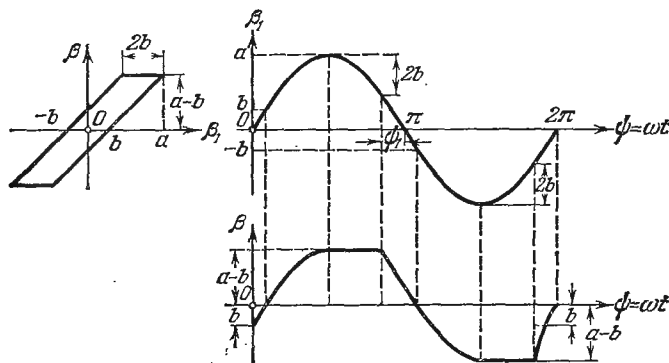


Рис. 18.18.

На основании (18.93), (18.96) и линейной части (16.53) приходим к характеристическому уравнению

$$(T_{\text{в}} p + 1) [q_2(a) T_0 p + 1 - q'(a) T_0 \omega] p + \\ + k_1 [(T_{\text{в}} p + 1) k_0 p + k] \left[q(a) - \frac{q'(a)}{\omega} p \right] = 0.$$

Следовательно, после подстановки $p = j\omega$ получим

$$X = k_1 k q(a) - [T_B - T_B T_0 \omega q'(a) + T_0 q_2(a) + k_1 k_6 T_B q(a)] \omega^2 = 0,$$

$$Y = \left[1 - T_0 q'(a) \omega + k_1 k_6 q(a) - k_1 k \frac{q'(a)}{\omega} \right] \omega - \left[T_0 T_B q_2(a) - k_1 k_6 T_B \frac{q'(a)}{\omega} \right] \omega^3 = 0.$$

Для исследования влияния параметра k на собственные колебания данной системы выразим величину k из каждого уравнения по отдельности:

$$k = \frac{k_B q'(a)}{q(a)} \omega + \left[\frac{T_0 q_2(a)}{k_1 q(a)} + T_B k_6 + \frac{T_B}{k_1 q(a)} \right] \omega^2 - \frac{T_0 T_B q'(a)}{k_1 q(a)} \omega^3, \quad (18.97)$$

$$k = \left[\frac{k_B q(a)}{q'(a)} + \frac{1}{k_1 q'(a)} \right] \omega - \left(\frac{T_0}{k_1} - T_B k_6 \right) \omega^2 - \frac{T_0 T_B q_2(a)}{k_1 q'(a)} \omega^3. \quad (18.98)$$

Задаваясь разными значениями $a = a_n$, для каждого из них по этим уравнениям строим две кривые $k(\omega)$ (рис. 18.19, б). Точка их пересечения

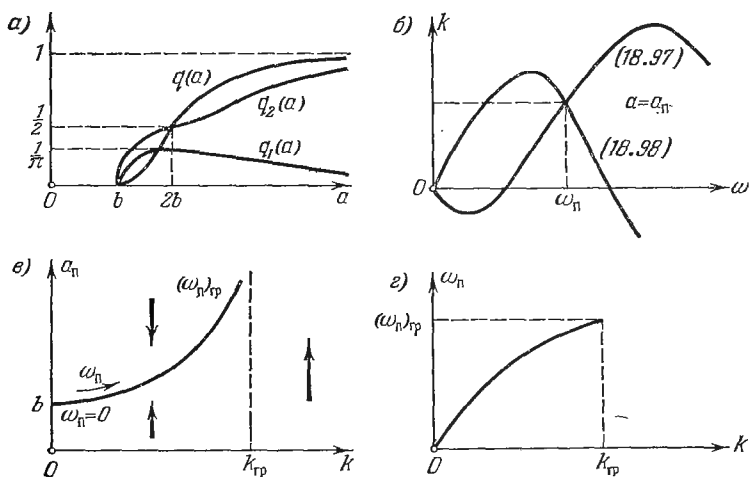


Рис. 18.19.

дает соответствующие значения ω_n и k . В результате можно построить графики (рис. 18.19, в и г) зависимостей амплитуды a_n и частоты ω_n периодического решения от параметра k (каждое построение на рис. 18.19, б дает по одной точке на каждом из графиков рис. 18.19, в и г).

При $a = \infty$, как видно из рис. 18.19, а, имеем $q(a) = q_2(a) = 1$ и $q_1(a) = 0$. Поэтому из выражений $X(\omega_n) = 0$ и $Y(\omega_n) = 0$ находим:

$$(\omega_n)_{гр}^2 = \frac{1 + k_1 k_6}{T_0 T_B}, \quad k_{гр} = \frac{(1 + k_1 k_6)(T_0 + T_B + T_B k_1 k_6)}{k_1 T_0 T_B},$$

причем вдоль кривой на рис. 18.19, в частота ω_n изменяется в интервале $0 \leq \omega_n \leq (\omega_n)_{гр}$.

Пример 5. Пусть имеется релейная система регулирования температуры (рис. 1.35), описываемая согласно § 16.1 уравнениями (с дополнительным учетом постоянной времени привода T_3):

$$(T_1 p + 1) \theta = -k_1 \varphi, \quad x = k_2 \theta, \\ (T_3 p + 1) p \varphi = k_3 U, \quad U = F(x),$$

где x — ток в диагонали моста (управляющей обмотке реле), а $F(x)$ — характеристика реле, изображенная на рис. 18.20, а. В следующем примере произведем также учет не гистерезисного, а временного запаздывания реле.

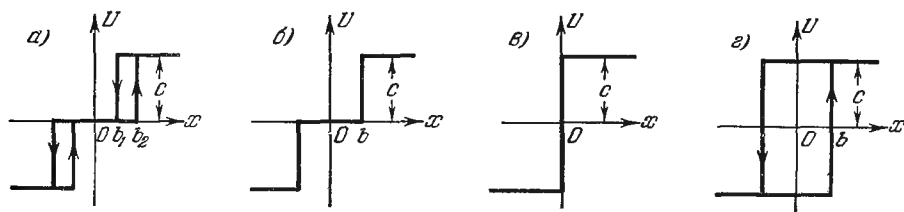


Рис. 18.20.

Гармоническая линейризация характеристики реле рис. 18.20, а согласно формулам (18.9) и (18.15) дает

$$U = \left[q(a) - \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x,$$

где

$$q = \frac{2c}{\pi a^2} (\sqrt{a^2 - b_1^2} + \sqrt{a^2 - b_2^2}), \quad q' = \frac{2c(b_2 - b_1)}{\pi a^2}. \quad (18.99)$$

На основании написанных уравнений получаем следующее характеристическое уравнение данной замкнутой системы:

$$(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)p + k_1 k \left[q(a) - \frac{q'(a)}{\omega} p \right] = 0,$$

где

$$k = k_2 k_3.$$

Отсюда после подстановки $p = j\omega$ получаем выражения:

$$\left. \begin{aligned} X &= k_1 k q(a) - (T_1 + T_3) \omega^2 = 0, \\ Y &= \left[1 - k_1 k \frac{q'(a)}{\omega} \right] \omega - T_1 T_3 \omega^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.100)$$

Исследуем влияние параметра k на устойчивость и автоколебания данной системы.

Из (18.100) имеем

$$\frac{q(a_{\Pi})}{q'(a_{\Pi})} = \frac{(T_1 + T_3) \omega_{\Pi}}{1 - T_1 T_3 \omega_{\Pi}^2}, \quad (18.101)$$

откуда после подстановки (18.99) находим

$$a_{\Pi} = \frac{(v^2 + b_1^2 + b_2^2)^2 - 4b_1^2 b_2^2}{4v^2}, \quad (18.102)$$

где

$$v = \frac{(b_2 - b_1)(T_1 + T_3) \omega_{\Pi}}{1 - T_1 T_3 \omega_{\Pi}^2}.$$

Тогда из второго уравнения (18.100) с учетом (18.99) получаем

$$k = \frac{\pi(1 - T_1 T_3 \omega_{\Pi}^2) \omega_{\Pi}}{2ck_1(b_2 - b_1)} a_{\Pi}^2. \quad (18.103)$$

На основании формул (18.102) и (18.103) можно построить графики для амплитуды a_{Π} в зависимости от параметра k по точкам, соответствующим различным значениям частоты ω_{Π} , как это делалось в предыдущих примерах. При этом, исходя из положительности k , согласно (18.103) нужно задавать значения ω_{Π} в интервале

$$0 \leq \omega_{\Pi}^2 \leq \frac{1}{T_1 T_3}. \quad (18.104)$$

Рассмотрим частные случаи.

Пусть реле имеет характеристику вида рис. 18.20, б, где $b_1 = b_2 = b$. Для этого случая из (18.99) получаем:

$$q = \frac{4c}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - b^2}, \quad q' = 0. \quad (18.105)$$

Поэтому второе из уравнений (18.100) дает постоянное значение частоты периодического решения

$$\omega_{\Pi}^2 = \frac{1}{T_1 T_3}. \quad (18.106)$$

Подставляя его в первое уравнение (18.100), с учетом (18.105) находим

$$k = \frac{\pi (T_1 + T_3) a_{\Pi}^2}{4ck_1 T_1 T_3 \sqrt{a_{\Pi}^2 - b^2}} \quad (b \leq a_{\Pi} \leq \infty). \quad (18.107)$$

Здесь $k = \infty$ в двух случаях: $a_{\Pi} = b$ и $a_{\Pi} = \infty$. Найдем $k_{\min}$ из условия равенства нулю производной k по a_{Π} :

$$k_{\min} = \frac{\pi b (T_1 + T_3)}{2ck_1 T_1 T_3} \quad (18.108)$$

при $a_{\Pi} = b \sqrt{2}$.

Соответствующий график зависимости амплитуды a_{Π} от параметра k изображен на рис. 18.21, а. В этом частном случае релейной характеристики (рис. 18.20, б) для исследования устойчивости воспользуемся критерием (18.63), для которого предварительно находим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)_{\Pi} &= \frac{4ck_1 k}{\pi a \sqrt{a^2 - b^2}} \left(\frac{2b^3}{a^2} - 1 \right), \\ \left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)_{\Pi} &\begin{cases} > 0 & \text{при } a < b\sqrt{2}, \\ < 0 & \text{при } a > b\sqrt{2}, \end{cases} \\ \left[\frac{\partial Y}{\partial a} \right]_{\Pi} &= 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)_{\Pi} < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, нижняя ветвь кривой на рис. 18.21, а соответствует неустойчивому периодическому решению, а верхняя — устойчивому (автоколебания).

Пусть в другом частном случае характеристика реле имеет идеальный вид (рис. 18.20, в), т. е. $b_1 = b_2 = b = 0$. Здесь получается прежнее постоянное значение ω_{Π} (18.106) и согласно (18.107) — прямолинейная зависимость

$$a_{\Pi} = \frac{4ck_1 T_1 T_3}{\pi (T_1 + T_3)} k, \quad (18.109)$$

изображенная на рис. 18.21, б. Здесь возможен только автоколебательный процесс; область устойчивости равновесного состояния, имевшаяся на рис. 18.21, а, пропадает.

Как видим, зона нечувствительности имеет стабилизирующее значение для релейной системы автоматического регулирования, причем ширина области устойчивости ($0 \leq k \leq k_{\min}$) согласно (18.108) пропорциональна ширине зоны нечувствительности $2b$. Сравнение данного решения, учитывающего инерционность регулятора T_3 , с решением без учета T_3 показывает принципиальную важность учета этого фактора. Например, для характеристики вида рис. 18.20, в без учета T_3 получится только устойчивость ($a_n = 0$) при любых числовых значениях параметров (что нереально), а с учетом T_3 — только автоколебания (рис. 18.21, б). Для характеристики вида рис. 18.20, б вместо неограниченной области устойчивости (без учета T_3) получится ограниченная и возникает еще область автоколебаний с большой амплитудой при одновременном существовании устойчивости в малом (рис. 18.21, а).

Далее, в третьем частном случае, когда характеристика реле чисто гистерезисная (рис. 18.20, г), т. е. $b_1 = -b_2 = -b$, из (18.99) имеем

$$q = \frac{4c}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - b^2}, \quad q' = -\frac{4cb}{\pi a^2}. \quad (18.110)$$

При этом из (18.102) находим

$$a_n^2 = \frac{(1 + T_1^2 \omega_n^2)(1 + T_3^2 \omega_n^2)}{(1 - T_1 T_3 \omega_n^2)^2} b^2, \quad (18.111)$$

а из (18.103)

$$k = \frac{\pi b \omega_n (1 + T_1^2 \omega_n^2)(1 + T_3^2 \omega_n^2)}{4ck_1 (1 - T_1 T_3 \omega_n^2)}. \quad (18.112)$$

По этим формулам построены кривые на рис. 18.21, в и г, определяющие амплитуду и частоту периодического решения в зависимости от величины параметра k . Устойчивость периодического решения определим здесь по методу осреднения периодических коэффициентов. Для вычисления коэффициента $\chi(a)$ согласно (18.60) нужно знать производную от U по x , которая, однако, обращается в бесконечность при $x = b$, когда $px > 0$, и при $x = -b$, когда $px < 0$.

Чтобы избежать этого, заменим заданную характеристику (рис. 18.20, г) новой (рис. 18.22, а), из которой заданная получается предельным переходом $h \rightarrow 0$ (другой способ, с дельта-функцией, см. в § 18.5, рис. 18.37). Для характеристики на рис. 18.22, а при изменении величины x по закону $x = a \sin \omega t$ (рис. 18.22, б) производная $\frac{\partial U}{\partial x}$ принимает значения, показанные на рис. 18.22, в, где

$$\psi_1 = \arcsin \frac{b}{a}, \quad \psi_2 = \arcsin \frac{b+h}{a}. \quad (18.113)$$

Осредненное ее значение (18.60) согласно рис. 18.22, в с предельным пере-

ходом к заданной характеристике ($h \rightarrow 0$) будет

$$\chi(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \frac{2c}{h} (\psi_2 - \psi_1)}{2\pi} = \lim_{\psi_2 \rightarrow \psi_1} \frac{2c (\psi_2 - \psi_1)}{\pi a (\sin \psi_2 - \sin \psi_1)},$$

так как $h = a \sin \psi_2 - a \sin \psi_1$.

Обозначив $\psi_2 = \psi_1 + \Delta\psi$ и взяв производные от числителя и знаменателя по $\Delta\psi$, получим

$$\chi(a) = \lim_{\Delta\psi \rightarrow 0} \frac{2c}{\pi a \cos(\psi_1 + \Delta\psi)} = \frac{2c}{\pi \sqrt{a^2 - b^2}}. \quad (18.114)$$

Итак, для исследования устойчивости получаем следующее характеристическое уравнение:

$$T_1 T_3 p^3 + (T_1 + T_3) p^2 + p + k_1 k \chi(a) = 0. \quad (18.115)$$

Условие устойчивости периодического решения, следовательно, по критерию Гурвица будет

$$(T_1 + T_3) > T_1 T_3 k_1 k \chi(a).$$

Подставив сюда $\chi(a)$ из (18.114) и значения a_n^2 и k из (18.111) и (18.112), убедимся, что оно выполняется. Следовательно, в системе будут устойчивые автоколебания $x = a_n \sin \omega_n t$, амплитуда и частота которых определяются графиками рис. 18.21, в и г или формулами (18.111), (18.112).

Пример 6. Пусть в той же системе характеристика реле имеет простейший вид рис. 18.20, в, но имеется постоянное по времени запаздывание τ . Тогда согласно (18.110), где $b = 0$, уравнение нелинейного звена будет

$$U = \frac{4c}{\pi a} e^{-\tau p} x.$$

В результате получим характеристическое уравнение системы

$$(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)p + k_1 k \frac{4c}{\pi a} e^{-\tau p} = 0.$$

Подстановка $p = j\omega$ с учетом выражения $e^{-j\tau\omega} = \cos \tau\omega - j \sin \tau\omega$ даст два уравнения:

$$X = \frac{4ck_1k}{\pi a} \cos \tau\omega - (T_1 + T_3) \omega^2 = 0,$$

$$Y = -\frac{4ck_1k}{\pi a} \sin \tau\omega + \omega - T_1 T_3 \omega^3 = 0,$$

из которых находим два соотношения:

$$(T_1 + T_3) \omega_n \operatorname{tg} \tau\omega_n = 1 - T_1 T_3 \omega_n^2,$$

$$a_n = \frac{4ck_1k}{\pi \omega_n \sqrt{1 + (T_1^2 + T_3^2) \omega_n^2 + T_1^2 T_3^2 \omega_n^4}}.$$

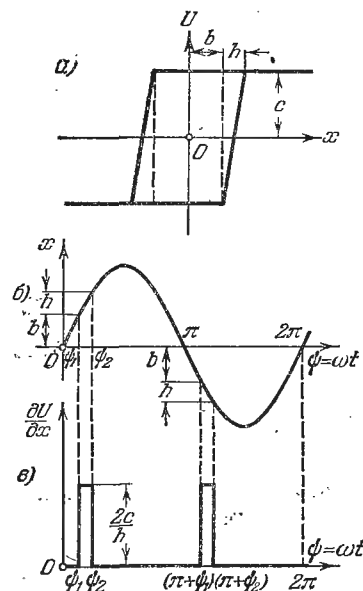


Рис. 18.22.

Первое из них определяет частоту (решается графически), а второе — амплитуду автоколебаний в зависимости от коэффициента усиления регулятора k и от других параметров системы.

Заметим, что во всех случаях, рассмотренных в примере 5 и в данном примере релейной системы, через a_{Π} обозначалась амплитуда автоколебаний величины x . Амплитуда же автоколебаний a_{θ} регулируемой величины θ (температуры) будет

$$a_{\theta} = \frac{a_{\Pi}}{k_2}.$$

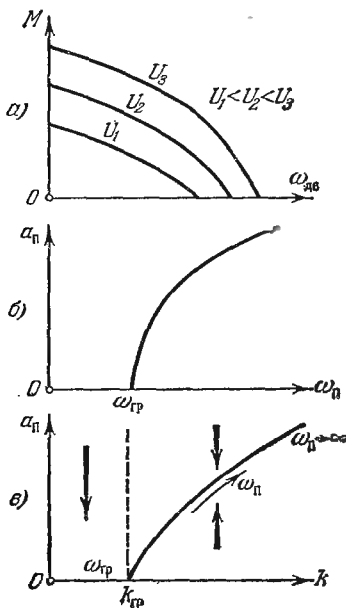


Рис. 18.23.

Пример 7. Рассмотрим систему автоматического регулирования с приводом регулирующего органа в виде двухфазного двигателя переменного тока. Характеристика этого двигателя для разных значений управляющего напряжения U имеет вид, представленный на рис. 18.23, а.

Линеаризуя характеристики, обычно считают

$$M = c_1 U - c_2 \omega_{\text{дв}}. \quad (18.116)$$

Но это справедливо в первом приближении только для левого участка характеристики. Если же используется большая часть характеристики, то необходимо учесть ее нелинейность. Имея в виду, что на рис. 18.23, а с увеличением $\omega_{\text{дв}}$ коэффициент c_1 уменьшается,

а коэффициент c_2 увеличивается, примем для описания этой характеристики вместо (18.116) следующее нелинейное выражение:

$$M = \frac{c_1}{1 + c_3 |\omega_{\text{дв}}|} U - (c_2 + c_4 |\omega_{\text{дв}}|) \omega_{\text{дв}} \quad (18.117)$$

(абсолютные значения $\omega_{\text{дв}}$ в коэффициентах поставлены потому, что $\omega_{\text{дв}}$ меняет знак, а сами коэффициенты должны оставаться положительными числами). Аналогично можно подбирать и любой другой более подходящий нелинейный закон для описания характеристик двигателя.

Введем для дальнейшего обозначение

$$x = \omega_{\text{дв}}. \quad (18.118)$$

Тогда дифференциальное уравнение двигателя

$$J \frac{dx}{dt} = \frac{c_1}{1 + c_3 |x|} U - c_2 x - c_4 |x| x$$

(где J — момент инерции всех вращаемых двигателем масс, приведенных к валу двигателя) можно записать в виде

$$J \frac{dx}{dt} + J c_3 |x| \frac{dx}{dt} + c_2 x + (c_2 c_3 + c_4) |x| x + c_3 c_4 x^3 = c_1 U. \quad (18.119)$$

Здесь имеем три нелинейные функции:

$$F_1 = |x| \frac{dx}{dt}, \quad F_2 = |x| x, \quad F_3 = x^3.$$

Гармоническая их линеаризация по правилам § 18.1 дает:

$$F_1 = \frac{4a}{3\pi} \frac{dx}{dt}, \quad F_2 = \frac{8a}{3\pi} x, \quad F_3 = \frac{3a^2}{4} x.$$

Подставляя это в (18.119), получаем следующее уравнение двухфазного двигателя (для колебательных процессов):

$$[T_3(1 + b_1a)p + (1 + b_2a + b_3a^2)]x = k_3U, \quad (18.120)$$

вместо обычного линейного $(T_3p + 1)x = k_3U$, где

$$T_3 = \frac{J}{c_2}, \quad k_3 = \frac{c_1}{c_2}, \quad b_1 = \frac{4c_3}{3\pi}, \quad b_2 = 2b_1 + \frac{8c_4}{3\pi c_2}, \quad b_3 = \frac{3c_3c_4}{4c_2}. \quad (18.121)$$

Здесь a обозначает амплитуду колебаний угловой скорости двигателя $x = \omega_{\text{дв}}$.

Далее, скорость перемещения регулирующего органа $p\xi$ с учетом передаточного числа редуктора и с обозначением (18.118) будет

$$p\xi = k_4x. \quad (18.122)$$

Уравнение регулируемого объекта и уравнение чувствительного элемента регулятора возьмем соответственно в виде

$$(T_1p + 1)\varphi = -k_1\xi, \quad U = k_2\varphi, \quad (18.123)$$

где φ — отклонение регулируемой величины.

Характеристическое уравнение всей замкнутой системы будет

$$[T_3(1 + b_1a)p + (1 + b_2a + b_3a^2)](T_1p + 1)p + k_1k = 0, \quad (18.124)$$

где

$$k = k_2k_3k_4.$$

После подстановки $p = j\omega$ получаем:

$$\left. \begin{aligned} X &= k_1k - [T_3(1 + b_1a) + T_1(1 + b_2a + b_3a^2)]\omega^2 = 0, \\ Y &= (1 + b_2a + b_3a^2)\omega - T_3T_1(1 + b_1a)\omega^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.125)$$

Рассмотрим при этом влияние параметра k (общего коэффициента усиления регулятора). Второе из уравнений (18.125) дает

$$a_{\Pi} = \frac{b_1T_3T_1\omega_{\Pi}^2 - b_2 + \sqrt{(b_1T_3T_1\omega_{\Pi}^2 - b_2)^2 + 4b_3(T_3T_1\omega_{\Pi}^2 - 1)}}{2b_3}. \quad (18.126)$$

Из (18.121) видно, что $b_2 > b_1$. Поэтому полученная формула дает зависимость амплитуды a_{Π} от частоты ω_{Π} искомого периодического решения в виде графика, показанного на рис. 18.23, б, где

$$\omega_{\text{гр}} = \frac{1}{\sqrt{T_3T_1}}. \quad (18.127)$$

Далее, первое из выражений (18.125) при $\omega = \omega_{\Pi}$ и $a = a_{\Pi}$ с использованием второго приводит к формуле для параметра k , влияние которого рассматривается:

$$k = \frac{T_3}{T_1}(1 + b_1a_{\Pi})(1 + T_1^2\omega_{\Pi}^2)\omega_{\Pi}^2. \quad (18.128)$$

По этой формуле, используя предыдущие результаты, получаем график зависимости амплитуды автоколебаний a_{Π} от величины параметра k , показанный на рис. 18.23, в.

§ 18.4. Нелинейные системы второго класса

Нелинейные системы второго класса — это системы с несколькими нелинейными звеньями или же с одним нелинейным звеном, когда под знаки нелинейных функций входят две или более переменных, связанных между собой линейными передаточными функциями или нелинейными уравнениями. Обычный прием приближенного решения, излагаемый ниже в примерах 1—3,

справедлив при соблюдении условия фильтра, оговоренного в § 18.2, для всех передаточных функций, связывающих указанные переменные. Если это условие не соблюдается, применяется специальный прием решения, изложенный ниже в примере 4.

Пример 1. В предыдущем параграфе рассматривалось влияние нелинейности привода, а затем влияние квадратичного трения по отдельности. Рассмотрим теперь совместное действие нелинейности привода и квадратичного трения. Момент трения при этом описывается нелинейным членом

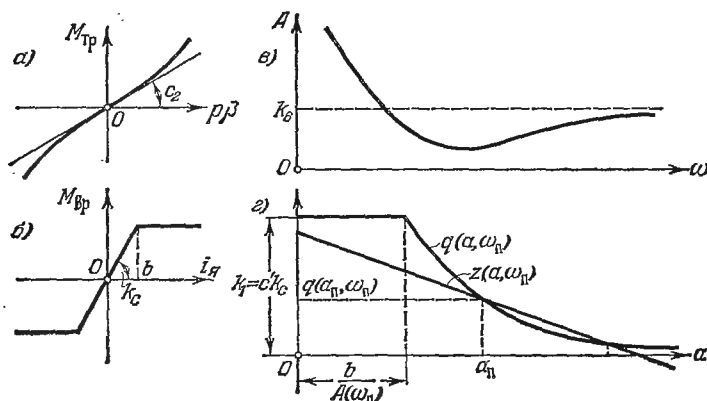


Рис. 18.24.

$F(x)$, как в уравнении (18.90), или, что то же самое, графиком на рисунке 18.24, а. Нелинейный привод пусть имеет характеристику типа насыщения (рис. 18.24, б).

Тогда уравнение двигателя и управляемого объекта вместо (18.90) примет вид

$$(T_{op} + 1)x + F(x) = c'F_1(i_{я}), \quad x = p\beta, \quad (18.129)$$

где $F_1(i_{я}) = M_{Bp}$ и определяется графиком рис. 18.24, б.

В данном случае получается нелинейная система второго класса. Приближенно полагаем, что при автоколебаниях

$$x = a \sin \omega t, \quad i_{я} = Aa \sin(\omega t + B), \quad (18.130)$$

где $A(\omega)$ и $B(\omega)$ — модуль и аргумент амплитудно-фазовой характеристики линейной части, получаемой из уравнения (18.67), которое согласно (18.129) надо умножить на p . В результате получим

$$W_{\Sigma}(j\omega) = k_0 + \frac{k}{(T_B j\omega + 1)j\omega} = k_0 - \frac{kT_B}{1 + T_B^2 \omega^2} - j \frac{k}{(1 + T_B^2 \omega^2)\omega}.$$

Отсюда

$$A = \sqrt{k_0^2 + \frac{k^2 - 2kk_0T_B\omega^2}{(1 + T_B^2\omega^2)\omega^2}}, \quad (18.131)$$

что изображено графически на рис. 18.24, в.

Поскольку в уравнение (18.129) переменные $x = p\beta$ и $i_{я}$ входят раздельно, то и гармоническую линейризацию можно производить для каждой из них отдельно. К нелинейности в левой части уравнения (18.129) применяем формулы из прежнего примера 3 (с квадратичным трением), а к нелинейности в правой части — формулы (18.65) и (18.66), в которых, в соответствии с (18.130), вместо a подставляем Aa . В результате нелинейное урав-

нение (18.129) принимает вид

$$\left(T_1 p + 1 + \frac{8k_8 a}{3\pi}\right) p \beta = q(a, \omega) i_{\text{я}}, \quad (18.132)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q &= k_1 = c' k_c \quad \text{при} \quad a \leq b, \\ q &= \frac{2k_1}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{aA(\omega)} + \frac{b}{aA(\omega)} \sqrt{1 - \left[\frac{b}{aA(\omega)} \right]^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (18.133)$$

причем $A(\omega)$ определяется формулой (18.131) или графиком рис. 18.24, в.

Из уравнений (18.132) и (16.53) получаем гармонически линеаризованное характеристическое уравнение замкнутой системы в виде

$$(T_{\text{в}} p + 1) \left(T_{\text{о}} p + 1 + \frac{8k_8 a}{3\pi}\right) p + [(T_{\text{в}} p + 1) k_6 p + k] q(a) = 0.$$

Следовательно, после подстановки $p = j\omega$, находим:

$$X = kq(a, \omega) - \left[T_0 + T_{\text{в}} + k_6 T_{\text{в}} q(a, \omega) + \frac{8k_8 a}{3\pi} T_{\text{в}}\right] \omega^2 = 0,$$

$$Y = \left[1 + k_6 q(a, \omega) + \frac{8k_8 a}{3\pi}\right] \omega - T_0 T_{\text{в}} \omega^3 = 0,$$

откуда получаем:

$$q(a_{\text{п}}, \omega_{\text{п}}) = \frac{1}{k_6} \left(T_0 T_{\text{в}} \omega_{\text{п}}^2 - 1 - \frac{8k_8 a_{\text{п}}}{3\pi}\right), \quad k = \frac{T_0 \omega_{\text{п}}^2 (1 + T_{\text{в}}^2 \omega_{\text{п}}^2)}{q(a_{\text{п}}, \omega_{\text{п}})}. \quad (18.134)$$

Из первого уравнения легко определяются все возможные значения амплитуды $a_{\text{п}}$ и частоты $\omega_{\text{п}}$ следующим образом.

Задаемся каким-нибудь значением $\omega_{\text{п}}$. Из графика на рис. 18.24, в находим для него величину $A(\omega_{\text{п}})$. По формуле (18.133) строим кривую $q(a, \omega_{\text{п}})$, показанную на рис. 18.24, з.

Обозначим далее правую часть первого из уравнений (18.134) через z (при переменной a вместо $a_{\text{п}}$):

$$z(a, \omega_{\text{п}}) = \frac{1}{k_6} \left(T_0 T_{\text{в}} \omega_{\text{п}}^2 - 1 - \frac{8k_8 a}{3\pi}\right),$$

и проведем согласно этой формуле на том же рис. 18.24, з прямую $z(a, \omega_{\text{п}})$. В точках пересечения получаем искомые значения амплитуды $a_{\text{п}}$, а также и значения $q(a_{\text{п}}, \omega_{\text{п}})$. После этого по второй из формул (18.134) подсчитаем величину параметра k .

Проделав такую же операцию для различных значений $\omega_{\text{п}}$ и получая каждый раз $a_{\text{п}}$ и k , сможем построить и здесь графики, подобные тем, которые получались в предыдущих примерах. Амплитуда колебаний угла σ будет $a_{\text{в}} = a_{\text{п}}/\omega_{\text{п}}$. При этом согласно (18.134) из условия положительности величины $q(a_{\text{п}}, \omega_{\text{п}})$ должно быть $\omega_{\text{п}}^2 > \frac{1}{T_1 T_3}$.

Пример 2. Пусть в системе, функциональная блок-схема которой изображена на рис. 18.25, регулируемый объект описывается уравнением

$$p^2 x = k_0 x_{\text{в}}, \quad (18.135)$$

измеритель 1 — нелинейный (рис. 18.26) —

$$(T_1 p + 1) x_1 = F_1(x), \quad (18.136)$$

измеритель 2 — линейный —

$$(T_2 p + 1) x_2 = k_2 p x, \quad (18.137)$$

линейный усилитель-преобразователь вместе с линейным исполнительным устройством —

$$(T_3 p + 1) x_5 = -F_2(x_3), \quad (18.138)$$

где $x_3 = x_1 + x_2$, а нелинейность $F_2(x_3)$ задана в двух вариантах,

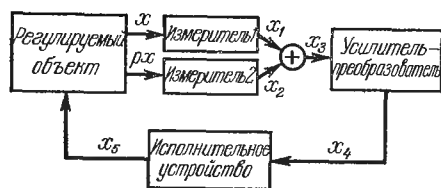


Рис. 18.25.

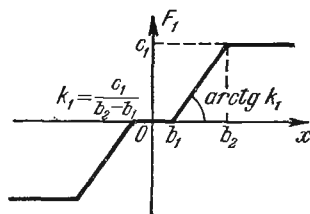


Рис. 18.26.

обусловленных разными режимами работы исполнительного устройства — релейным (рис. 18.27, а) или непрерывным (рис. 18.27, б).

Будем определять автоколебания приближенно в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \omega t, \\ x_3 &= a_3 (\sin \omega t + \beta). \end{aligned} \right\} \quad (18.139)$$

Здесь связь между переменными x и x_3 , входящими под знаки нелинейностей, согласно рис. 18.25 идет через нелинейное звено. Следовательно,

данная система является системой второго класса (с двумя нелинейными звеньями).

Гармоническая линеаризация нелинейностей согласно § 18.1 дает

$$F_1 = q_1(a) x, \quad F_2 = q_2(a_3) x_3, \quad (18.140)$$

где

$$q_1 = k_1 - \frac{2k_1}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_1}{a} + \frac{b_1}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{b_1}{a} \right)^2} \right) \quad (b_1 < a < b_2) \quad (18.141)$$

и для двух вариантов исполнительного устройства соответственно

$$q_2 = \frac{4c}{\pi a_3} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a_3} \right)^2} \quad (a_3 > b),$$

$$q_2 = k_3 - \frac{2k_3}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_3}{a_3} + \frac{b_3}{a_3} \sqrt{1 - \left(\frac{b_3}{a_3} \right)^2} \right) \quad (b_3 < a_3 < b_4), \quad (18.142)$$

если ищутся амплитуды автоколебаний a и a_3 в указанных пределах (наличие именно такого автоколебательного режима известно, например, из опыта). Не представляет труда использование выражений q_1 и q_2 также и для случая $a > b_2$ и $a_3 > b_4$ (это ниже для общности будет сделано при изображении графиков q_1 и q_2).

Передаточная функция для переменных x и $x_3 = x_1 + x_2$ запишется теперь согласно (18.136), (18.137) и (18.140) в виде

$$x_3 = \left[\frac{q_1(a)}{T_1 p + 1} + \frac{k_2 p}{T_2 p + 1} \right] x, \quad (18.143)$$

откуда

$$a_3 = a \sqrt{\frac{[q_1(a) - T_1 k_2 \omega^2]^2 + [q_1(a) T_2 + k_2]^2 \omega^2}{(T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)}}. \quad (18.144)$$

Это выражение $a_3(a, \omega)$ будет далее использовано.

Составим теперь характеристическое уравнение всей замкнутой системы в гармонически линеаризованном виде. Согласно (18.135) — (18.140) получаем

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)p^2 + k_0 q_2(a_3)[T_1 k_2 p^2 + (q_1(a) T_2 + k_2)p + q_1(a)] = 0.$$

Пренебрегая произведениями постоянных времени при высших степенях p по сравнению с их суммой, что вполне допустимо при рассмотрении низкочастотных автоколебаний (которые здесь и будут иметь место), запишем характеристическое уравнение в виде

$$(T_1 + T_2 + T_3)p^3 + [1 + T_1 k_2 k_0 q_2(a_3)]p^2 + k_0 q_2(a_3)[q_1(a) T_2 + k_2]p + k_0 q_2(a_3) q_1(a) = 0.$$

Подстановка $p = j\omega$ дает:

$$X = k_0 q_2(a_3) q_1(a) - [1 + T_1 k_2 k_0 q_2(a_3)] \omega^2 = 0,$$

$$Y = k_0 q_2(a_3) [q_1(a) T_2 + k_2] \omega - (T_1 + T_2 + T_3) \omega^3 = 0.$$

Подставив значение $k_0 q_2 q_1$ из первого уравнения во второе, поделенное на ω , получим (пренебрегая снова произведением $T_1 T_2 \omega^2$ по сравнению с единицей)

$$q_2(a_3) = \frac{(T_1 + T_3) \omega^2}{k_0 k_2}. \quad (18.145)$$

Подставив это в первое уравнение ($X = 0$) и пренебрегая опять-таки произведением $T_1(T_1 + T_3) \omega^2$ по сравнению с единицей, найдем

$$q_1(a) = \frac{k_2}{T_1 + T_3}. \quad (18.146)$$

Последнее уравнение легко решается графически. Изобразим график $q_1(a)$ согласно формуле (18.144). На рис. 18.28, а это показано сплошной кривой. Пунктирная кривая показывает продолжение его при $a > b_2$.

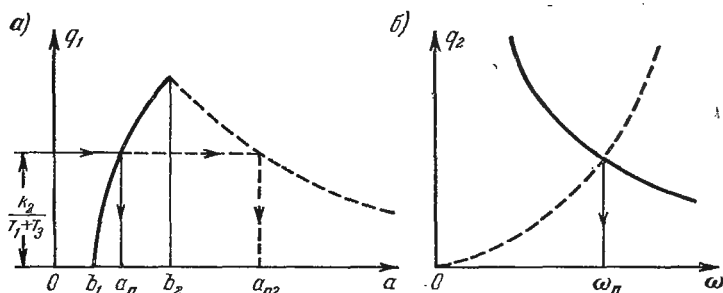


Рис. 18.28.

Путь графического решения уравнения (18.146) показан сплошными стрелками. Этим определяется искомая амплитуда автоколебаний a_n регулируемой величины x . Пунктирные стрелки дают второе решение a_{n2} (неустойчивое).

Для определения частоты автоколебаний воспользуемся уравнением (18.145). Для этого сначала из формулы (18.144) найдем зависимость $a_3(\omega)$ при заданном значении (18.146), что после пренебрежения прежними малыми членами дает

$$a_3 = \frac{k_2 a_n}{T_1 + T_3} \sqrt{\frac{1 + (T_1 + T_2 + T_3)^2 \omega^2}{1 + (T_1^2 + T_3^2) \omega^2}}, \quad (18.147)$$

где значение a_n берется из графика рис. 18.28, а.

Имея выражение для $q_2(a_3)$ [одно из (18.142)], подставим в него полученное $a_3(\omega)$. Это позволяет построить график $q_2(\omega)$ (сплошная кривая на рис. 18.28, б). На тот же график наносим правую часть уравнения (18.145) (пунктирная кривая на рис. 18.28, б). Точка пересечения этих двух кривых дает искомое значение частоты автоколебаний ω_{Π} как решение уравнения (18.145). После этого становится известной и амплитуда автоколебаний $a_{3\Pi}$ на входе усилителя-преобразователя, вычисляемая по формуле (18.147) при найденном значении $\omega = \omega_{\Pi}$.

Пример 3. Рассмотрим систему, в которой нелинейным звеном является логическое устройство (рис. 16.25) с простейшим законом формирования сигнала управления (рис. 16.26). Уравнения системы заданы в виде (16.66) — (16.69).

Установившийся режим в такой системе будет автоколебательным. Искать его будем приближенно в синусоидальной форме

$$x = a \sin \psi, \quad \psi = \omega t, \quad (18.148)$$

так как свойство фильтра в данной системе соблюдается. Тогда величины u и v будут

$$u = a_u \sin(\psi - \beta), \quad v = a_v \cos(\psi - \gamma),$$

где

$$a_u = \frac{k_1 a}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}, \quad \beta = \arctg T_1 \omega, \quad (18.149)$$

$$a_v = \frac{k_2 \omega a}{\sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}}, \quad \gamma = \arctg T_2 \omega. \quad (18.150)$$

В результате процесс изменения u и v в установившемся режиме будет иметь приблизительно вид некоторого эллипса (рис. 18.29, пунктир). Поэтому включение сигнала Φ в логическом устройстве при данной логике будет

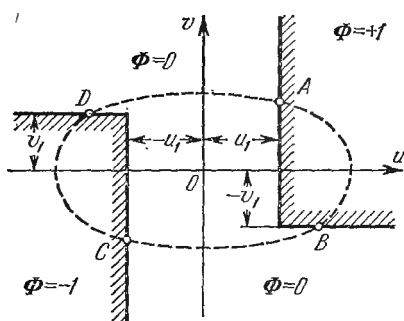


Рис. 18.29.

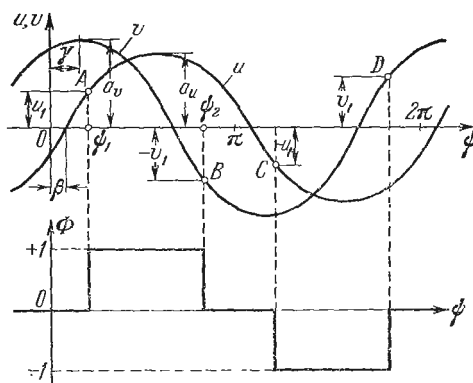


Рис. 18.30.

происходить от величины u (при $u = \pm u_1$, т. е. в точках A и C), а выключение — от величины v (при $v = \pm v_1$, т. е. в точках D и B; рис. 18.29). Этот процесс во времени ($\psi = \omega t$) изображен на рис. 18.30.

Точки включения и выключения определяются на оси абсцисс величинами ψ_1 и ψ_2 , причем

$$\sin(\psi_1 - \beta) = \frac{u_1}{a_u}, \quad \cos(\psi_2 - \gamma) = -\left(\frac{v_1}{a_v}\right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\sin \psi_1 &= \sin (\psi_1 - \beta) \cos \beta + \cos (\psi_1 - \beta) \sin \beta, \\ \cos \psi_1 &= \cos (\psi_1 - \beta) \cos \beta - \sin (\psi_1 - \beta) \sin \beta\end{aligned}$$

(аналогично ψ_2 выражается через γ). Учитывая, что согласно (18.149)

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}, \quad \sin \beta = \frac{T_1 \omega}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}$$

(аналогично γ выражается через $T_2 \omega$), находим

$$\left. \begin{aligned}\sin \psi_1 &= \frac{u_1}{k_1 a} + T_1 \omega \sqrt{\frac{1}{T_2^2 \omega^2 + 1} - \left(\frac{u_1}{k_1 a}\right)^2}, \\ \cos \psi_1 &= \sqrt{\frac{1}{T_1^2 \omega^2 + 1} - \left(\frac{u_1}{k_1 a}\right)^2} - \frac{T_1 \omega u_1}{k_1 a},\end{aligned}\right\} \quad (18.151)$$

$$\left. \begin{aligned}\cos \psi_2 &= -\frac{v_1}{k_2 a \omega} - T_2 \omega \sqrt{\frac{1}{T_2^2 \omega^2 + 1} - \left(\frac{v_1}{k_2 a \omega}\right)^2}, \\ \sin \psi_2 &= \sqrt{\frac{1}{T_2^2 \omega^2 + 1} - \left(\frac{v_1}{k_2 a \omega}\right)^2} - \frac{T_2 v_1}{k_2 a}.\end{aligned}\right\} \quad (18.152)$$

Теперь по правилам § 18.1 легко записать результат гармонической линейаризации нелинейной логической функции:

$$\Phi(u, v) = \left(q + \frac{q'}{\omega} p\right) x, \quad (18.153)$$

где

$$\left. \begin{aligned}q &= \frac{2}{\pi a} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sin \psi d\psi = \frac{2}{\pi a} (\cos \psi_1 - \cos \psi_2), \\ q' &= \frac{2}{\pi a} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \cos \psi d\psi = \frac{2}{\pi a} (\sin \psi_2 - \sin \psi_1).\end{aligned}\right\} \quad (18.154)$$

Найденные значения q и q' согласно (18.151) и (18.152) являются вполне определенными функциями искомых величин a и ω (амплитуды и частоты автоколебаний переменной x).

Характеристическое уравнение рассматриваемой системы в целом после указанной гармонической линейаризации нелинейности, согласно (16.66) — (16.69) и (18.153), принимает вид

$$\begin{aligned}T_0 T_3 T_4 p^4 + (T_0 T_3 + T_0 T_4 + T_3 T_4) p^3 + (T_0 + T_3 + T_4) p^2 + \\ + p + k_0 k_3 k_4 \frac{q'(a, \omega)}{\omega} p + k_0 k_3 k_4 q(a, \omega) = 0.\end{aligned} \quad (18.155)$$

Для отыскания синусоидального периодического решения подставляем $p = j\omega$. Получаем вещественную и мнимую части соответственно

$$X = k_0 k_3 k_4 q(a, \omega) - (T_0 + T_3 + T_4) \omega^2 + T_0 T_3 T_4 \omega^4 = 0,$$

$$Y = k_0 k_3 k_4 q'(a, \omega) + \omega - (T_0 T_3 + T_0 T_4 + T_3 T_4) \omega^3 = 0.$$

Отсюда

$$q(a, \omega) = \frac{T_0 + T_3 + T_4}{k_0 k_3 k_4} \omega^2 - \frac{T_0 T_3 T_4}{k_0 k_3 k_4} \omega^4, \quad (18.156)$$

$$q'(a, \omega) = \frac{T_0 T_3 + T_0 T_4 + T_3 T_4}{k_0 k_3 k_4} \omega^3 - \frac{1}{k_0 k_3 k_4} \omega. \quad (18.157)$$

Эти два уравнения с двумя неизвестными a и ω решаются графически. Для этого по формулам (18.154) с учетом (18.151) и (18.152) строятся графики $q(\omega)$ и $q'(\omega)$ при разных значениях $a = a_1, a_2, a_3, \dots$ (рис. 18.31, а). Затем на первом из них наносится кривая I , определяемая правой частью уравнения (18.156), а на втором — кривая (18.157). Решение определится точками пересечения, для которых значения $a = a_{\Pi}$ и $\omega = \omega_{\Pi}$ одинаковы на обоих графиках. Найденные значения a_{Π} и ω_{Π} будут искомыми амплитудой и частотой автоколебаний, определяемых приближенно в виде $x = a_{\Pi} \sin \omega_{\Pi} t$. Полученные конкретные числовые значения $a = a_{\Pi}$ и $\omega = \omega_{\Pi}$ соответствуют всем заданным параметрам объекта и системы управления. Если изменить

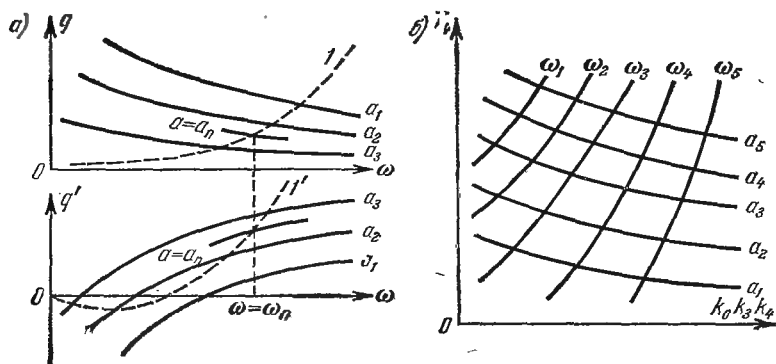


Рис. 18.31.

параметры системы, изменятся также a_{Π} и ω_{Π} . На том же графике можно проследить влияние изменения параметров системы, для чего нужно менять коэффициенты правых частей (18.156) и (18.157) при построении пунктирных кривых I, I' на рис. 18.31, а.

Изложенное выше решение удобно, если все параметры системы заданы. Для изучения же зависимости a и ω от параметров системы (т. е. для выбора параметров) целесообразнее применить другой путь решения задачи. Допустим, необходимо выбрать общий коэффициент усиления $k_0 k_3 k_4$ с учетом влияния различных возможных значений постоянной T_4 . Тогда, исключая $k_0 k_3 k_4$ из уравнений (18.156) и (18.157), находим

$$T_4 = \frac{1}{\omega} \frac{(1 - T_0 T_3 \omega^2) q(a, \omega) + (T_0 + T_3) \omega q'(a, \omega)}{(T_0 + T_3) \omega q(a, \omega) - (1 - T_0 T_3 \omega^2) q'(a, \omega)}.$$

а затем

$$k_0 k_3 k_4 = \omega^2 \frac{(T_0 + T_3) + T_4 (1 - T_0 T_3 \omega^2)}{q(a, \omega)}.$$

Задаваясь теперь различными значениями a и ω и вычисляя каждый раз по этим формулам T_4 и $k_0 k_3 k_4$, получим сетку линий равных значений ω ($\omega_1, \omega_2, \dots$) и a ($a_1, a_2, \dots$), показанных на рис. 18.31, б. По этой диаграмме удобно выбирать значения параметров $k_0 k_3 k_4$ и T_4 для получения желаемых a и ω .

Кроме того, важными параметрами являются k_1, k_2 и особенно u_1 и v_1 (см. рис. 18.29). Но они входят в выражения q и q' . Поэтому для определения их влияния нужно построить графики q и q' для разных значений указанных параметров, а затем, задаваясь значениями a и ω и используя соотношения (18.156) и (18.157), по «потребным» значениям q и q' определять эти параметры (u_1, v_1, k_1 или k_2). При этом нужно учитывать, что из требования веществен-

ности выражений (18.151) и (18.152) следует выбирать

$$u_1^2 < \frac{k_1^2 a^2}{T_1^2 \omega^2 + 1}, \quad u_1^2 < \frac{k_2^2 a^2 \omega^2}{T_2^2 \omega^2 + 1}.$$

Пример 4. Рассмотрим систему автоматического регулирования с двумя нелинейностями в случае, когда их гармоническая линеаризация

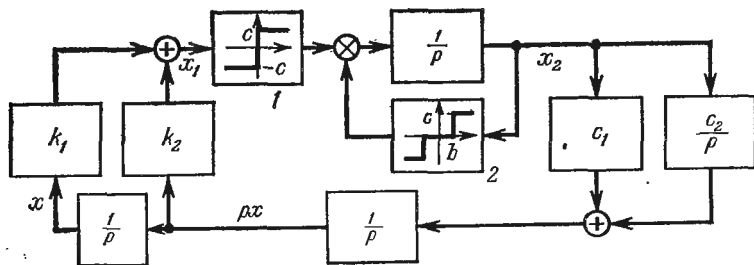


Рис. 18.32.

по отдельности невозможна вследствие отсутствия свойства фильтра у звена, стоящего между ними (рис. 18.32).

Представим весь блок, включающий обе нелинейности, изображенный отдельно на рис. 18.33, как одно нелинейное звено. По отношению к нему система обладает свойством фильтра. Следовательно, автоколебания в системе можно искать приближенно в виде

$$x_1 = a \sin \omega t.$$

Система уравнений, описывающих работу всей системы, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} p^2 x &= \left(c_1 + \frac{c_2}{p} \right) x_2, \\ x_1 &= -(k_2 p + k_1) x, \\ p x_2 &= \begin{cases} c & \text{при } x_1 > 0, x_2 < b, \\ 0 & x_1 > 0, x_2 = b, \\ -c & x_1 < 0, x_2 > -b, \\ 0 & x_1 < 0, x_2 = -b. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (18.158)$$

Чтобы найти передаточную функцию нового нелинейного блока (рис. 18.33), определим его выходной сигнал $x_2(t)$ при входном сигнале $x_1 = a \sin \omega t$. Это представлено на рис. 18.34. Отсюда видно, что выходной сигнал x_2 представляет собой ограниченные на уровне b треугольные колебания, отстающие по фазе от входного сигнала на угол $\varphi \leq \pi/2$. Если время перехода выходного сигнала из одного крайнего положения в другое составляет t_{Π} , угол φ определяется соотношением

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{t_{\Pi}}{T/2} = \frac{\pi t_{\Pi}}{T}.$$

С учетом того, что $t_{\Pi} = 2b/c$, $T = 2\pi/\omega$, получаем

$$\varphi = \frac{\omega b}{c}. \quad (18.159)$$

Для того чтобы выходной сигнал достигал уровня ограничения (т. е. чтобы вторая нелинейность участвовала в работе), необходимо выполнение условия

$$t_{\Pi} \leq \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}.$$

Таким образом, следует рассматривать входные сигналы с частотой

$$\omega \leq \frac{\pi}{t_{\Pi}} = \frac{\pi c}{2b}. \quad (18.160)$$

Амплитуда первой гармоники для треугольного сигнала с ограничением имеет вид

$$a_2 = \frac{4b}{\pi\varphi} \sin \varphi. \quad (18.161)$$

Следовательно, первая гармоника сигнала x_2 будет

$$\begin{aligned} x_2 &= a_2 \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{4b}{\pi\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \sin \omega t - \frac{4b}{\pi\varphi} \sin^2 \varphi \cos \omega t. \end{aligned} \quad (18.162)$$

В результате можно записать уравнение

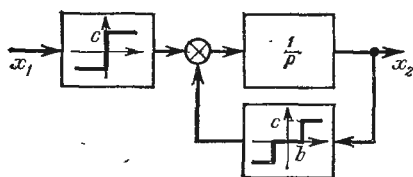


Рис. 18.33.

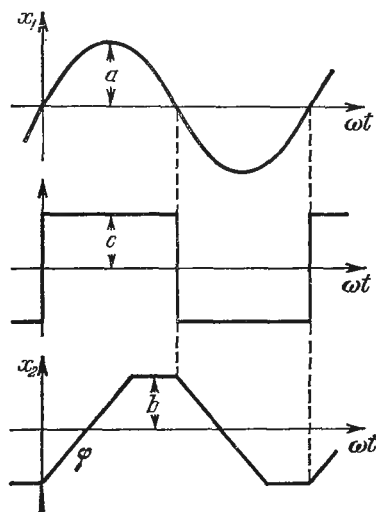


Рис. 18.34.

нелинейного блока (рис. 18.33) в гармонически линеаризованном виде:

$$x_2 = \left[q(a, \omega) + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} p \right] x_1, \quad (18.163)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{2b}{\pi a} \frac{\sin 2\varphi}{\varphi} = \frac{2c}{\pi a} \frac{\sin \frac{2b\omega}{c}}{\omega} = \frac{4b}{\pi a} \frac{\sin \omega t_{\Pi}}{\omega t_{\Pi}} \\ q' &= -\frac{4b}{\pi a} \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi} = -\frac{4c}{\pi a} \frac{\sin^2 \frac{b\omega}{c}}{\omega} = -\frac{8b}{\pi a} \frac{\sin^2 \frac{\omega t_{\Pi}}{2}}{\omega t_{\Pi}}. \end{aligned} \right\} \quad (18.164)$$

Характеристическое уравнение всей замкнутой системы при этом получает вид

$$\begin{aligned} \left(1 + k_2 c_1 \frac{q'}{\omega} \right) p^3 + \left[k_2 c_1 q + (k_1 c_1 + k_2 c_2) \frac{q'}{\omega} \right] p^2 + \\ + \left[(k_1 c_1 + k_2 c_2) q + k_1 c_2 \frac{q'}{\omega} \right] p + k_1 c_2 q = 0. \end{aligned} \quad (18.165)$$

Для удобства дальнейших преобразований представим q и $\frac{q'}{\omega}$ в виде

$$q = \frac{Q_1}{a}, \quad \frac{q'}{\omega} = -\frac{Q_2}{a}, \quad (18.166)$$

где Q_1 и Q_2 зависят от частоты ω , а от амплитуды a не зависят. Будем искать частоту ω_{Π} и амплитуду a_{Π} автоколебаний путем подстановки $p = j\omega$ в (18.165), что дает:

$$X = k_1 c_2 \frac{Q_1}{a} - \left[k_2 c_1 \frac{Q_1}{a} - (k_1 c_1 + k_2 c_2) \frac{Q_2}{a} \right] \omega^2 = 0, \quad (18.167)$$

$$Y = \left[(k_1 c_1 + k_2 c_2) \frac{Q_1}{a} - k_1 c_2 \frac{Q_2}{a} \right] \omega - \left(1 - k_2 c_1 \frac{Q_2}{a} \right) \omega^3 = 0. \quad (18.168)$$

Поскольку $a \neq 0$, из (18.167) можно найти частоту ω_{Π} :

$$k_1 c_2 Q_1 - [k_2 c_1 Q_1 - (k_1 c_1 + k_2 c_2) Q_2] \omega_{\Pi}^2 = 0. \quad (18.169)$$

Так как в Q_1 и Q_2 входит ω_{Π} под знаком тригонометрических функций, решаем это уравнение графически. Его левая часть изображается кривой, показанной на рис. 18.35.

В результате получаются два значения частоты периодического решения: $\omega_{\Pi} = \omega_1$ и $\omega_{\Pi} = \omega_2$.

Преобразуем уравнение (18.168) к виду

$$(k_1 c_1 + k_2 c_2) Q_1 - k_1 c_2 Q_2 - (a_{\Pi} - k_2 c_1 Q_2) \omega_{\Pi}^2 = 0. \quad (18.170)$$

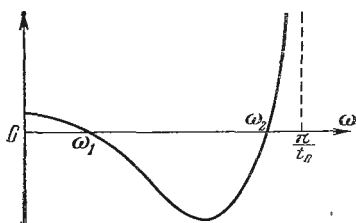


Рис. 18.35.

Отсюда, подставляя значения полученных при решении уравнения (18.169) частот, можно найти амплитуду периодического решения a_{Π} сигнала на входе нелинейного звена. Остается определить, которое из двух найденных решений соответствует действительным автоколебаниям в системе. Для этого исследуем устойчивость найденного решения с помощью критерия (18.63).

Поскольку согласно (18.167)

$$X = \frac{1}{a} F_1(\omega),$$

частная производная

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)_{\Pi} = \left[-\frac{1}{a^2} F_1(\omega) \right]_{\Pi} = 0,$$

так как выражение $F_1(\omega)$ представляет собой левую часть уравнения (18.169), обращаящуюся в нуль при $\omega = \omega_{\Pi}$.

Для отыскания $\frac{\partial Y}{\partial a}$ представим Y в виде

$$Y = \frac{1}{a} F_2(a, \omega).$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right)_{\Pi} = \left[-\frac{1}{a^2} F_2(a, \omega) + \frac{1}{a} \frac{\partial F_2}{\partial a} \right]_{\Pi} = -\frac{\omega^3}{a_{\Pi}} < 0,$$

так как выражение $F_2(a, \omega)$ представляет собой левую часть уравнения (18.170), образующуюся в нуль при $\omega = \omega_{\Pi}$, $a = a_{\Pi}$, а частная производная

$$\frac{\partial F_2}{\partial a} = -\omega^3.$$

В результате условие устойчивости автоколебаний (18.63) сводится к требованию

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)_{\Pi} > 0. \quad (18.171)$$

При отыскании частоты ω_{Π} автоколебаний по уравнению (18.169) был построен график $F_1(\omega) = aX(a, \omega)$. Из рассмотрения этой кривой (рис. 18.35) видно, что условие устойчивости (18.171) выполняется для большего из найденных значений частоты $\omega_{\Pi} = \omega_2$. Таким образом, в системе существуют

автоколебания, параметры которых определяются указанными значениями частоты $\omega_n = \omega_2$.

Помимо условия (18.171) для устойчивости найденного решения необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения (18.165) были положительными, а именно:

$$\begin{aligned} 1 + k_2 c_1 \frac{q'}{\omega} &> 0, & (k_1 c_1 + k_2 c_2) q + k_1 c_2 \frac{q'}{\omega} &> 0, \\ k_2 c_1 q + (k_1 c_1 + k_2 c_2) \frac{q'}{\omega} &> 0, & k_2 c_2 q &> 0. \end{aligned}$$

Легко проверить, что все эти условия были выполнены в самом процессе отыскания периодического решения.

§ 18.5. Вычисление высших гармоник и уточнение первой гармоники автоколебаний

Пусть задано дифференциальное уравнение нелинейной системы

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = 0. \quad (18.172)$$

До сих пор периодическое решение (автоколебания) для нелинейной системы искалось для первого приближения в виде

$$x = a \sin \omega t, \quad (18.173)$$

что соответствовало приближенному значению первой гармоники периодического решения. Все высшие гармоники при этом отбрасывались ввиду их малости при наличии в системе свойства фильтра (§ 18.2).

Оставляя в силе это условие, произведем отыскание малых высших гармоник [100], введя отдельное обозначение для каждой k -й гармоники:

$$x_k = \delta_k a \sin(k\omega_1 t + \varphi_k) \quad (k = 2, 3, \dots), \quad (18.174)$$

где амплитуда k -й гармоники $\delta_k a$ выражена через амплитуду первой гармоники a , причем коэффициент δ_k является малой величиной (так как амплитуда высшей гармоники предполагается малой по сравнению с амплитудой первой гармоники). Величину δ_k , играющую в данной задаче роль малого параметра, можно назвать относительной амплитудой k -й гармоники.

Теперь с учетом конечного числа n высших гармоник искомое периодическое решение (автоколебания) запишется в виде

$$x = x_1 + \sum_{k=2}^n x_k, \quad (18.175)$$

где

$$x_1 = a_1 \sin \omega_1 t$$

обозначает уточненную по сравнению с (18.173) первую гармонику автоколебаний.

Поскольку амплитуды высших гармоник $\delta_k a$ малы, то их вычисление можно производить, используя первое приближение периодического решения (18.173), так как использование уточненного решения (18.175) внесло бы в определение $\delta_k a$ несущественные малые высшего порядка, но зато привело бы к неразрешимой системе уравнений.

Это чрезвычайно важное (для вычисления высших гармоник автоколебаний) допущение можно иначе сформулировать следующим образом. Считая, что на входе x нелинейного звена (рис. 18.36) истинное периодическое реше-

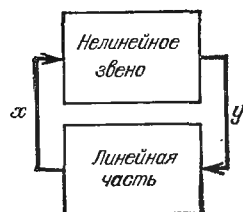


Рис. 18.36.

ние (18.175) (при $n \rightarrow \infty$) мало отличается от синусоидального (18.173), будем для определения высших гармоник, порождаемых нелинейностью (т. е. на выходе нелинейного звена, где они не малые), подавать на вход нелинейного звена синусоиду (18.173).

Тогда каждая из высших гармоник на выходе нелинейного звена $y = F(x, px)$ в комплексной форме запишется в виде

$$y_k = a_k e^{i\psi_k} = a(r_k + js_k) \quad (k = 2, 3, \dots), \quad (18.176)$$

где a_k и β_k — искомые амплитуда и фаза высшей гармоники y_k на выходе нелинейного звена, a — амплитуда входной синусоиды. При этом величины r_k и s_k определяются коэффициентами ряда Фурье, деленными на a , т. е.

$$\left. \begin{aligned} r_k &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a \omega \cos \psi) \sin k\psi \, d\psi, \\ s_k &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a \omega \cos \psi) \cos k\psi \, d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (18.177)$$

Следовательно,

$$a_k = a \sqrt{r_k^2 + s_k^2}, \quad \beta_k = \arctg \frac{s_k}{r_k}. \quad (18.178)$$

Затем эти немалые высшие гармоники с выхода нелинейного звена проходят через линейную часть (рис. 18.36) с передаточной функцией

$$W_{\pi}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)},$$

становясь малыми за счет наличия свойства фильтра.

Учитывая перемену знака воздействия в замкнутой системе, получаем малые высшие гармоники для переменной x в виде (18.174), где

$$\delta_k a = \left| \frac{R(jk\omega)}{Q(jk\omega)} \right| a_k, \quad \varphi_k = \beta_k + \arg \frac{-R(jk\omega)}{Q(jk\omega)}.$$

Окончательно находим:

$$\left. \begin{aligned} \delta_k &= \left| \frac{R(jk\omega)}{Q(jk\omega)} \right| \sqrt{r_k^2 + s_k^2}, \\ \varphi_k &= \arg \frac{-R(jk\omega)}{Q(jk\omega)} + \arctg \frac{s_k}{r_k} \end{aligned} \right\} \quad (18.179)$$

или, в комплексной форме,

$$\delta_k e^{j\psi_k} = -\frac{R(jk\omega)}{Q(jk\omega)} (r_k + js_k). \quad (18.180)$$

Итак, по формулам (18.179) легко определяются относительная амплитуда и фаза каждой из высших гармоник (18.174) периодического решения (автоколебаний) для переменной x (18.175). Они вычисляются по известным амплитуде a и частоте ω первого приближения (18.173), определению которого были посвящены предыдущие параграфы данной главы.

Теперь произведем уточнение амплитуды a и частоты ω первой гармоники за счет учета уже найденных высших гармоник. Уточненные значения a и ω обозначаются через a_1 и ω_1 .

Имея в виду форму решения (18.175), где x_1 — первая гармоника, разложим нелинейную функцию $F(x, px)$ в ряд Тейлора:

$$F(x, px) = F(x_1, px_1) + \frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) \sum_{h=2}^n x_h + \frac{\partial^2}{\partial px} F(x_1, px_1) \sum_{h=2}^n px_h + \dots$$

Ограничимся написанными членами разложения ввиду малости высших гармоник $\sum_{k=2}^n x_k$.

Применяя далее разложение в ряд Фурье, по аналогии с § 18.1 получим

$$F(x, px) = \left(q + \Delta q + \frac{q' + \Delta q'}{\omega_1} p \right) x_1 + \text{высшие гармоники}, \quad (18.181)$$

где имеем аналогичные прежним формулам первого приближения (18.7) основные коэффициенты (причем $\psi = \omega_1 t$)

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} F(a_1 \sin \psi, a_1 \omega_1 \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} F(a_1 \sin \psi, a_1 \omega_1 \cos \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (18.182)$$

и новые добавки к ним, вычисляемые, в отличие от этих основных, через первое приближение (18.173):

$$\begin{aligned} \Delta q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n x_k + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n px_k \right] \sin \psi d\psi, \\ \Delta q' &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n x_k + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n px_k \right] \cos \psi d\psi. \end{aligned}$$

Они и дают уточнение первой гармоники x_1 за счет учета высших гармоник искомого периодического решения. Формулы для Δq и $\Delta q'$ с учетом (18.174) можно преобразовать к следующей, удобной для вычислений, форме:

$$\left. \begin{aligned} \Delta q &= \sum_{k=2}^n (I_{h1} \delta_k \cos \varphi_k + I_{h2} \delta_k \sin \varphi_k), \\ \Delta q' &= \sum_{k=2}^n (I_{h3} \delta_k \cos \varphi_k + I_{h4} \delta_k \sin \varphi_k), \end{aligned} \right\} \quad (18.183)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_{h1} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi'_k(\psi) \sin \psi d\psi, & I_{h2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Theta_k(\psi) \sin \psi d\psi, \\ I_{h3} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi'_k(\psi) \cos \psi d\psi, & I_{h4} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Theta_k(\psi) \cos \psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (18.184)$$

причем

$$\begin{aligned} \Psi_k(\psi) &= \frac{\partial}{\partial x} F(a \sin \psi, a \omega \cos \psi) \sin k\psi + \frac{\partial}{\partial px} F(a \sin \psi, a \omega \cos \psi) k \omega \cos k\psi, \\ \Theta_k(\psi) &= \frac{\partial}{\partial x} F(a \sin \psi, a \omega \cos \psi) \cos k\psi + \frac{\partial}{\partial px} F(a \sin \psi, a \omega \cos \psi) k \omega \sin k\psi. \end{aligned}$$

Подставив выражение (18.184) в уравнение системы (18.172) с учетом свойства фильтра, получим уравнение для определения уточненной первой гармоники x_1 в виде

$$\left[Q(p) + R(p) \left(q + \Delta q + \frac{q' + \Delta q'}{\omega_1} p \right) \right] x_1 = 0.$$

Характеристическое уравнение представим в форме

$$Q_1(p) + R(p) \left[q(a_1, \omega_1) + \frac{q'(a_1, \omega_1)}{\omega_1} p \right] = 0, \quad (18.185)$$

где введено обозначение

$$Q_1(p) = Q(p) + R(p) \left(\Delta q + \frac{\Delta q'}{\omega} p \right) \quad (18.186)$$

(замена ω_1 на ω в малых добавках не играет существенной роли). Введение такого обозначения удобно по двум причинам. Во-первых, отделяются искомые a_1 и ω_1 , входящие в q и q' , от известных величин Δq и $\Delta q'$, которые вычисляются здесь предварительно по формулам (18.183) через найденные выше значения δ_h , φ_h и через a и ω , известные из первого приближения (§§ 18.1—18.4). Во-вторых, уравнение (18.185) для определения уточненной первой гармоники $x_1 = a_1 \sin \omega_1 t$ приведено к виду, формально совпадающему с уравнением (18.33), которое определяет первое приближение. Это позволяет использовать при определении уточненной первой гармоники совершенно те же способы, что и в § 18.2 для первого приближения. Кроме того, согласно (18.182) здесь можно использовать все прежние готовые выражения коэффициентов гармонической линеаризации q и q' для конкретно заданных нелинейностей с заменой только a , ω на a_1 , ω_1 .

Итак, полностью найдено искомое уточненное решение для автоколебаний (18.175) в виде

$$x = a_1 \sin \omega_1 t + \sum_{k=2}^n \delta_k a_1 \sin (k\omega_1 t + \varphi_k).$$

Следует помнить, что, используя любой из способов § 18.2 применительно к данной задаче, надо везде вместо $Q(p)$ ставить новый многочлен $Q_1(p)$, отличающийся от $Q(p)$ некоторыми добавками к его коэффициентам и определяемый по формуле (18.186).

Важная особенность уточненного решения состоит еще и в том, что многочлен $Q_1(p)$, в отличие от прежнего $Q(p)$, зависит не только от параметров линейной части системы, но, согласно (18.186) и (18.183), также и от формы нелинейности $F(x, px)$ за счет добавок Δq и $\Delta q'$. Однако, в то время как основные коэффициенты q и q' имеют готовые выражения для каждой нелинейности (см. § 18.1), здесь нельзя применять заранее вычисленные конкретные формулы для величин Δq и $\Delta q'$, так как входящие в формулы (18.183) величины δ_h и φ_h , согласно (18.179), зависят от параметров и структуры линейной части системы. Однако можно заранее вычислить для различных конкретных форм нелинейностей вспомогательные величины r_h и s_h .

О том, какой состав высших гармоник (18.175) в каждой конкретной задаче следует учесть, можно судить по разложению заданной нелинейной функции $F(x, px)$ в ряд Фурье. Так, например, в часто встречающемся на практике случае однозначной нечетносимметричной нелинейности $F(x)$ наиболее существенной из высших гармоник будет третья. Учитывая ее, представляем искомое периодическое решение (автоколебания), согласно (18.175), в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + x_3, & x_1 &= a_1 \sin \omega_1 t, \\ x_3 &= \delta_3 a_1 \sin (3\omega_1 t + \varphi_3). \end{aligned} \right\} \quad (18.187)$$

В этом случае в уравнении для первой гармоники (18.185), как и прежде, будет равен нулю коэффициент q' и характеристическое уравнение будет

$$Q_1(p) + R(p) q = 0, \quad (18.188)$$

где

$$Q_1(p) = Q(p) + R(p) \left(\Delta q + \frac{\Delta q'}{\omega} p \right),$$

причем выражение для коэффициента

$$q = -\frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} F(a_1 \sin \psi) \sin \psi \, d\psi \quad (18.189)$$

остается прежним (§ 18.1) с заменой a на a_1 . Формулы для добавочных коэффициентов Δq и $\Delta q'$ здесь значительно упрощаются, так как в формулах (18.183) и (18.184) многие члены пропадают, а коэффициент $s_k = 0$. В результате приходим к весьма простым соотношениям:

$$\Delta q = h_3 \delta_3 \cos \varphi_3, \quad \Delta q' = 3r_3 \delta_3 \sin \varphi_3, \quad (18.190)$$

где введено новое сокращенное обозначение h_3 , причем

$$\left. \begin{aligned} h_3 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial x} F(a \sin \psi) \sin 3\psi \sin \psi \, dx, \\ r_3 &= \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} F(a \sin \psi) \sin 3\psi \, d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (18.191)$$

Из формул (18.179) определяются относительная амплитуда и фаза третьей гармоники:

$$\delta_3 = r_3 \left| \frac{R(j3\omega)}{Q(j3\omega)} \right|, \quad \varphi_3 = \arg \frac{-R(j3\omega)}{Q(j3\omega)} \quad (18.192)$$

Таким образом, достаточно просто определяется уточненное периодическое решение для случая однозначной нелинейности $F(x)$ с учетом третьей гармоники в виде

$$x = a_1 [\sin \omega_1 t + \delta_3 \sin (3\omega_1 t + \varphi_3)]. \quad (18.193)$$

Проведем вычисление коэффициентов h_3 и r_3 по формулам (18.191) для релейных характеристик, где оно представляет некоторые особенности.

Рассмотрим релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 18.37, а). Входящая под интеграл в формуле для h_3 величина производной dF/dx будет для этой нелинейности равна нулю везде, кроме двух точек $x = \pm b$, где она равна мгновенному импульсу, площадь которого равна c (рис. 18.37, б), т. е. величине c , умноженной на дельта-функцию. Выражение $\sin \psi \, d\psi$ при $x = a \sin \psi$ можно преобразовать к виду

$$\sin \psi \, d\psi = \frac{\sin \psi_1}{\frac{\partial x}{\partial \psi}} dx = \frac{\sin \psi}{a \cos \psi_1} dx = \frac{\operatorname{tg} \psi}{a} dx. \quad (18.194)$$

Поскольку подынтегральное выражение в формуле (18.191) для h_3 на участке интегрирования $(0, \pi/2)$ согласно рис. 18.37, б будет нулем везде, кроме одной точки $\psi = \psi_1$, то эту формулу в данном примере можно переписать в виде

$$h_3 = \frac{4}{\pi a} \sin 3\psi_1 \operatorname{tg} \psi_1 \int_0^a \frac{dF}{dx} dx = \frac{4}{\pi a_1} \sin 3\psi_1 \operatorname{tg} \psi_1 [F(a) - F(0)].$$

Но из рис. 18.37, в имеем

$$\sin \psi_1 = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} \psi_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \sin 3\psi_1 = \frac{3ba^2 - 4b^3}{a^3}, \quad (18.195)$$

а из рис. 18.37, а при $a \geq b$

$$F(a) = c, \quad F(0) = 0.$$

Окончательно получаем

$$h_3 = \frac{4cb^2(3a^2 - 4b^2)}{\pi a^4 \sqrt{a^2 - b^2}} \quad (a \geq b). \quad (18.196)$$

Формула (18.194) для r_3 согласно рис. 18.37, в принимает вид

$$r_3 = \frac{4c}{\pi a} \int_{\psi_1}^{\pi/2} \sin 3\psi d\psi = \frac{4c}{3\pi a} \cos 3\psi_1,$$

откуда с учетом соотношений (18.195) находим

$$r_3 = \frac{4c(a^2 - 4b^2)}{3\pi a^4} \sqrt{a^2 - b^2} \quad (a \geq b). \quad (18.197)$$

В частности, для идеальной релейной характеристики из формул (18.196) и (18.197), полагая $b = 0$, получим:

$$h_3 = 0, \quad r_3 = \frac{4c}{3\pi a}. \quad (18.198)$$

Рассмотрим два примера, иллюстрирующих процесс отыскания высших гармоник при автоколебаниях, а также уточнения первой гармоники за счет учета высших.

Пример 1. Исследуем следующую систему с нелинейностью типа насыщения, автоколебания в которой в первом приближении $x = a \sin \omega t$ уже были найдены ранее, в примере 1 § 18.3, в общем виде.

Пусть теперь заданы параметры системы:

$T_v = 0,005$ сек, $T_o = 0,4$ сек,
 $k = 140$ сек, $k_1 = 100$ сек,
 $k_6 = 0,5$ сек.

Они удовлетворяют соотношению (18.76). Следовательно, здесь имеет место случай, изображенный на рис. 18.14, б, причем согласно (18.79) и (18.74) $k_v = 166$ сек, $k_{\min} = 125$ сек. Заданное значение k лежит между ними, что соответствует области наличия двух периодических режимов. Выведенные выше формулы первого приближения (18.70) и (18.71) при этом дают для неустойчивого режима $a = 2,29$ е, $\omega = 118,2$ сек⁻¹, а для устойчивого режима $a = 21,4$ е, $\omega = 44,8$ сек⁻¹, причем $a_m = 7,08$ е (в точке ω_m рис. 18.14, б).

Наибольший интерес представляет первое (неустойчивое) периодическое решение. Оно указывает границу для начальных условий, вне которой переходный процесс в системе будет расходиться, стремясь к автоколебаниям

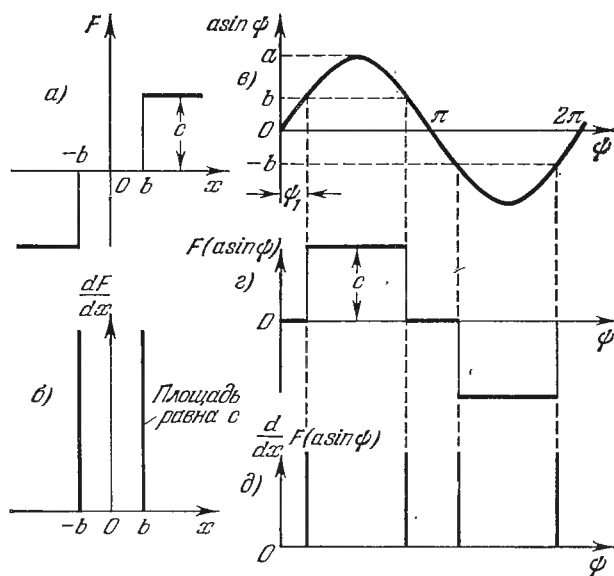


Рис. 18.37.

с очень большой амплитудой $a = 21,4$ е, что практически можно считать неустойчивостью системы в большом. Поэтому уточнение решения с вычислением высших гармоник произведем только для первого периодического решения.

Для данной нелинейности (рис. 18.13, а) по формулам (18.191) находим выражения:

$$h_3 = \frac{4b^3k_1}{\pi a^3} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad r_3 = \frac{4bk_1}{3\pi a} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^{3/2}. \quad (18.199)$$

Из формул (18.192) и (18.68) получаем относительную амплитуду δ_3 и фазу φ_3 третьей гармоники в виде

$$\delta_3 = \frac{r_3}{3\omega} \sqrt{\frac{(k - 9k_6T_1\omega^2)^2 + 9k_6^2\omega^2}{(9T_1^2\omega^2 + 1)(9T_2^2\omega^2 + 1)}},$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{3k_6\omega}{k - 9T_1k_6\omega^2} - \operatorname{arctg} 3T_1\omega - \operatorname{arctg} 3T_2\omega.$$

Вычисление по этим формулам дает

$$\delta_3 = 0,0317, \quad \varphi_3 = -1,875.$$

Для уточнения первой гармоники за счет только что вычисленной третьей гармоники находим согласно (18.190) добавки к коэффициентам гармонической линеаризации:

$$\Delta q = h_3\delta_3 \cos \varphi_3, \quad \Delta q' = 3r_3\delta_3 \sin \varphi_3,$$

подставляя которые в (18.188) согласно (18.68) придем к уточненному характеристическому уравнению

$$(T_0p + 1)(T_{\text{в}}p + 1)p + [k + (T_{\text{в}}p + 1)k_6p] \left(\Delta q + \frac{\Delta q'}{\omega} p \right) +$$

$$+ [k + (T_{\text{в}}p + 1)k_6p] q(a_1) = 0, \quad (18.200)$$

где аналогично (18.66) имеем:

$$\left. \begin{aligned} q &= k_1 \text{ при } a_1 \leq b, \\ q &= \frac{2k_1}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a_1} + \frac{b}{a_1} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a_1^2}} \right) \text{ при } a_1 > b. \end{aligned} \right\} \quad (18.201)$$

Подставив в уравнение (18.200) $p = j\omega_1$ и выделив вещественную и мнимую части, получим два уравнения:

$$kq(a_1) + k\Delta q - [T_0 + T_{\text{в}} + T_{\text{в}}k_6q(a_1)]\omega_1^2 - \left(T_{\text{в}}\Delta q + \frac{\Delta q'}{\omega}\right)k_6\omega_1^2 = 0,$$

$$[1 + k_6q(a_1)]\omega_1 + \left(k_6\Delta q + k\frac{\Delta q'}{\omega}\right)\omega_1 - T_0T_{\text{в}}\omega_1^3 - T_{\text{в}}k_6\frac{\Delta q'}{\omega}\omega_1^3 = 0.$$

Эти уточненные уравнения отличаются от прежних уравнений первого приближения несколькими добавочными членами, но способ решения их остается прежним. Из последнего уравнения находим

$$\omega_1^2 = \frac{1 + k_6q(a_1) + k_6\Delta q + k\frac{\Delta q'}{\omega}}{T_0T_{\text{в}} + T_{\text{в}}k_6\frac{\Delta q'}{\omega}}, \quad (18.202)$$

а из первого

$$k = \frac{T_0 + T_{\text{в}} + T_{\text{в}}k_6q(a_1) + \left(T_{\text{в}}\Delta q + \frac{\Delta q'}{\omega}\right)k_6}{q(a_1) + \Delta q} \omega_1^2. \quad (18.203)$$

Задаваясь разными значениями амплитуды a_1 и вычисляя каждый раз по формулам (18.201) — (18.203) значения $q(a_1)$, ω_1^2 и k , получим графики $a_1(k)$ типа рис. 18.14, но уже для уточненного значения амплитуды a_1 первой гармоники периодического решения.

Для заданного значения $k = 140$ это уточнение дает $a_1 = 2,39$ е, $\omega_1 = 117,8$ сек⁻¹. Значения эти достаточно близки к величинам первого приближения, а подсчитанная выше амплитуда третьей гармоники достаточно мала.

Пример 2. Пусть в системе автоматического регулирования используется двухфазный индукционный двигатель, описываемый нелинейным уравнением (18.119). В примере 7 § 18.3 найдены автоколебания для первого приближения в общем виде. Рассмотрим следующий числовой пример:

$$T_3 = 0,5 \text{ сек}, \quad T_1 = 0,1 \text{ сек}, \quad k_1 k = 26,5 \text{ сек},$$

с двумя вариантами нелинейности:

а) слабая нелинейность

$$b_1 = 0,01, \quad b_2 = 0,1, \quad b_3 = 0,002;$$

б) сильная нелинейность

$$b_1 = 0,1, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 0,166.$$

Расчет по формулам первого приближения (18.126) и (18.128) дает автоколебания в виде $x = a \sin \omega t$, где для варианта слабой нелинейности

$$a = 8,14, \quad \omega = 6 \text{ сек}^{-1},$$

а для варианта сильной нелинейности

$$a = 0,834, \quad \omega = 6 \text{ сек}^{-1}.$$

Вычислим теперь высшие гармоники. Для учета второй и третьей гармоник воспользуемся формулой (18.178). Для рассматриваемой в настоящем примере нелинейности $F(x, px)$ коэффициенты r_2 и s_2 , подсчитанные по формулам (18.177), оказываются нулями. Поэтому остается только третья гармоника, для которой по формулам (18.177) для данной нелинейности с учетом обозначений (18.121) находим:

$$r_3 = -\frac{2}{5} b_2 a - \frac{1}{3} b_3 a^2, \quad s_3 = -\frac{3}{5} T_3 b_1 a \omega. \quad (18.204)$$

Тогда по формулам (18.179) с учетом того, что согласно (18.124)

$$Q(p) = (T_3 p + 1)(T_1 p + 1)p + k_1 k, \quad R(p) = (T_1 p + 1)p,$$

находим относительную амплитуду и фазу третьей гармоники:

$$\delta_3 = 3\omega \sqrt{\frac{(9T_1^2 \omega^2 + 1)(r_3^2 + s_3^2)}{[k_1 k - 9(T_1 + T_3)\omega^2]^2 + 9\omega^2(1 - 9T_1 T_3 \omega^2)^2}},$$

$$\varphi_3 = -\frac{\pi}{2} + \arctg 3T_1 \omega - \arctg \frac{3\omega(1 - 9T_1 T_3 \omega^2)}{k_1 k - 9(T_1 + T_3)\omega^2} + \arctg \frac{s_3}{r_3}.$$

При указанных выше данных получаем для варианта слабой нелинейности

$$\delta_3 = 0,041, \quad \varphi_3 = -0,377,$$

а для сильной нелинейности

$$\delta_3 = 0,042, \quad \varphi_3 = -0,0384.$$

После этого уточняется первая гармоника автоколебаний $a_1 \sin \omega_1 t$. Для этого по формулам (18.183) находим величины добавок Δq и $\Delta q'$ к коэффициентам гармонической линеаризации:

$$\Delta q = \frac{3}{5} T_3 b_1 a \omega \delta_3 \sin \varphi_3 - \left(\frac{2}{5} b_2 + b_3 a \right) a \delta_3 \cos \varphi_3,$$

$$\Delta q' = -\frac{2}{5} T_3 b_1 a \omega \delta_3 \cos \varphi_3 - \left(\frac{3}{5} b_2 + b_3 a \right) a \delta_3 \sin \varphi_3.$$

Поэтому новое характеристическое уравнение для определения уточненной первой гармоники будет

$$[(T_3 p + 1) + (T_3 b_1 a_1 p + b_2 a_1 + b_3 a_1^2)] (T_1 p + 1) p + k_1 k + \left(\Delta q + \frac{\Delta q'}{\omega} p \right) (T_1 p + 1) p = 0.$$

Подставляя $p = j\omega_1$ и выделяя вещественную и мнимую части, получим

$$k_1 k - [T_3 (1 + b_1 a_1) + T_1 (1 + b_2 a_1 + b_3 a_1^2)] \omega_1^2 - \left(T_1 \Delta q + \frac{\Delta q'}{\omega} \right) \omega_1^2 = 0,$$

$$(1 + b_2 a_1 + b_3 a_1^2) \omega_1 + \Delta q \omega_1 - T_1 T_3 (1 + b_1 a_1) \omega_1^3 - T_1 \frac{\Delta q'}{\omega} \omega_1^3 = 0.$$

Эти уравнения решаются тем же методом, что и (18.125), а именно из второго уравнения получаем

$$\omega_1^2 = \frac{1 + b_2 a_1 + b_3 a_1^2 + \Delta q}{T_1 T_3 (1 + b_1 a_1) + T_1 \frac{\Delta q'}{\omega}},$$

а из первого

$$k = \left[T_3 (1 + b_1 a_1) + T_1 (1 + b_2 a_1 + b_3 a_1^2) + \left(T_1 \Delta q + \frac{\Delta q'}{\omega} \right) \right] \omega_1^2.$$

Эти уравнения приводят также к графику $a_1(k)$ вида рис. 18.23, в.

Для приведенных выше числовых значений параметров системы получаем следующие уточненные значения амплитуды и частоты автоколебаний: для слабой нелинейности

$$a_1 = 8,03, \quad \omega_1 = 5,99 \text{ сек}^{-1},$$

для сильной нелинейности

$$a_1 = 0,820, \quad \omega_1 = 5,98 \text{ сек}^{-1}.$$

Как видим, сильная нелинейность ¹⁾ значительно снижает амплитуду автоколебаний (в линейной системе было бы $a_1 = \infty$). Этот результат получался выше в решении по первому приближению и подтверждается теперь уточненным решением.

§ 18.6. Частотный метод определения автоколебаний

Здесь, следуя Л. С. Гольдфарбу [32, 124], будем рассматривать простые нелинейности $x_2 = F(x_1)$, так как в других случаях получаются более сложные графические построения.

Пусть в нелинейной системе автоматического регулирования выделено, как обычно, нелинейное звено (рис. 16.1). Разомкнем систему указанным

¹⁾ Нелинейность в данном примере характеризует степень отклонения реальной криволинейной характеристики двухфазного индукционного двигателя от прямолинейной.

на рис. 18.38, а образом, причем уравнение нелинейного звена будет

$$x_2 = F(x_1), \quad (18.205)$$

а линейной части системы —

$$Q(p)x_3 = R(p)x_2. \quad (18.206)$$

Замыкание системы соответствует замене

$$x_3 = -x_1. \quad (18.207)$$

Подадим на вход нелинейного звена (рис. 18.38, а) синусоидальные колебания

$$x_1 = a \sin \omega t. \quad (18.208)$$

На выходе нелинейного звена получим согласно (18.205) вынужденные колебания

$$x_2 = F(a \sin \omega t), \quad (18.209)$$

которые можно найти, например, как показано на рис. 18.38, б или в.

Разложим (18.209) в ряд Фурье и сохраним только основную синусоиду (первую гармонику), отбросив все высшие гармоники. Очевидно, что это

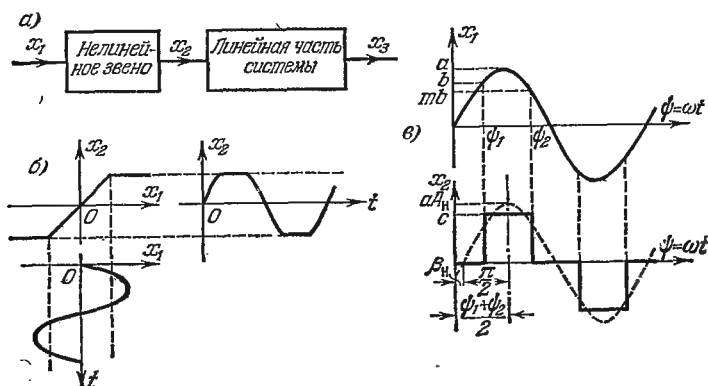


Рис. 18.38.

приближенное представление вынужденных колебаний эквивалентно гармонической линеаризации нелинейностей, рассмотренной в § 18.1. На основании этого для определения первой гармоники вынужденных колебаний величины x_2 можно воспользоваться частотным аппаратом, который применялся ранее для линейных систем, следующим образом.

Согласно формулам (18.9) приближенная передаточная функция нелинейного звена с уравнением $x_2 = F(x_1)$ будет

$$W_H = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p$$

и

$$W_H = q(a)$$

соответственно при наличии гистерезисной петли и при отсутствии ее. При этом выражения $q(a)$ и $q'(a)$ определяются формулами (18.10).

Приближенный комплексный коэффициент усиления, или приближенная амплитудно-фазовая характеристика нелинейного звена с уравнением $x_2 = F(x_1)$, при наличии гистерезисной петли, следовательно, будет

$$W_H(a) = q(a) + jq'(a), \quad (18.210)$$

а без гистерезисной петли —

$$W_H(a) = q(a). \quad (18.214)$$

Эта приближенная амплитудно-фазовая характеристика определяет амплитуду и фазу первой гармоники на выходе нелинейного звена (если на его вход подается синусоида), а именно выражение (18.210) можно представить в виде

$$W_H(a) = A_H(a) e^{j\beta_H(a)},$$

где

$$A_H(a) = \sqrt{[q(a)]^2 + [q'(a)]^2}, \quad \beta_H(a) = \arctg \frac{q'(a)}{q(a)}. \quad (18.212)$$

Следовательно, амплитуда первой гармоники на выходе будет $a_2 = aA_H(a)$, а фазовый сдвиг — $\beta_H(a)$, где a — амплитуда на входе нелинейного звена.

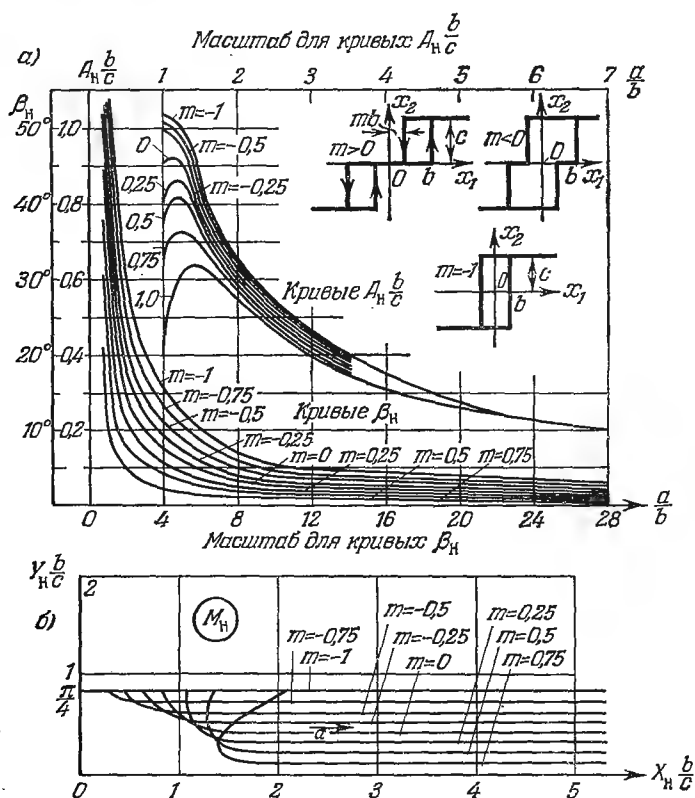


Рис. 18.39.

В результате получим следующие вынужденные колебания на выходе нелинейного звена (первая гармоника):

$$x_2 \approx aA_H(a) \sin[\omega t + \beta_H(a)].$$

Например, выходная величина x_2 релейного звена с характеристикой рис. 18.1, a меняется в процессе вынужденных колебаний по закону, изображенному сплошной ломаной линией на рис. 18.38, в. Пунктиром показана

основная синусоида для нее, причем из (18.212) и (18.15) имеем:

$$a_2 = aA_n = \frac{4c}{\pi} \sin \frac{\psi_2 - \psi_1}{2} = \frac{2c \sqrt{2}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{mb^2}{a^2} + \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{m^2 b^2}{a^2}\right)}},$$

$$\beta_n = - \left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = - \operatorname{arctg} \frac{b(1-m)}{\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - m^2 b^2}}.$$

Действительная ступенчатая кривая заменяется в данном случае синусоидой (первая гармоника), вершина которой совпадает с осью симметрии действительного прямоугольника (рис. 18.38, е).

Для нелинейных звеньев с уравнением вида $x_2 = F(x_1)$ без гистерезисной петли, как следует из § 18.1, $q'(a) = 0$. Следовательно, для таких звеньев

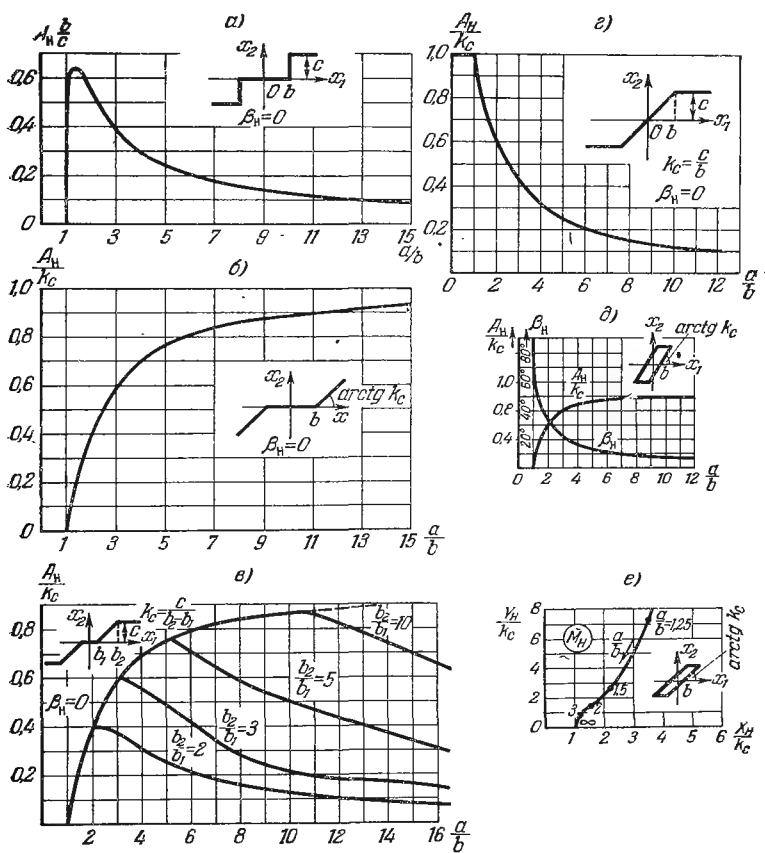


Рис. 18.40.

$A_n = q(a)$ и $\beta_n = 0$, т. е. вынужденные колебания на выходе не имеют фазового сдвига.

Одним из главных отличий вынужденных колебаний нелинейных систем от линейных является их существенная зависимость не только от частоты, но и от амплитуды входных колебаний. Эту главную особенность как раз и улавливает написанное здесь приближенное выражение амплитудно-фазовой характеристики нелинейного звена. В формулах (18.210) — (18.212) получилась зависимость только от амплитуды a , потому что ограничились рассмотре-

нием только нелинейности вида $x_2 = F(x_1)$. Для более сложных нелинейных звеньев в амплитудно-фазовую характеристику войдет также и частота ω . Кроме того, как увидим ниже, зависимость от частоты будет всегда вводиться линейной частью системы.

В § 18.1 были приведены выражения $q(a)$ и $q'(a)$ для наиболее типичных релейных и других простейших нелинейных звеньев. На основании этого строятся приближенные амплитудные и фазовые характеристики путем вычислений по формулам (18.212). Результаты для простейших случаев приведены на рис. 18.39 и 18.40. Там приведены также и обратные амплитудно-фазовые характеристики

$$M_H(a) = \frac{1}{W_H(a)} = X_H(a) + jY_H(a). \quad (18.213)$$

На графиках указаны все необходимые обозначения и типы нелинейных характеристик звеньев. Аналогичным путем можно построить графики и для других конкретных нелинейных звеньев.

Амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы согласно (18.206) имеет вид

$$W_H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} \quad (18.214)$$

Общая приближенная амплитудно-фазовая характеристика всей разомкнутой цепи с нелинейным звеном будет

$$W(a, \omega) = W_H(a) W_H(j\omega) = [q(a) + jq'(a)] W_H(j\omega). \quad (18.215)$$

Следовательно, амплитуда и фаза первой гармоники выходной величины x_3 , определяемые формулами

$$a_3 = |W(a, \omega)| a \quad \text{и} \quad \beta_3 = \arg W(a, \omega), \quad (18.216)$$

зависят здесь не только от частоты ω , как в линейных системах, но еще и от величины входной амплитуды a .

Отыскание автоколебаний замкнутой системы. Незатухающие синусоидальные колебания с постоянной амплитудой в замкнутой системе определяются согласно частотному критерию устойчивости (см. § 6.5) прохождением амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы через точку $(-1, j0)$, т. е. равенством $W = -1$. Это и будет в данном случае условием существования периодического решения для замкнутой нелинейной системы, которое принимается приближенно синусоидальным. Итак, имеем условие

$$W(a, \omega) = -1.$$

Учитывая (18.215) и (18.213), это можно записать в виде

$$W_H(j\omega) = -M_H'(a) \quad (18.217)$$

или

$$W_H(j\omega) = -\frac{1}{q(a) + jq'(a)}, \quad (18.218)$$

где $q'(a) = 0$ в случае отсутствия гистерезисной петли (правая часть (18.218) в этом случае будет вещественной).

Левая часть уравнения (18.218) или (18.217) представляет собой амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы, а правая — обратную амплитудно-фазовую характеристику нелинейного звена (для первой гармоники), взятую с обратным знаком. Решение этого уравнения можно получить графически как точку пересечения указанных двух характеристик

(рис. 18.44, а и б). В точке пересечения из кривой $W_n(j\omega)$ берем значение частоты ω_n , а из кривой $-M_n(a)$ берем величину амплитуды a_n искомого периодического решения. Рис. 18.44, а соответствует системе с нелинейным звеном, имеющим гистерезисную петлю, когда согласно (18.210) и (18.213)

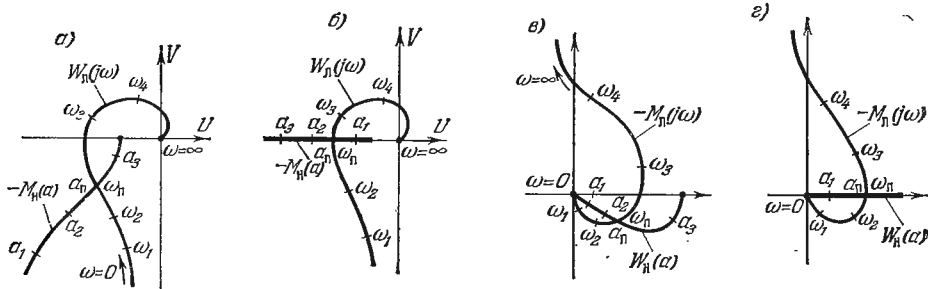


Рис. 18.44.

характеристика $M_n(a)$ комплексна. При отсутствии гистерезисной петли, когда $M_n(a)$ вещественна, получаем график рис. 18.44, б.

Вместо (18.217) можно пользоваться также выражением

$$-\frac{1}{W_n(j\omega)} = W_n(a), \quad (18.219)$$

т. е. искать решение как точку пересечения амплитудно-фазовой характеристики нелинейного звена с обратной амплитудно-фазовой характеристикой линейной части системы, взятой с обратным знаком (рис. 18.44, в и г).

Устойчивость найденного периодического решения грубо оценивается следующим образом (этот метод не является строго обоснованным, но во многих случаях его применения достаточно). Дадим малое приращение амплитуде: $a = a_n + \Delta a$. Тогда при положительном Δa получим на кривой $-M_n(a)$,

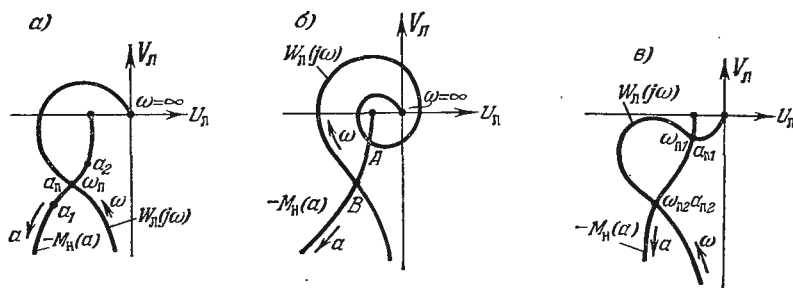


Рис. 18.42.

например, точку a_1 (рис. 18.42, а), а при отрицательном Δa — точку a_2 . Для устойчивости периодического решения требуется, очевидно, чтобы при положительном Δa колебания затухали, а при отрицательном Δa — расходились. Для этого согласно частотному критерию (§ 6.5) в случае устойчивой или нейтральной разомкнутой цепи требуется, чтобы суммарная амплитудно-фазовая характеристика $W(a, \omega)$ в первом случае не охватывала точку $(-1, j0)$, а во втором — охватывала. Но общая характеристика $W(a, \omega)$ не чертится в рассмотренном способе. Поэтому высказанное положение надо перенести на свойства кривых $W_n(j\omega)$ и $-M_n(a)$.

Отсюда получаем, что для устойчивости периодического решения (если линейная часть системы в разомкнутом состоянии устойчива или нейтральна) требуется, чтобы амплитудно-фазовая характеристика линейной части $W_{\text{л}}(j\omega)$ не охватывала точку a_1 , соответствующую положительному Δa , и охватывала точку a_2 , соответствующую отрицательному Δa . По этому признаку графики рис. 18.42, a и b (в точке B) дают устойчивое периодическое решение, которое соответствует автоколебаниям замкнутой системы с частотой $\omega_{\text{п2}}$ и амплитудой $a_{\text{п2}}$.

На графике рис. 18.42, c значения $\omega_{\text{п1}}$ и $a_{\text{п1}}$ соответствуют неустойчивому, а значения $\omega_{\text{п2}}$, $a_{\text{п2}}$ — устойчивому периодическому решению. Это в простейшем случае может означать устойчивость системы в малом (до амплитуды $a_{\text{п1}}$) и автоколебания с частотой $\omega_{\text{п2}}$ и амплитудой $a_{\text{п2}}$, если начальная амплитуда колебаний в переходном процессе превышает значения $a_{\text{п1}}$.

В таких исследованиях предполагается, что все параметры системы заданы в числовом виде (или амплитудно-фазовые характеристики звеньев в виде определенных графиков). Если же требуется выяснить влияние одного или двух каких-нибудь параметров системы, то надо рассмотреть все возможные комбинации кривых $W_{\text{л}}(j\omega)$ и $-M_{\text{н}}(a)$ при разных значениях этих параметров.

Рассмотрим примеры.

Система автоматического регулирования температуры. Уравнения системы автоматического регулирования температуры с релейным звеном

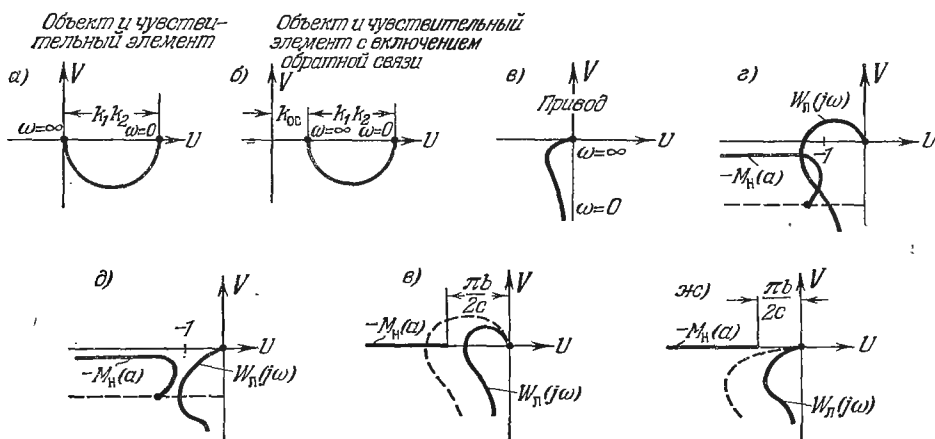


Рис. 18.43.

были описаны в примере 5 § 18.3. Выражение амплитудно-фазовой характеристики линейной части системы с добавлением жесткой обратной связи будет

$$W_{\text{л}}(j\omega) = \frac{k_3}{(T_3 j\omega + 1) j\omega} \left[\frac{k_1 k_2}{T_1 j\omega + 1} + k_{\text{ос}} \right]. \quad (18.220)$$

В данном случае очевидно, что общий знаменатель передаточной функции линейной части системы

$$Q(p) = (T_1 p + 1)(T_3 p + 1)p \quad (18.221)$$

не имеет корней с положительной вещественной частью, а нулевой корень говорит о том, что линейная часть системы нейтральна.

Выражение, стоящее в квадратных скобках (18.220), при $k_{\text{ос}} = 0$ (система без обратной связи) соответствует аperiodическому звену (регулируемый объект и чувствительный элемент). Оно изображено на рис. 18.43, a . При наличии же жесткой обратной связи в системе ($k_{\text{ос}} \neq 0$) этот график сдвигается вправо на величину $k_{\text{ос}}$ (рис. 18.43, b).

Множитель перед квадратной скобкой (18.220) соответствует аperiodическому интегрирующему звену (привод с регулирующим органом). Он изображен на рис. 18.43, *в*.

Перемножением этих характеристик получаем амплитудно-фазовую характеристику $W_{\text{л}}(j\omega)$ линейной части системы (в разомкнутом состоянии) соответственно при отсутствии обратной связи (рис. 18.43, *г*) и при наличии жесткой обратной связи (рис. 18.43, *д*). Нанесем на эти же графики кривую обратной по величине и по знаку амплитудно-фазовой характеристики — $M_{\text{н}}(a)$ нелинейного звена (в данном случае — реле). Здесь эта кривая изображена в соответствии с рис. 18.39, *б* для того случая, когда реле характеризуется графиком рис. 18.20, *а*, причем $b_2 = b$, $b_1 = mb$.

Как видно из рис. 18.43, *г*, в данном случае в замкнутой системе регулирования без обратной связи возможны автоколебания, так как кривые $W_{\text{л}}(j\omega)$ и $-M_{\text{н}}(a)$ пересекаются, а введением обратной связи можно уничтожить эти автоколебания (рис. 18.43, *д*). Очевидно также, что и выбором параметров линейной части системы (т. е. деформацией кривой $W_{\text{л}}$ на рис. 18.43, *г*) можно было бы уничтожить автоколебания замкнутой нелинейной системы и без обратной связи. Напротив, неудачный выбор параметров может привести к автоколебаниям системы даже и при наличии жесткой обратной связи, если на рис. 18.43, *д* кривые пересекутся. Чем меньше гистерезисная петля (рис. 18.20, *а*), тем больше будет m (рис. 18.39) и тем легче, как видно из рис. 18.39, *б* и рис. 18.43, *г*, *д*, сделать замкнутую систему устойчивой.

Когда реле имеет чисто гистерезисную характеристику (рис. 18.20, *г*), кривая $-M_{\text{н}}(a)$ вырождается согласно рис. 18.39, *б* ($m = -1$) в прямую (пунктир на рис. 18.43, *д*), причем добиться уничтожения автоколебаний в этом случае нельзя, а можно бороться лишь за уменьшение их амплитуды.

Если в характеристике реле с зоной нечувствительности не будет гистерезисной петли (рис. 18.20, *б*), то согласно рис. 18.40, *а* и формуле (18.213) обратная амплитудно-фазовая характеристика нелинейного звена $-M_{\text{н}}(a)$ будет вещественной, как показано на рис. 18.43, *е* и *ж*. При этом замкнутая система без обратной связи может иметь автоколебания, если $W_{\text{л}}(j\omega)$ примет очертание, показанное пунктиром (рис. 18.43, *е*). Введение же жесткой обратной связи, как видно из рис. 18.43, *ж*, полностью уничтожает автоколебания.

Из этого предварительного рассмотрения можно сделать вывод, во-первых, о важном стабилизирующем свойстве дополнительной жесткой обратной связи в системе и, во-вторых, о стабилизирующем свойстве зоны нечувствительности реле. С точки зрения устойчивости системы выгодно увеличивать и то и другое. Однако эти возможности ограничены из-за увеличения статической ошибки системы при усилении жесткой обратной связи и при увеличении зоны нечувствительности реле. Последнее связано с тем, что система может находиться в состоянии равновесия в любой точке зоны нечувствительности; получается не одно определенное состояние равновесия, а целая область возможных состояний равновесия с разными значениями регулируемой величины.

После сделанных предварительных заключений перейдем к определению амплитуды и частоты автоколебаний в тех случаях, когда последние имеют место.

В случае идеальной релейной характеристики в соответствии с (18.211) и (18.18) имеем

$$-M_{\text{н}}(a) = -\frac{1}{W_{\text{н}}(a)} = -\frac{\pi}{4c} a \quad (0 \leq a \leq \infty) \quad (18.222)$$

$M_{\text{н}}(a)$ заполняет всю отрицательную вещественную ось, рис. 18.44, *а*). Поэтому $W_{\text{л}}(j\omega)$ при отсутствии жесткой обратной связи (сплошная кривая) пересекает ее, а при наличии жесткой обратной связи не пересекает (пунк-

тирная кривая). В первом случае получаем точку пересечения D , определяющую периодическое решение (a_n, ω_n). Оно будет устойчиво (т. е. соответствует автоколебаниям), так как кривая $W_n(j\omega)$ охватывает участок прямой $-M_n(a)$ с меньшими амплитудами (линейная часть согласно (18.221) нейтральна, вследствие чего этот критерий можно применять). Во втором же случае кривая $W_n(j\omega)$ пересекается с прямой $-M_n(a)$ только в точке, где $a = 0, \omega = \infty$, т. е. автоколебания отсутствуют (конечная амплитуда получится, если учесть постоянную T_2).

Амплитуда a_n автоколебаний в первом случае определяется по расстоянию l (рис. 18.44, a) на линии $-M_n(a)$ до точки пересечения, причем с учетом (18.222) получаем

$$a_n = \frac{4c}{\pi d}, \quad (18.223)$$

где l берется из графика или вычисляется по формуле

$$l = -U_n(\omega_n),$$

причем величина частоты автоколебаний ω_n находится из условия

$$V_n(\omega_n) = 0,$$

если $U_n(\omega_n)$ и $V_n(\omega_n)$ обозначают вещественную и мнимую части выражения $W_n(j\omega)$ при $k_{oc} = 0$, т. е.

$$W_n(j\omega) = \frac{k_1 k_2 k_3}{(T_1 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1)j\omega}. \quad (18.224)$$

Отсюда видно, например, что с увеличением передаточного числа регулятора $k_2 k_3$ увеличивается амплитуда автоколебаний.

Для характеристики реле в виде рис. 18.20, a поведение системы без жесткой обратной связи поясняется рис. 18.44, b . Здесь автоколебания могут отсутствовать (кривая 1 рис. 18.44, b), возможно одно периодическое решение (кривые 2 и 3, пересекающиеся в точке B) или два периодических решения (кривые 2 и 4, пересекающиеся в точках A и C).

При этом кривая 3 соответствует меньшим, а кривая 4 — большим значениям t в релейной характеристике (см. рис. 18.39). Точки B и A отвечают устойчивым автоколебаниям. Точка C отвечает неустойчивому периодическому процессу, что может означать устойчивость системы в малом (при $a < a_c$) и стремление к автоколебательному процессу с амплитудой $a = a_A$ в большом. Величины амплитуды и частоты автоколебаний определяются по самим кривым в точках их пересечения.

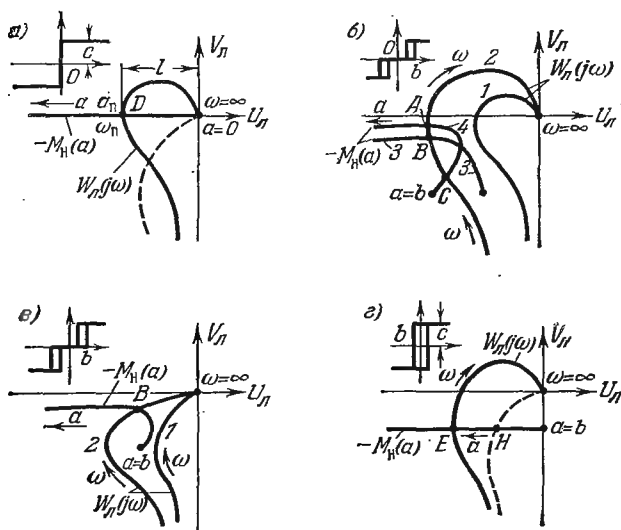


Рис. 18.44.

В данном случае влияние величины передаточного числа $k_2 k_3$ регулятора без жесткой обратной связи заключается в том, что с увеличением $k_2 k_3$ осуществляется переход от кривой 1 к кривой 2 (рис. 18.44, b), т. е. авто-

колебания в системе появляются только тогда, когда передаточное число k_2k_3 превышает некоторое граничное значение, определяемое моментом касания кривой 1 с кривой 3 или 4.

Аналогично определяются автоколебания и при наличии жесткой обратной связи, как показано на рис. 18.44, в.

Наконец, при чисто гистерезисной характеристике реле получаем только автоколебательный процесс (рис. 18.44, г), амплитуда и частота которого без жесткой обратной связи определяются точкой E, а при наличии жесткой обратной связи — точкой H.

Во всех рассмотренных случаях, как и вообще в рассматриваемом частотном методе, через a_{Π} обозначается амплитуда автоколебаний входной величины нелинейного звена, т. е. в данном случае величины x . Чтобы определить амплитуду a_{θ} автоколебаний регулируемой величины θ (температуры), надо найти передаточную функцию, связывающую величины x и θ :

$$\theta = \frac{k_1}{k_1k_2 + k_{oc}(T_1p + 1)} x,$$

и следовательно,

$$a_{\theta} = \frac{k_1 a_{\Pi}}{|k_1k_2 + k_{oc}(T_1j\omega_{\Pi} + 1)|} = \frac{k_1 a_{\Pi}}{\sqrt{(k_1k_2 + k_{oc})^2 + k_{oc}^2 T_1^2 \omega_{\Pi}^2}}.$$

Для системы без обратной связи ($k_{oc} = 0$)

$$a_{\theta} = \frac{a_{\Pi}}{k_2}.$$

Аналогично можно определить амплитуду первой гармоники автоколебаний для других переменных в данной системе.

Учет временного запаздывания в реле. В рассматриваемом выше примере системы автоматического регулирования температуры, считалось, что в характеристике реле рис. 18.20 величины b_1 , b_2 , b заданы постоянными, т. е. считалось, что характеристики реле имеют обычный гистерезисный вид

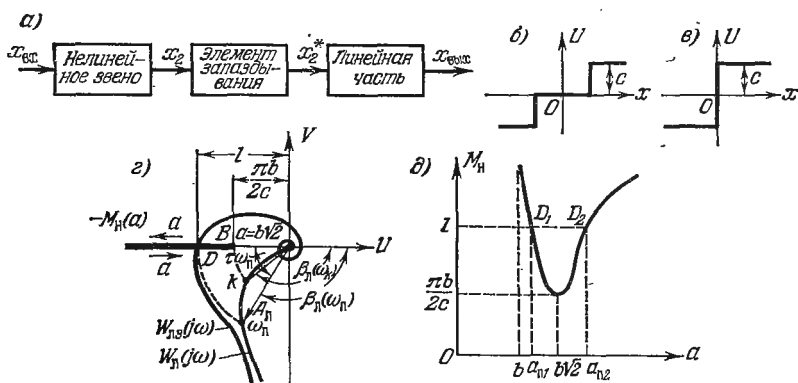


Рис. 18.45.

с заданным по входной координате отставанием в срабатывании реле. Теперь же будем считать, что имеются данные запаздывания во времени срабатывания и отпускания реле (одинаковые). Такое нелинейное звено с запаздыванием можно разбить на два элемента: 1) обычное нелинейное звено, характеризующееся графиком рис. 18.45, б или в, и 2) элемент запаздывания (рис. 18.45, а), описываемый уравнением

$$x_2^* = x_2 e^{-\tau p}.$$

Тогда можно будет записать выражение амплитудно-фазовой характеристики линейной части системы вместе с элементом запаздывания в виде

$$W_{\text{лз}}(j\omega) = W_{\text{л}}(j\omega) e^{-j\tau\omega} = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} e^{-j\tau\omega}. \quad (18.225)$$

Правило построения такой характеристики описано в главе 14.

Пусть реле (после выделения элемента запаздывания) характеризуется графиком рис. 18.45, б. В этом случае для системы с жесткой обратной связью получим соответственно кривые $W_{\text{л}}(j\omega)$ и $W_{\text{лз}}(j\omega)$, изображенные на рис. 18.45, г, а также прямую $-M_{\text{н}}(a)$ на основании формулы (18.213) и рис. 18.40, а. Если кривые $W_{\text{лз}}(j\omega)$ и $-M_{\text{н}}(a)$ пересекаются, то будут иметь место автоколебания. Но, как видно из рис. 18.45, г, при достаточно малых запаздываниях τ указанные кривые могут не пересекаться, т. е. автоколебаний не будет.

Здесь, как и в линейных системах, можно определить критическое время запаздывания, до которого автоколебания отсутствуют, без построения кривой $W_{\text{лз}}(j\omega)$, а только по кривым $W_{\text{л}}(j\omega)$ и $-M_{\text{н}}(a)$. В самом деле, в критическом случае некоторая точка кривой $W_{\text{лз}}(j\omega)$ попадет в крайнюю точку B (рис. 18.45, г). Это, как видно из чертежа, соответствует такой точке K кривой $W_{\text{л}}(j\omega)$, в которой

$$\left. \begin{aligned} A_{\text{л}}(\omega_k) &= \frac{\pi b}{2c}, \\ \beta_{\text{л}}(\omega_k) - \tau_k \omega_k &= -\pi \quad (\beta_{\text{л}} < 0). \end{aligned} \right\} \quad (18.226)$$

Из первого условия определяется величина ω_k , и из второго — критическое время запаздывания:

$$\tau_k = \frac{1}{\omega_k} [\pi + \beta_{\text{л}}(\omega_k)] \quad (\beta_{\text{л}} < 0). \quad (18.227)$$

Такое решение можно найти непосредственно из графика $W_{\text{л}}(j\omega)$ или же аналитически, используя выражение (18.220).

Если же реле не имеет зоны нечувствительности, т. е. $b = 0$, то точка B попадет в начало координат на рис. 18.45, г и автоколебания будут при любом значении времени запаздывания в срабатывании реле ($\tau_k = 0$). Поэтому выгодно, чтобы временное запаздывание в реле, рассматриваемое здесь, было бы сравнительно малым, а зона нечувствительности имела бы большую величину (но не превышала допустимых значений, полученных из статического расчета точности регулирования).

Амплитуда и частота автоколебаний при наличии запаздывания определяются следующим образом. Точка пересечения D (рис. 18.45, г) дает два периодических решения, так как в ней на прямой $-M_{\text{н}}(a)$ имеются два значения a . Это следует из графика рис. 18.40, а, причем на основании (18.16) имеем

$$M_{\text{н}}(a) = \frac{1}{W_{\text{н}}(a)} = \frac{\pi a^2}{4c \sqrt{b^2 - a^2}}, \quad (18.228)$$

что изображается графиком рис. 18.45, д. Расстоянию от начала координат l точки пересечения D на рис. 18.45, г соответствуют две точки графика D_1 и D_2 на рис. 18.45, д, которые дают два значения амплитуды: $a_{\text{н1}}$ и $a_{\text{н2}}$. Частота $\omega_{\text{н}}$ обоих периодических решений одинакова и определяется точкой D на кривой $W_{\text{лз}}(j\omega)$.

При этом периодическое решение с меньшей амплитудой $a_{\text{н1}}$ будет неустойчивым, а с большей амплитудой $a_{\text{н2}}$ — устойчивым, так как в первом случае точка с положительным приращением Δa на линии $-M_{\text{н}}(a)$ охватывается кривой $W_{\text{лз}}(j\omega)$, а во втором случае — не охватывается. Следова-

тельно, могут иметь место устойчивость системы в малом (до амплитуд $a_{п1}$) и автоколебательный процесс с большой амплитудой, к которому стремится система при начальных амплитудах переходного процесса, превышающих значение $a_{п1}$.

Заметим, что точку пересечения D кривой $W_{лз}(j\omega)$ с линией $-M_n(a)$ можно найти без построения кривой $W_{лз}(j\omega)$ непосредственно по амплитудно-фазовой характеристике $W_{л}(j\omega)$ линейной части системы без элемента запаздывания. Для этого нужно на кривой $W_{л}(j\omega)$ найти такую точку ω_n (рис. 18.45, *з*), которая бы при повороте вектора $A_{л}$ на угол $\tau\omega_n$ попала на линию $-M_n(a)$, что и даст нам точку D (величина запаздывания τ задана, ω_n неизвестна). Условие для определения ω_n будет

$$\tau\omega_n + |\beta_{л}| = \pi;$$

после этого находится величина $l = A_{л}$, а затем амплитуда автоколебаний $a_{п2}$ по графику рис. 18.45, *д*.

В данном параграфе применялись амплитудно-фазовые частотные характеристики. Использование логарифмических частотных характеристик см. в § 20.4.

В заключение заметим, что при исследовании нелинейных автоматических систем применяются еще приближенные методы Б. В. Булгакова (см. [19] или [98]), которые здесь не излагаются.

МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

§ 19.1. Статические и скоростные ошибки автоколебательных систем

В предыдущих главах исследовались симметричные автоколебания как результат свободного движения системы (т. е. без внешнего воздействия) при симметричных нелинейностях. Однако, как будет показано, важное практическое значение имеет также рассмотрение несимметричных автоколебаний.

Несимметрия автоколебаний может вызываться различными причинами:

- 1) несимметричностью нелинейной характеристики как при наличии, так и при отсутствии внешних воздействий;
- 2) наличием постоянного или медленно меняющегося внешнего воздействия при симметричных нелинейностях;
- 3) наличием постоянной или медленно меняющейся скорости изменения внешнего воздействия при симметричных нелинейностях (для тех случаев, когда постоянное воздействие не вызывает смещения центра колебаний; обычно это имеет место в следящих системах и вообще в астатических системах).

В самом деле, если имеется несимметричная нелинейная характеристика (например, рис. 19.1, а, б), то даже при симметричных колебаниях переменной $x = a \sin \omega t$ возникают несимметричные по амплитуде колебания

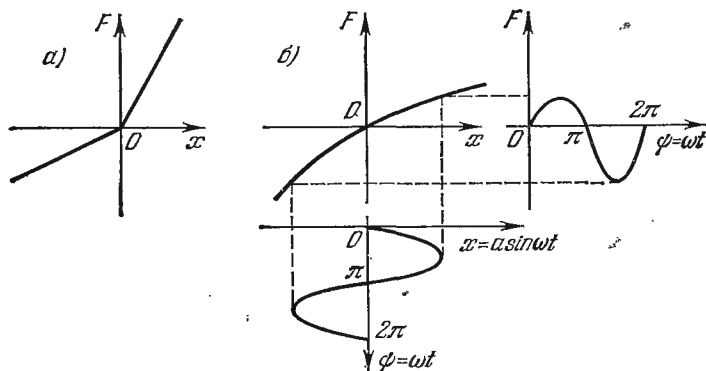


Рис. 19.1.

переменной F (рис. 19.1, б). Если же нелинейность симметрична (например, рис. 19.2, а, б), то при наличии постоянного внешнего воздействия (или в астатических системах при наличии постоянной скорости изменения внеш-

него воздействия) смещается центр колебаний переменной $x = x^0 + a \sin \omega t$, вследствие чего колебания переменной F становятся несимметричными по амплитуде и по времени (рис. 19.2, а) или только по времени (рис. 19.2, б).

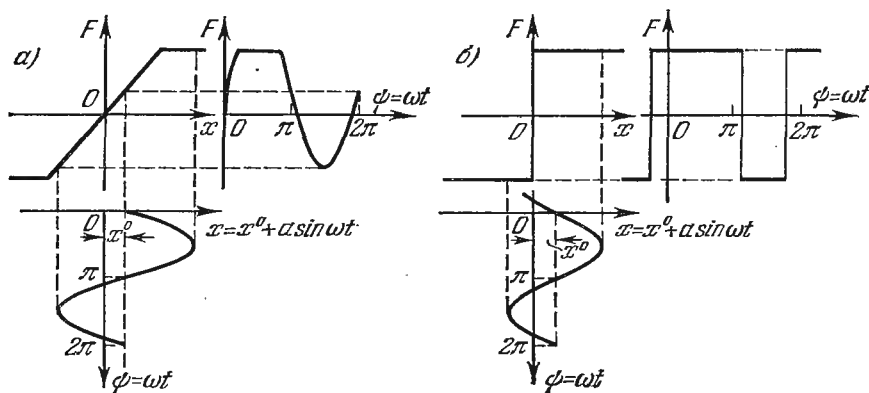


Рис. 19.2.

Пусть задана автоматическая система, динамика которой описывается уравнением

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t). \quad (19.1)$$

В данном параграфе будем считать $f(t) = \text{const} = f^0$ для статических систем или же $pf(t) = \text{const} = f_1^0$ для астатических систем. Астатической системой называется такая, в которой многочлен $S(p)$ имеет общий множитель p , т. е. $S(p) = pS_1(p)$.

Поэтому запишем уравнение (19.1) в виде

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = M^0, \quad (19.2)$$

где соответственно

$$M^0 = S(0)f^0 \quad \text{или} \quad M^0 = S_1(0)f_1^0. \quad (19.3)$$

При этом решение нелинейного уравнения (19.1), в отличие от прежнего (§ 18.2), ищется в форме

$$x = x^0 + x^*, \quad \text{где} \quad x^* = a \sin \omega t, \quad (19.4)$$

причем x^0 , a , ω являются неизвестными постоянными.

С учетом величины смещения x^0 первые члены разложения в ряд Фурье вместо (18.6) и (18.7) следует записать в виде

$$F(x, px) = F^0 + qx^* + \frac{q'}{\omega} px^* + \text{высшие гармоники}, \quad (19.5)$$

где при обозначении $\psi = \omega t$

$$\left. \begin{aligned} F^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi, a\omega \cos \psi) d\psi, \\ q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (19.6)$$

Отсюда видно, что в общем случае все три коэффициента являются функциями трех неизвестных:

$$F^0(x^0, a, \omega), \quad q(x^0, a, \omega), \quad q'(x^0, a, \omega). \quad (19.7)$$

В частных случаях эти зависимости могут быть более простыми¹⁾.

Подстановка выражений (19.4) и (19.5) в заданное дифференциальное уравнение (19.1) с учетом свойства фильтра (см. § 18.2) дает

$$Q(p)(x^0 + x^*) + R(p)\left(F^0 + qx^* + \frac{q'}{\omega} px^*\right) = M^0.$$

Это уравнение разбивается на два:

$$Q(0)x^0 + R(0)F^0 = M^0, \quad (19.8)$$

$$Q(p)x^* + R(p)\left(q + \frac{q'}{\omega} p\right)x^* = 0. \quad (19.9)$$

При таком разделении сохраняются существенно нелинейные свойства и отсутствие суперпозиции решений, так как остается нелинейная взаимосвязь обоих уравнений через соотношения (19.7).

Можно предложить два метода решения задачи.

Первый метод состоит в следующем. Уравнение (19.9) совпадает с прежним уравнением (18.33); отличие состоит лишь в том, что теперь коэффициенты q и q' согласно (19.7) зависят не только от a и ω , но и от смещения x^0 . Поэтому, написав как прежде, характеристическое уравнение

$$Q(p) + R(p)\left(q + \frac{q'}{\omega} p\right) = 0, \quad (19.10)$$

заменив p на $j\omega$ и выделив вещественную и мнимую части, в отличие от (18.36), получим здесь два алгебраических уравнения с тремя неизвестными:

$$X(x^0, a_{\Pi}, \omega_{\Pi}) = 0, \quad Y(x^0, a_{\Pi}, \omega_{\Pi}) = 0. \quad (19.11)$$

Эти уравнения дают возможность определить амплитуду a_{Π} и частоту ω_{Π} автоколебаний как функции постоянной составляющей x^0 :

$$a_{\Pi}(x^0), \quad \omega_{\Pi}(x^0). \quad (19.12)$$

Для решения этой задачи можно применять любой из способов, описанных в § 18.2, в зависимости от того, какой из них лучше подходит к условиям заданной конкретной задачи. Таким же способом можно определить зависимость a и ω не только от x^0 , но и от параметров системы с целью выбора последних. Что касается тех способов § 18.2, где используются графики $q(a)$ и $q'(a)$, то здесь их необходимо строить в виде серии кривых при разных постоянных значениях x^0 (рис. 19.3).

После того как из уравнений (19.11) определены зависимости (19.12), можно, воспользовавшись первым из выражений (19.7), найти функцию смещения

$$F^0 = \Phi(x^0). \quad (19.13)$$

Подставив ее в (19.8), получим алгебраическое уравнение

$$Q(0)x^0 + R(0)\Phi(x^0) = M^0 \quad (19.14)$$

с одной неизвестной x^0 , которая отсюда и определяется. Чаще всего это уравнение относительно x^0 является трансцендентным и решается графически. Затем согласно (19.12) определяются также амплитуда a_{Π} и частота ω_{Π} .

¹⁾ См. конкретные формулы для разных нелинейностей в § 19.3.

Указанную зависимость (19.12) амплитуды и частоты автоколебаний от величины смещения центра колебаний, характерную именно для нелинейных систем (в линейных системах смещение центра колебаний не играет

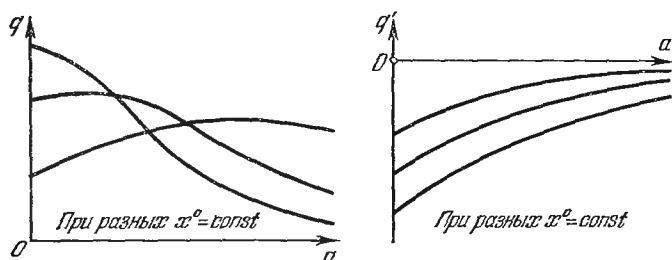


Рис. 19.3.

роли), надо всегда иметь в виду. При одних нелинейностях она может быть весьма существенной, при других — менее существенной.

Второй метод решения той же задачи состоит, наоборот, в том, что сначала решается уравнение (19.8), где согласно (19.7) будет $F^0(x^0, a, \omega)$ или часто $F^0(x^0, a)$. Решение получает вид

$$x^0(a, \omega) \text{ или } x^0(a). \quad (19.15)$$

Это решение подставляется затем в уравнения (19.11), которые, таким образом, будут содержать только две неизвестные: $a_{\text{п}}$ и $\omega_{\text{п}}$. Определив последние (по любому из способов § 18.2), вычисляем потом по (19.15) и величину x^0 , которая будет в результате зависеть от формы нелинейности, от параметров системы и от внешнего воздействия M^0 .

Величина x^0 и является искомой статической или скоростной ошибкой соответственно для статической и астатической системы.

В тех случаях, когда передаточная функция линейной части системы $R(p)/Q(p)$ имеет нулевой корень в знаменателе (что часто бывает), т. е. когда $Q(0) = 0$, вместо (19.14) получаем уравнение

$$\Phi(x^0) = \frac{M^0}{R(0)} \quad (19.16)$$

откуда определяется статическое отклонение или скоростная ошибка $x^0(M^0)$.

В случае, когда при отсутствии внешнего воздействия ($M^0 = 0$) определяются автоколебания в системе с несимметричной нелинейностью, т. е. нелинейностью $F(x)$ или же $F(x, px)$, для которой

$$\int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) d\psi \neq 0, \quad (19.17)$$

вместо уравнения (19.8) получаем

$$Q(0)x^0 + R(0)F^0 = 0. \quad (19.18)$$

Оно решается любым из тех же двух методов, описанных выше для уравнения (19.8). Одновременно согласно (19.11) определяются x^0 , $a_{\text{п}}$, $\omega_{\text{п}}$.

Если в этом случае знаменатель $Q(p)$ передаточной функции линейной части системы имеет нулевой корень, то $Q(0) = 0$ и, следовательно, уравнение (19.18) с учетом (19.13) принимает вид

$$\Phi(x^0) = 0, \quad (19.19)$$

откуда определяется x^0 . Это означает, что в указанных системах возникает такое смещение x^0 колебаний переменной x , которое ликвидирует свойственную данной нелинейности несимметрию колебаний переменной F (т. е. обеспечивается $F^0 = 0$), как показано, например, на рис. 19.4 в отличие от рис. 19.1, б.

Приведем пример исследования совместного влияния двух внешних воздействий, причем из дальнейшего будет видно, что, в отличие от линейных систем, здесь нельзя просто складывать статические ошибки от отдельно взятых воздействий.

Уравнения автоматической системы (рис. 19.5) заданы в виде

$$(T_1 p + 1) x_2 = k_1 x_1, \quad x_1 = f_1(t) - x_4, \quad (19.20)$$

$$x_3 = F(x), \quad x = x_2 - x_{oc}, \quad x_{oc} = k_{oc} x_4, \quad (19.21)$$

$$(T_2 p + 1) p x_4 = k_2 x_3 - f_2(t), \quad (19.22)$$

где $F(x)$ — простейшая симметричная релейная характеристика, показанная на рис. 19.5.

$$F(x) = c \operatorname{sign} x. \quad (19.23)$$

Чтобы воспользоваться выведенными выше общими формулами, надо сначала привести заданную систему уравнений (19.20) — (19.22) к одному

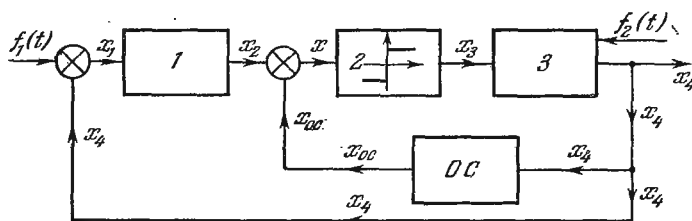


Рис. 19.5.

уравнению типа (19.1). В результате получаем

$$\begin{aligned} (T_1 p + 1) (T_2 p + 1) p x + (k_{oc} T_1 p + k_1 + k_{oc}) k_2 F(x) = \\ = k_1 (T_2 p + 1) p f_1(t) + (k_{oc} T_1 p + k_1 + k_{oc}) f_2(t). \end{aligned} \quad (19.24)$$

Пусть $f_1(t)$ является задающим воздействием, изменяющимся с постоянной скоростью:

$$f_1(t) = f_1^0 t, \quad (19.25)$$

которое требуется воспроизвести на выходе системы в виде $x_4(t)$. Допустим также, что второе внешнее воздействие $f_2(t)$ является возмущающим и имеет постоянную величину (например, постоянная нагрузка на выходном валу системы):

$$f_2(t) = \text{const} = f_2^0. \quad (19.26)$$

Его влияние требуется свести к минимуму. Найдем установившуюся ошибку на выходе системы. Правая часть уравнения (19.24) будет при этом постоянной, и установившееся решение для x с учетом автоколебаний следует искать

в виде

$$x = x^0 + x^*, \quad \text{где } x^* = a \sin \omega t. \quad (19.27)$$

Гармоническая линеаризация нелинейности (19.23) при этом согласно (19.6) дает

$$|F| = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{a}, \quad |q| = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{a}\right)^2}. \quad (19.28)$$

В данной задаче согласно (19.24) уравнение (19.9) для периодических составляющих получит вид

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p x^* + (k_{oc} T_1 p + k_1 + k_{oc}) k_2 q x^* = 0, \quad (19.29)$$

а уравнение (19.8) для постоянных составляющих будет

$$(k_1 + k_{oc}) k_2 F^0 = M^0, \quad (19.30)$$

где согласно (19.24) — (19.26)

$$M^0 = k_1 f_1^0 + (k_1 + k_{oc}) f_2^0. \quad (19.31)$$

Выше были указаны два метода решения задачи. Для иллюстрации обоих методов решим данную задачу каждым из них.

Согласно первому методу сначала решается уравнение (19.29) для определения зависимостей $a(x^0)$ и $\omega(x^0)$.

Характеристическое уравнение здесь будет

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + T_1 k_2 k_{oc} q) p + (k_1 + k_{oc}) k_2 q = 0, \quad (19.32)$$

и уравнения (19.11) поэтому примут вид

$$\left. \begin{aligned} X &= (k_1 + k_{oc}) k_2 q - (T_1 + T_2) \omega^2 = 0, \\ Y &= (1 + T_1 k_2 k_{oc} q) \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.33)$$

Исключая отсюда q , находим частоту автоколебаний

$$\omega_{\Pi}^2 = \frac{k_1 + k_{oc}}{T_1(T_2 k_1 - T_1 k_{oc})}. \quad (19.34)$$

Частота ω в данной задаче оказалась не зависящей от смещения x^0 , а следовательно, и от величины внешнего воздействия. Затем, подставляя в первое из уравнений (19.33) выражение q из (19.28) и ω_{Π}^2 из (19.34), получаем биквадратное уравнение для отыскания зависимости амплитуды автоколебаний a_{Π} от смещения x^0 :

$$\left(\frac{a_{\Pi}}{A}\right)^4 - \left(\frac{a_{\Pi}}{A}\right)^2 + \left(\frac{x^0}{A}\right)^2 = 0, \quad (19.35)$$

где величина

$$A = \frac{4ck_2 T_1 (T_2 k_1 - T_2 k_{oc})}{\pi (T_1 + T_2)} \quad (19.36)$$

представляет собой амплитуду автоколебаний в данной системе при отсутствии смещения (при $x^0 = 0$). Отсюда

$$\left(\frac{a_{\Pi}}{A}\right)^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{x^0}{A}\right)^2}. \quad (19.37)$$

Полученное выражение можно записать также в виде

$$|a_{\Pi}| = A \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (19.38)$$

если обозначить

$$\alpha = \arcsin \frac{2x^0}{A}. \quad (19.39)$$

Результат (19.37) или (19.38) и представляет собой искомую зависимость $a_{\Pi}(x^0)$.

Далее, согласно первому методу решения задачи подставим полученное значение амплитуды a_{Π} из (19.38) в выражение (19.28) для F^0 , откуда с использованием (19.39) найдем функцию смещения

$$F^0 = \Phi(x^0) = \frac{c}{\pi} \alpha = \frac{c}{\pi} \arcsin \frac{2x^0}{A} \quad \left(0 \leq |x^0| < \frac{A}{2}\right), \quad (19.40)$$

где A определяется через параметры системы формулой (19.36).

Подставив величину (19.40) в уравнение (19.30) для постоянных составляющих, с учетом (19.34) и (19.36) получим

$$x^0 = \frac{A}{2} \sin \left[\frac{\pi}{ck_2} \left(\frac{k_1 f_1^0}{k_1 + k_{oc}} + f_2^0 \right) \right]. \quad (19.41)$$

Сравнивая это с формулой (19.39), видим, что для искусственно введенной ранее величины α можно записать следующее выражение:

$$\alpha = \frac{\pi}{ck_2} \left(\frac{k_1 f_1^0}{k_1 + k_{oc}} + f_2^0 \right). \quad (19.42)$$

Эта величина характеризует совокупность приложенных к системе внешних воздействий. Учитывая это, из формулы (19.38) находим амплитуду автоколебаний

$$a_{\Pi} = A \cos \left[\frac{\pi}{2ck_2} \left(\frac{k_1 f_1^0}{k_1 + k_{oc}} + f_2^0 \right) \right]. \quad (19.43)$$

Существенно то, что амплитуда автоколебаний зависит не только от параметров системы (см. (19.36)), но еще и от величины внешних воздействий. Эта зависимость нелинейная. В данном случае при увеличении внешних воздействий амплитуда уменьшается по закону косинуса, в то время как частота не зависит от внешних воздействий.

Из формулы (19.43) видно, что автоколебания существуют до тех пор, пока величины внешних воздействий удовлетворяют условию

$$0 \leq \left| \frac{k_1 f_1^0}{k_1 + k_{oc}} + f_2^0 \right| < ck_2. \quad (19.44)$$

При этом амплитуда автоколебаний изменяется в пределах $A \geq a_{\Pi} > 0$.

Таков первый метод определения установившихся величин смещения x^0 , амплитуды a_{Π} и частоты ω_{Π} автоколебаний при наличии внешних воздействий.

Проиллюстрируем также и второй метод. Согласно второму методу сначала решается уравнение (19.30). По (19.30) и первой из формул (19.28) находим

$$\frac{x^0}{a} = \sin \frac{\pi F^0}{2c} = \sin \frac{\pi M^0}{2c(k_1 + k_{oc})k_2}$$

или, с учетом (19.31),

$$\frac{x^0}{a} = \sin \left[\frac{\pi}{2ck_2} \left(\frac{k_1 f_1^0}{k_1 + k_{oc}} + f_2^0 \right) \right]. \quad (19.45)$$

Для отыскания входящей сюда амплитуды a воспользуемся уравнением (19.29). Характеристическое уравнение для него будет (19.32), и уравнения (19.11) поэтому примут вид:

$$\left. \begin{aligned} X &= (k_1 + k_{oc}) k_2 q - (T_1 + T_2) \omega^2 = 0, \\ Y &= (1 + T_1 k_2 k_{oc} q) \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (19.46)$$

где согласно (19.28) и (19.45)

$$q = \frac{4c}{\pi a} \cos \left[\frac{\pi}{2ck_2} \left(\frac{k_1 f_1^0}{k_1 + k_{oc}} + f_2^0 \right) \right]. \quad (19.47)$$

Исключая из уравнений (19.46) величину q , находим частоту автоколебаний

$$\omega_n^2 = \frac{k_1 + k_{oc}}{T_1(T_2 k_1 - T_1 k_{oc})}. \quad (19.48)$$

Подставив найденные выражения q и ω_n^2 в первое из уравнений (19.46), найдем амплитуду автоколебаний

$$a_n = A \cos \left[\frac{\pi}{2ck_2} \left(\frac{k_1 f_1^0}{k_1 + k_{oc}} + f_2^0 \right) \right], \quad (19.49)$$

где величина

$$A = \frac{4ck_2 T_1 (T_2 k_1 - T_1 k_{oc})}{\pi (T_1 + T_2)} \quad (19.50)$$

является амплитудой автоколебаний при отсутствии внешних воздействий (при $f_1^0 = 0$, $f_2^0 = 0$).

Подставив найденное выражение амплитуды (19.49) в формулу (19.45), получим окончательно величину смещения

$$x^0 = \frac{A}{2} \sin \left[\frac{\pi}{ck_2} \left(\frac{k_1 f_1^0}{k_1 + k_{oc}} + f_2^0 \right) \right]. \quad (19.51)$$

Как видно, второй метод в данной задаче приводит к тем же самым результатам значительно более коротким путем, чем первый, что очень важно для практических расчетов (принципиально же оба метода эквивалентны друг другу). По-видимому, бóльшая простота второго метода будет иметь место и в большинстве других задач.

В этом втором методе, в отличие от первого, функция смещения $\Phi(x^0)$ не определяется. Однако последняя может понадобиться в дальнейшем для других целей. Но ее тоже легко можно определить при использовании второго метода. Здесь величины x^0 , a_n и их отношения выражены через величины внешних воздействий. Функция же смещения $\Phi(x^0)$ не должна содержать ни величин внешних воздействий, ни амплитуды a_n , зависящей от них. Подставив значение квадратной скобки из (19.51) в (19.45), получим

$$\frac{x^0}{a_n} = \sin \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x^0}{A} \right), \quad (19.52)$$

а подставив это в первую из формул (19.28), сразу получим искомую функцию смещения

$$F^0 = \Phi(x^0) = \frac{c}{\pi} \arcsin \frac{2x^0}{A}, \quad (19.53)$$

где A выражается только через параметры системы согласно (19.50).

Важно отметить, что функция смещения $\Phi(x^0)$ не зависит ни от числа внешних воздействий, ни от характера их изменения (если они постоянные или медленно меняющиеся), что наиболее наглядно было видно из первого метода решения задачи.

Итак, двумя разными методами определена величина смещения x^0 автоколебаний на входе реле. Найдем теперь установившуюся ошибку на выходе системы x_4 . Поскольку на выходе должно воспроизводиться внешнее воздействие $f_1(t)$, то согласно рис. 19.5 и второму уравнению (19.20) ошибка данной системы выражается величиной x_1 , установившееся решение для которой, следовательно, и надо искать. Выразив переменную x_1 через x , которая уже известна, из заданных уравнений системы (19.20) и (19.21) получаем

$$(k_{oc} T_1 p + k_1 + k_{oc}) x_1 = (T_1 p + 1) x + k_{oc} (T_1 p + 1) f_1(t).$$

Учитывая (19.25) и (19.27), перепишем данное уравнение в виде

$$(k_{oc}T_{1p} + k_1 + k_{oc}) x_1 = x^0 + (T_{1p} + 1) x^* + k_{oc}T_{1f_1}^0 + k_{oc}f_1^0 t. \quad (19.54)$$

В соответствии с видом правой части установившееся решение этого линейного уравнения следует искать в виде

$$x_1 = x_1^0 + c_1 t + x_1^*, \quad (19.55)$$

где x_1^0 и c_1 — постоянные, а x_1^* — периодическая составляющая.

Подставив это в (19.54), получим три уравнения для отыскания указанных величин:

$$k_{oc}T_{1c_1} + (k_1 + k_{oc}) x_1^0 = x^0 + k_{oc}T_{1f_1}^0, \quad (19.56)$$

$$(k_1 + k_{oc}) c_1 = k_{oc}f_1^0, \quad (19.57)$$

$$(k_{oc}T_{1p} + k_1 + k_{oc}) x_1^* = (T_{1p} + 1) x^*. \quad (19.58)$$

Второе из них дает

$$c_1 = \frac{k_{oc}f_1^0}{k_1 + k_{oc}}. \quad (19.59)$$

Тогда из (19.56) находим

$$x_1^0 = \frac{1}{k_1 + k_{oc}} \left(x^0 + \frac{k_1 k_{oc} T_{1f_1}^0}{k_1 + k_{oc}} \right), \quad (19.60)$$

где x^0 определяется формулой (19.51) через внешние воздействия. Наконец, из уравнения (19.58) получаем амплитуду автоколебаний переменной x_1 :

$$a_1 = a_{\Pi} \sqrt{\frac{T_1^2 \omega_{\Pi}^2 + 1}{k_{oc}^2 T_{1c_1}^2 \omega_{\Pi}^2 + (k_1 + k_{oc})^2}}, \quad (19.61)$$

где a_{Π} определяется формулой (19.49) через внешнее воздействие, а ω_{Π} — формулой (19.48).

Итак, в данной системе имеются все три составляющие ошибки (19.55), зависящие от величины внешних воздействий и от параметров системы. Наиболее нежелательной из них является составляющая $c_1 t$, возрастающая пропорционально времени. Поэтому систему необходимо видоизменить в первую очередь так, чтобы уничтожить эту составляющую ошибки, т. е. сделать $c_1 = 0$. Для этого можно было бы вовсе изъять дополнительную обратную связь (рис. 19.5), так как при $k_{oc} = 0$ согласно (19.59) будет $c_1 = 0$. Однако при этом существенно возрастает амплитуда автоколебаний (19.61), т. е. периодическая составляющая ошибки. Поэтому более целесообразной мерой будет замена жесткой обратной связи $x_{oc} = k_{oc}x_4$ на гибкую $x_{oc} = k_{oc}p x_4$. Тогда в уравнении (19.54) величина k_{oc} заменится на $k_{oc}p$:

$$(k_{oc}T_{1p}^2 + k_{oc}p + k_1) x_1 = x^0 + (T_{1p} + 1) x^* + k_{oc}f_1^0. \quad (19.62)$$

Как видим, составляющая, пропорциональная времени, в правой части уравнения исчезла, вследствие чего установившееся решение для ошибки x_1 , в отличие от (19.55), будет

$$x_1 = x_1^0 + x_1^*. \quad (19.63)$$

При этом из (19.62) находим:

$$x_1^0 = \frac{1}{k_1} (x^0 + k_{oc}f_1^0), \quad (19.64)$$

$$a_1 = a_{\Pi} \sqrt{\frac{T_1^2 \omega_{\Pi}^2 + 1}{k_{oc}^2 \omega_{\Pi}^2 + (k_1 - k_{oc}T_{1f_1}^0)^2}}, \quad (19.65)$$

причем изменяются, конечно, и формулы для x^0 , a_{Π} и ω_{Π} (их можно получить таким же способом). Подбором параметров системы амплитуду автоколебаний ошибки a_1 можно сделать весьма малой.

§ 19.2. Прохождение медленно меняющихся сигналов в автоколебательных системах

Рассмотрим очень важный для практики случай, когда внешнее воздействие $f(t)$, которое может быть либо возмущающим, либо управляющим (задающим), в автоколебательной системе является не постоянным, а медленно меняющимся. Медленно меняющейся будем называть такую функцию времени, которая сравнительно мало изменяется за период автоколебаний, т. е. соблюдается условие в виде одного из неравенств

$$|f(t+T) - f(t)| \ll |f(t)| \quad \text{или} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| T \ll |f(t)|,$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega_{\Pi}}$, а ω_{Π} — частота автоколебаний. Соответственно для астатических систем медленно меняющейся скоростью $f'(t)$ будет такая, для которой выполняется условие

$$|f'(t+T) - f'(t)| \ll |f'(t)| \quad \text{или} \quad \left| \frac{df'}{dt} \right| T \ll |f'(t)|.$$

Указанными свойствами почти всегда обладают «полезные» сигналы управления, проходящие через автоматическую автоколебательную систему (в том числе в переходных процессах).

Условие медленного изменения любой функции времени можно выразить также и в частотной форме, а именно: медленно меняющейся считается такая функция, возможные частоты изменения которой во времени значительно ниже возможной частоты возникающего в системе периодического решения (автоколебаний).

Сделанные предположения позволяют величину $f(t)$ или, соответственно, $pf(t)$ считать постоянной за время каждого периода исследуемых автоколебаний и искать решение в той же форме (19.4):

$$x = x^0 + x^*, \quad x^* = a \sin \omega t',$$

где t' отсчитывается отдельно внутри каждого периода, ибо теперь x^0 , a и ω будут не постоянными, а переменными во времени t (от периода к периоду) вместе с изменением внешнего воздействия $f(t)$. При этом $x^0(t)$ будет медленно меняющимся сигналом на входе нелинейности.

В связи со сказанным здесь остается в силе разложение (19.5) — (19.7). Но подстановка его в заданное уравнение нелинейной автоматической системы (19.1) дает

$$Q(p)(x^0 + x^*) + R(p)\left(F^0 + qx^* + \frac{q'}{\omega} px^*\right) = S(p)f(t).$$

При достаточно медленном изменении функции $f(t)$ (а в астатических системах pf) и величин x^0 , a , ω , входящих в коэффициенты F^0 , q , q' , данное уравнение может быть разделено на два отдельных уравнения:

$$Q(p)x^0 + R(p)F^0 = S(p)f(t), \quad (19.66)$$

$$Q(p)x^* + R(p)\left(q + \frac{q'}{\omega} p\right)x^* = 0, \quad (19.67)$$

соответственно для медленно меняющейся составляющей и для колебательной составляющей. При этом разделении уравнений, как и прежде, сохраняются существенно нелинейные свойства системы.

Следовательно, здесь сохраняется целиком прежний (§ 19.1) первый метод решения задачи (второй здесь неприемлем), выраженный формулами (19.10) — (19.13), где в данном случае x^0 является величиной не постоян-

ной, а медленно меняющейся. Поэтому прежний процесс решения заканчивается определением функции смещения (19.13). Подставив (19.13) в (19.66), получим дифференциальное уравнение для определения медленно меняющегося сигнала управления $x^0(t)$ (на фоне автоколебаний системы) в виде

$$Q(p)x^0 + R(p)\Phi(x^0) = S(p)f(t). \quad (19.68)$$

Таким образом, получается, что для определения медленно меняющихся процессов функцию смещения

$$F^0 = \Phi(x^0) \quad (19.69)$$

следует подставить в уравнение автоматической системы (19.4) вместо заданной нелинейности $F(x, px)$.

Следовательно, функция смещения $\Phi(x^0)$ представляет собой как бы статическую характеристику (обычно криволинейную), которая определяет зависимость между выходной и входной величинами заданной нелинейности для постоянных или медленно меняющихся сигналов в автоколебательной системе.

При любых нелинейностях, в том числе и скачкообразных, функция смещения $\Phi(x^0)$ может получать при определенных условиях вид весьма

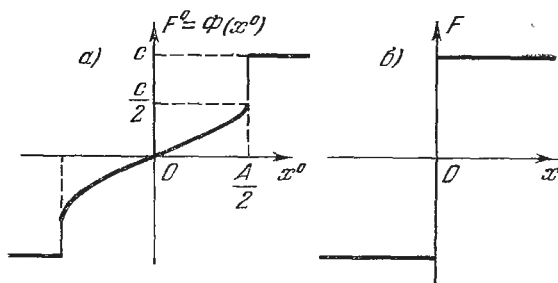


Рис. 19.6.

плавной кривой. Этот эффект называется *вибрационным сглаживанием нелинейностей* при помощи автоколебаний, а функцию смещения $\Phi(x^0)$ можно называть *сглаженной нелинейной характеристикой*.

Так, в примере § 19.1 согласно (19.40) функция смещения будет иметь вид рис. 19.6, а, т. е. для медленно меняющегося сигнала в данной релейной системе нелинейная характеристика будет в определенных

пределах иметь плавный вид (рис. 19.6, а) вместо скачкообразного (рис. 19.6, б) — за счет сглаживающего влияния автоколебательных вибраций.

Далее, например, для нелинейностей, обусловленных зоной нечувствительности (рис. 19.7, а), а также зазором (рис. 19.7, в) и петлей, сигналы $x < b$ при отсутствии автоколебаний не передаются ($F = 0$). При наличии же автоколебаний сигнал $x^0 < b$ передается в виде составляющей F^0 . Поэтому для медленно меняющегося сигнала получается плавная характеристика (функция смещения) $\Phi(x^0)$ без зоны нечувствительности (рис. 19.7, б). Эффект вибрационного сглаживания нелинейностей в этих примерах является положительным (ликвидация зон нечувствительности и петель).

Однако в других случаях эффект вибрационного сглаживания нелинейности может оказаться и отрицательным. Возьмем, например, нелинейную характеристику с зоной насыщения (ограниченно-линейную), показанную на рис. 19.8. В этом случае за счет того, что верхушки синусоиды с одной стороны срезаются, постоянная составляющая F^0 будет меньше, чем само значение F , соответствующее линейному начальному участку. Поэтому постоянный или медленно меняющийся сигнал будет при наличии автоколебаний проходить через данную нелинейность с меньшим коэффициентом усиления, чем без автоколебаний, что может в известных случаях отрицательно сказаться на качестве автоматической системы в целом.

Во многих случаях вычисление a и ω будет необходимо только с точки зрения проверки выполнения условий вибрационного сглаживания нелиней-

ности и допустимости таких вибраций в данной конкретной автоматической системе. Основными же для качества работы автоматической системы при этом будут являться медленно меняющиеся процессы, определяемые уравнением (19.68). С точки зрения упрощения их определения весьма важными являются следующие два обстоятельства.

Во-первых, вид функции смещения $\Phi(x^0)$, как видно из § 19.1, не зависит ни от количества и места приложения внешних воздействий на систему,

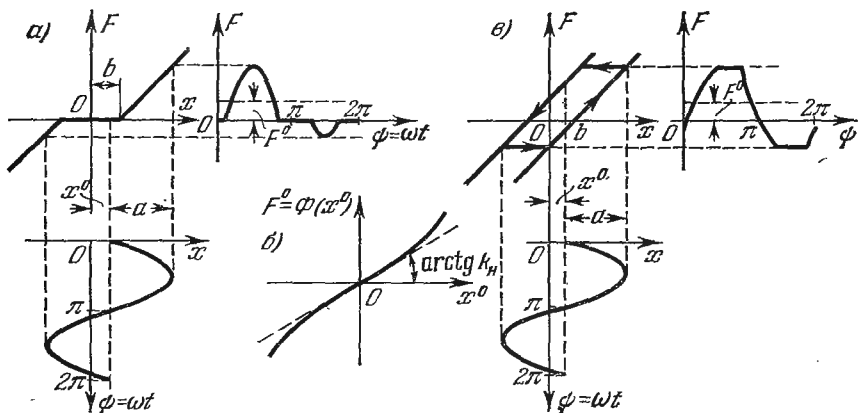


Рис. 19.7.

ни от характера их изменения (если только они медленно меняющиеся). Вид $\Phi(x^0)$ зависит от формы нелинейности, от структуры и от параметров системы. Поэтому можно пользоваться любым методом определения $\Phi(x^0)$ при любых частных упрощающих предположениях относительно внешних воздействий. Можно, например, пользоваться более простым вторым методом из описанных в § 19.1 методов и проиллюстрированных там на примере, взяв любое одно постоянное по величине внешнее воздействие.

Во-вторых, какова бы ни была заданная нелинейность $F(x, px)$ (скачкообразная, петлевая и т. п.), обычно функция смещения $\Phi(x^0)$ получает вид плавной кривой. Поэтому, в отличие от первоначально заданной нелинейности, ее легко можно *линеаризовать* обычным способом (по касательной или по секущей в начале координат или в другом начале отсчета). Имея в виду это свойство, часто вместо термина «вибрационное сглаживание» употребляют термин «вибрационная линеаризация» (будем придерживаться первого из них).

Итак, в определенном диапазоне можно считать

$$F^0 = \Phi(x^0) = k_{\pi} x^0, \quad (19.70)$$

где

$$k_{\pi} = \left(\frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0}.$$

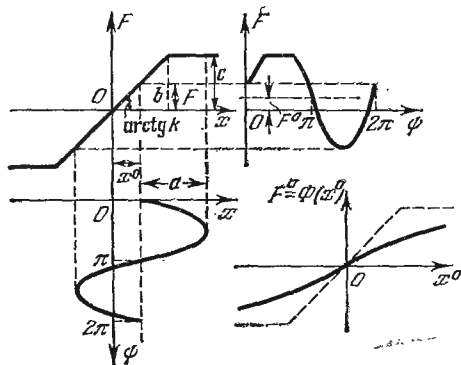


Рис. 19.8.

Графически k_H представляет собой тангенс угла наклона прямой (касательной или секущей, рис. 19.7, б).

Величина коэффициента k_H зависит от соотношения, вообще говоря, всех параметров системы.

Например, для системы, описываемой уравнениями (19.20) — (19.23), согласно (19.53) и (19.50) имеем

$$k_H = \left(\frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0} = \frac{2c}{\pi A} = \frac{T_1 + T_2}{2k_2 T_1 (T_2 k_1 - T_1 k_{oc})}. \quad (19.74)$$

Поэтому для расчета медленно протекающих процессов в данной системе на основании (19.20) — (19.22) и (19.70) получаем линейные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2^0 &= k_1 x_1^0, & x_1^0 &= f_1(t) - x_4^0, \\ x_3^0 &= k_H x^0, & x^0 &= x_2^0 - x_{oc}^0, & x_{oc}^0 &= k_{oc} x_4^0, \\ (T_2 p + 1) p x_4^0 &= k_2 x_3^0 - f_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (19.72)$$

или единое линейное уравнение (19.24), в котором надо заменить x на x^0 и $F(x)$ на $k_H x^0$.

Определение коэффициента усиления k_H можно значительно упростить следующим образом. Поскольку функция смещения $\Phi(x^0)$ определяется согласно (19.13) и (19.7) по выражению $F^0(x^0, a, \omega)$, в которое подставлена зависимость $a(x^0)$, то формулу для вычисления k_H можно представить в виде

$$k_H = \left(\frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0} = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} + \frac{\partial F^0}{\partial a} \frac{da}{dx^0} + \frac{\partial F^0}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dx^0} \right)_{x^0=0}.$$

В тех случаях, когда рассматриваются нечетно-симметричные нелинейности $F(x)$, величина F^0 не зависит от ω и, кроме того, согласно (19.6)

$$\left(\frac{\partial F^0}{\partial a} \right)_{x^0=0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=a \sin \psi} \sin \psi d\psi = 0,$$

так как производная под знаком интеграла будет четной функцией. Следовательно, для нечетно-симметричных нелинейностей $F(x)$, как однозначных, так и петлевых, величину k_H можно вычислять по формуле

$$k_H = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0}$$

непосредственно из выражения (19.7), не определяя функции смещения $\Phi(x^0)$. Во многих задачах это будет существенным упрощением решения.

Это упрощение не относится к несимметричным нелинейностям, а также к тем случаям, когда k_H приходится определять не по касательной, а по секущей.

Итак, с подстановкой (19.70) уравнение (19.68) для определения медленно протекающих процессов становится обыкновенным линейным уравнением

$$[Q(p) + R(p) k_H] x^0 = S(p) f(t) \quad (19.73)$$

и, как таковое, легко решается.

Как видим, введенный здесь принцип разделения уравнений для колебательных и для медленно меняющихся составляющих, при котором сохраняются существенно нелинейные свойства системы, приводит к весьма важным для практических расчетов результатам. Существенным выводом является то, что медленно меняющиеся сигналы проходят через нелинейность с другим коэффициентом усиления k_H , чем автоколебания $\left(q \text{ или } q + \frac{q'}{\omega} p \right)$.

Особенно важно использовать свойство вибрационного сглаживания нелинейностей с последующей их обычной линеаризацией при расчете сложных автоматических систем.

Если, например, система автоматического управления полетом самолета работает по схеме, изображенной на рис. 19.9, то часть системы, обведенную пунктиром (релейный усилитель, привод и дополнительная обратная связь), как отдельную следящую систему, можно рассчитывать изложенным выше методом с учетом автоколебательных вибраций. Частоту последних путем соответствующего выбора параметров этой части системы или введением корректирующих устройств можно сделать достаточно большой с тем, чтобы амплитуда автоколебаний переменной x_2 на выходе этой части системы была

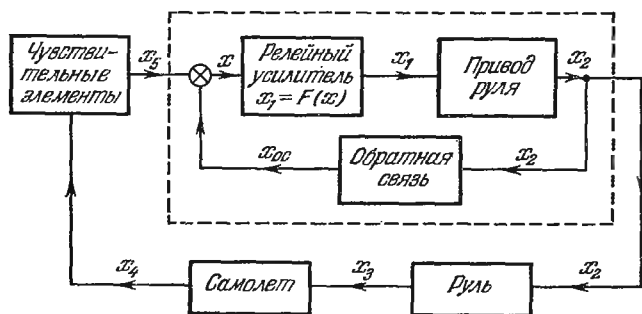


Рис. 19.9.

мала. Если же указанную амплитуду x_2 не удастся сделать малой (тогда руль будет колебаться), то необходимо, чтобы указанная частота практически не воспринималась корпусом самолета в процессе его движения вокруг центра тяжести.

Тогда расчет автоматической системы будет выглядеть следующим образом.

Автоколебания определяем только в обведенной пунктиром внутренней части (рис. 19.9), как в отдельной самостоятельной системе, считая $x_5(t)$ произвольным медленно меняющимся внешним входным воздействием, а x_2 — выходной величиной. Для такой простой системы находим, как изложено выше, функцию смещения $\Phi(x^0)$, а также частоту и амплитуду автоколебаний в зависимости от величины внешнего воздействия. Выбираем параметры данной части системы так, чтобы условия вибрационного сглаживания нелинейности соблюдались во всем практически возможном диапазоне изменения входной величины x_5 . При этом следим за тем, чтобы частота автоколебаний системы (зависящая от параметров системы) лежала за пределами частот возможных колебаний самолета (чтобы она практически не воспринималась корпусом самолета).

После такого расчета внутренней части системы производим обычную линеаризацию функции смещения $\Phi(x^0)$, т. е. заменяем ее одной прямой линией $F^0 = k_n x^0$ (причем можно использовать указывавшееся упрощение в определении k_n). В результате получаем линейное уравнение для медленно протекающих процессов в данной части системы. К этому уравнению добавляем уравнение всей остальной части системы (в данном случае самолета, чувствительных элементов и руля, см. рис. 19.9) и рассчитываем всю систему в целом, как линейную, по любым обычным методам теории автоматического регулирования. При этом не обращаем уже внимания на автоколебания, которые локализируются в рассчитанном ранее внутреннем контуре системы. Однако их влияние не игнорируется, ибо оно было учтено при определении функции смещения $\Phi(x^0)$ и коэффициента k_n .

Изложенный принцип позволяет, во-первых, вести расчет автоколебаний по более простым уравнениям (так как выделяется только внутренняя часть системы) и, во-вторых, значительно упрощает расчет всей системы в целом, сводя его к исследованию обыкновенных линейных уравнений (но с коэффициентом k_n , зависящим от автоколебаний, т. е. от параметров внутреннего контура системы). Если необходимо учесть переменные коэффициенты и нелинейности самого самолета, то уравнения системы в целом не будут уже столь простыми. Однако и в этом случае полностью сохраняет смысл предварительный отдельный расчет внутреннего контура системы, так как влияние нелинейностей самого самолета будет распространяться обычно только на те процессы движения, которые по сравнению с автоколебаниями внутреннего контура являются медленными.

Известно, что и само движение самолета, например по тангажу, можно разделить на два, одно более быстрое — движение около центра тяжести (угловое движение) и другое более медленное — движение центра тяжести (движение по траектории). Оба они являются медленными по сравнению с автоколебаниями внутреннего контура системы управления. Однако их в свою очередь тоже можно рассматривать отдельно. Следовательно, в этом случае, кроме обычно применяемого пространственного разбиения движения самолета по каналам (тангажа, курса, крена), расчет системы по каждому каналу (например, тангажа) разбивается еще на три этапа по степени медленности движения во времени.

Аналогичное разделение расчета по крайней мере на два этапа по степени медленности во времени бывает целесообразным и для многих других нелинейных автоматических систем регулирования, слежения, стабилизации и т. п. В сложных системах такие приемы, существенно упрощающие все исследование, оказываются единственными, которые могут сделать расчет системы практически осуществимым. Важно иметь в виду, что при этом принципе разделения движений сохраняется существенная нелинейная взаимосвязь между ними.

§ 19.3. Гармоническая линеаризация нелинейностей при несимметричных колебаниях

В главе 18 гармоническая линеаризация нелинейностей выполнялась для случая симметричных колебаний в системе. Для гармонической линеаризации нелинейной функции $F(x, px)$ при несимметричных колебаниях будем полагать, что входная величина x нелинейного звена ищется в виде

$$x = x^0 + a \sin \psi.$$

Нелинейная функция $F(x, px)$ будет в этом случае периодической функцией аргумента ψ с постоянной составляющей F^0 .

Релейная характеристика общего вида. Релейная характеристика общего вида при несимметричных колебаниях входной величины x представлена на рис. 19.10, а. Здесь m — любое число в интервале $-1 \ll m \ll 1$.

Определим постоянную составляющую и коэффициенты гармонической линеаризации при условии $a \gg b + |x^0|$. В соответствии с видом функции $F(x^0 + a \sin \psi)$, представленной на рис. 19.10, б, получим

$$F^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) d\psi = \frac{c}{2\pi} \left(\int_{\psi_1}^{\pi - \psi_2} d\psi - \int_{\pi + \psi_3}^{2\pi - \psi_4} d\psi \right) = \\ = \frac{c}{2\pi} (\varphi_3 - \psi_1 + \psi_4 - \psi_2).$$

С учетом значений соответствующих углов

$$F^0 = \frac{c}{2\pi} \left(\arcsin \frac{b+x^0}{a} - \arcsin \frac{b-x^0}{a} + \arcsin \frac{mb+x^0}{a} - \arcsin \frac{mb-x^0}{a} \right) \quad (19.74)$$

при $a \geq b + |x^0|$.

Далее для $q(a, x^0)$ получаем

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{c}{\pi a} \left(\int_{\psi_1}^{\pi-\psi_2} \sin \psi d\psi - \int_{\pi+\psi_3}^{2\pi-\psi_4} \sin \psi d\psi \right) = \\ &= \frac{c}{\pi a} (\cos \psi_1 + \cos \psi_2 + \cos \psi_3 + \cos \psi_4). \end{aligned}$$

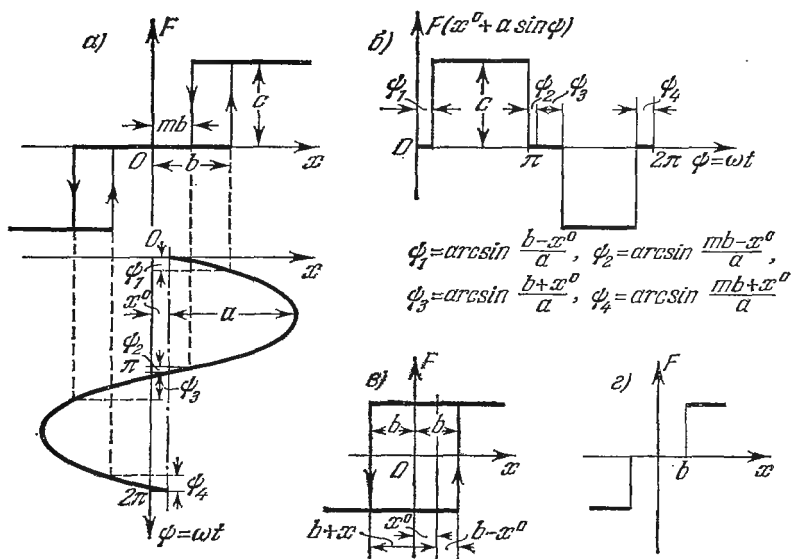


Рис. 19.10.

Учитывая значение углов $\psi_1, \dots, \psi_4$, находим

$$\begin{aligned} q &= \frac{c}{\pi a} \left[\sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{a^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1 - \frac{(mb+x^0)^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{(mb-x^0)^2}{a^2}} \right] \quad \text{при } a \geq b + |x^0|. \quad (19.75) \end{aligned}$$

Наконец, для $q'(a, x^0)$ будем иметь

$$q' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) \cos \psi d\psi = \sin \psi_2 - \sin \psi_1 + \sin \psi_4 - \sin \psi_3.$$

С учетом значений соответствующих синусов получим

$$q' = \frac{2cb}{\pi a^2} (1 - m) \quad \text{при } a \geq b + |x^0|. \quad (19.76)$$

Релейная характеристика с гистерезисной петлей. Считая, что релейная характеристика с гистерезисной петлей (рис. 19.10, в) есть частный

случай релейной характеристики общего вида при $m = -1$, получим

$$\left. \begin{aligned} F^0 &= \frac{c}{\pi} \left(\arcsin \frac{b+x^0}{a} - \arcsin \frac{b-x^0}{a} \right), \\ q &= \frac{2c}{\pi a} \left(\sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{a^2}} \right), \\ q' &= -\frac{4cb}{\pi a^2} \end{aligned} \right\} \quad (49.77)$$

при $a \geq b + |x^0|$.

Релейная характеристика с зоной нечувствительности. Релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 19.10, з) следует рассматривать как частный случай релейной характеристики общего вида при $m = 1$. Тогда получим значения постоянной составляющей и коэффициентов гармонической линеаризации:

$$\left. \begin{aligned} F^0 &= \frac{c}{\pi} \left(\arcsin \frac{b+x^0}{a} - \arcsin \frac{b-x^0}{a} \right), \\ q &= \frac{2c}{\pi a} \left(\sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{a^2}} \right), \\ q' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (49.78)$$

при $a \geq b + |x^0|$.

Идеальная релейная характеристика. Для идеальной релейной характеристики (рис. 19.6, б), полагая в последних формулах $b = 0$, получим

$$\left. \begin{aligned} F^0 &= \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{a}, \\ q &= \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{a} \right)^2}, \quad q' = 0, \end{aligned} \right\} \quad (49.79)$$

при $a \geq |x^0|$.

Релейная несимметричная характеристика. Релейная несимметричная характеристика при гармоническом изменении входной величины x со

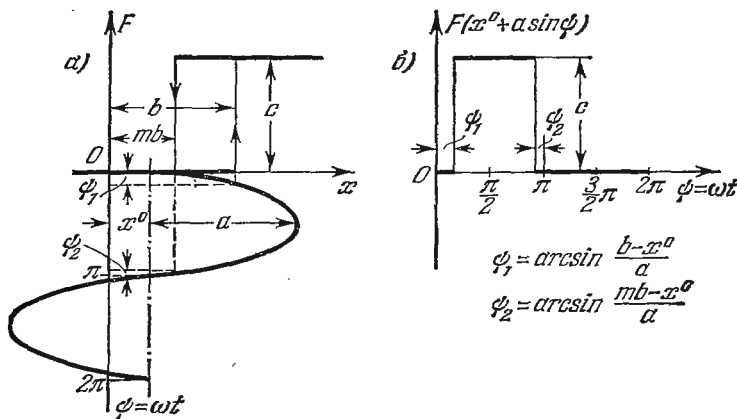


Рис. 19.11.

смещенным центром колебаний представлена на рис. 19.11, а. Так будет изменяться напряжение на потребителе, управляемом поляризованным реле, если реле при срабатывании включает потребитель на полное напряжение, а при отпуске выключает.

Вычисляя постоянную составляющую по формуле (19.6), получим

$$F^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) d\psi = \frac{c}{2\pi} (\pi - \psi_2 - \psi_1).$$

После подстановки значений соответствующих углов имеем

$$F^0 = \frac{c}{2} - \frac{c}{2\pi} \left(\arcsin \frac{b-x^0}{a} + \arcsin \frac{mb-x^0}{a} \right) \quad (19.80)$$

при $a \geq |b - x^0|$ и $a \geq |x^0 - mb|$.

Далее,

$$q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{c}{\pi a} (\cos \psi_1 - \cos \psi_2)$$

или, с учетом значений углов ψ_1 и ψ_2 ,

$$q = \frac{c}{\pi a} \left(\sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{(mb-x^0)^2}{a^2}} \right) \quad (19.81)$$

при $a \geq |b - x^0|$ и $a \geq |x^0 - mb|$.

Наконец,

$$q' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) \cos \psi d\psi = \frac{c}{\pi a} (\sin \psi_2 - \sin \psi_1)$$

или, с учетом соответствующих синусов,

$$q' = -\frac{cb}{\pi a^2} (1 - m) \quad (19.82)$$

при тех же ограничениях.

Нелинейная характеристика с зоной нечувствительности. Нелинейная характеристика с зоной нечувствительности изображена на рис. 19.12, а.

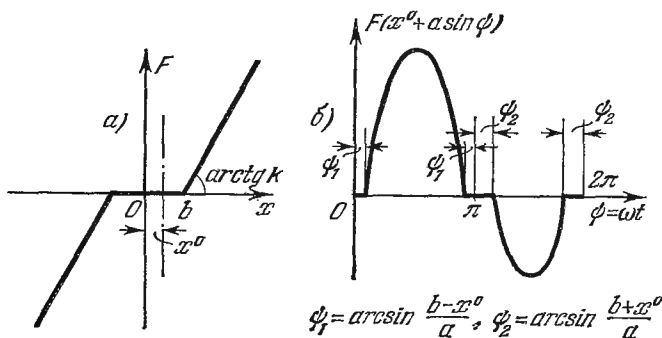


Рис. 19.12.

Коэффициент q' в этом случае равен нулю, так как характеристика однозначная.

Определим значения постоянной составляющей $F^0(a, x^0)$ и коэффициента гармонической линеаризации $q(a, x^0)$ в соответствии с видом функции $F(x^0 + a \sin \psi)$, показанной на рис. 19.12, б.

Для постоянной составляющей имеем

$$\begin{aligned}
 F^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) d\psi = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\psi_1}^{\pi-\psi_1} k[a \sin \psi - (b-x^0)] d\psi - \int_{\psi_2}^{\pi-\psi_2} k[a \sin \psi - (b+x^0)] d\psi \right\} = \\
 &= \frac{ka}{\pi} (\cos \psi_1 - \cos \psi_2) + kx^0 + \frac{k}{\pi} [b(\psi_1 - \psi_2) - x^0(\psi_1 - \psi_2)],
 \end{aligned}$$

что после подстановки соответствующих углов дает

$$\begin{aligned}
 F^0 &= \frac{ka}{\pi} \left(\sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{a^2}} - \sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{a^2}} \right) + kx^0 + \\
 &+ \frac{k}{\pi} \left[b \left(\arcsin \frac{b-x^0}{a} - \arcsin \frac{b+x^0}{a} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - x^0 \left(\arcsin \frac{b-x^0}{a} + \arcsin \frac{b+x^0}{a} \right) \right] \quad (19.83)
 \end{aligned}$$

при $a \geq b + |x^0|$.

Вычисляя коэффициент $q(a, x^0)$, получаем

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) \sin \psi d\psi = \\
 &= \frac{1}{\pi a} \left\{ \int_{\psi_1}^{\pi-\psi_1} k[a \sin \psi - (b-x^0)] \sin \psi d\psi + \int_{\psi_2}^{\pi-\psi_2} k[a \sin \psi - (b+x^0)] \sin \psi d\psi \right\} = \\
 &= \frac{k}{\pi} \left[\pi - (\psi_1 + \psi_2) + \frac{1}{2} (\sin 2\psi_1 + \sin 2\psi_2) \right] - \\
 &\quad - \frac{2k}{\pi a} [(b-x^0) \cos \psi_1 + (b+x^0) \cos \psi_2],
 \end{aligned}$$

что с учетом значений углов дает

$$\begin{aligned}
 q &= k - \frac{k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b-x^0}{a} + \arcsin \frac{b+x^0}{a} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{b-x^0}{a} \sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{a^2}} + \frac{b+x^0}{a} \sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{a^2}} \right) \quad (19.84)
 \end{aligned}$$

при $a \geq b + |x^0|$.

Нелинейная характеристика с насыщением. Для нелинейной характеристики с насыщением (рис. 19.8) при несимметричных колебаниях аналогичным путем получаем следующие значения постоянной составляющей $F^0(a, x^0)$ и коэффициента гармонической линеаризации $q(a, x^0)$:

$$\left. \begin{aligned}
 F^0 &= \frac{k}{\pi} \left[a \left(\sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{a^2}} - \sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{a^2}} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + (b+x^0) \arcsin \frac{b+x^0}{a} - (b-x^0) \arcsin \frac{b-x^0}{a} \right], \\
 q &= \frac{k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b-x^0}{a} + \arcsin \frac{b+x^0}{a} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{b-x^0}{a} \sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{a^2}} + \frac{b+x^0}{a} \sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{a^2}} \right) \quad (19.85)
 \end{aligned} \right\}$$

при $a \geq b + |x^0|$.

Проиллюстрируем на примере данной нелинейной характеристики графики $\frac{F^0}{c} = f_1\left(\frac{x^0}{b}\right)$ при разных $\frac{a}{b} = \text{const}$ и $\frac{q}{k} = f_2\left(\frac{a}{b}\right)$ при разных $\frac{x^0}{b} = \text{const}$, вычисленные по формулам (19.85) и представленные на рис. 19.13.

Из графиков для F^0 (рис. 19.13, а) видно, что при наличии колебаний входной величины нелинейного звена его статическая характеристика для

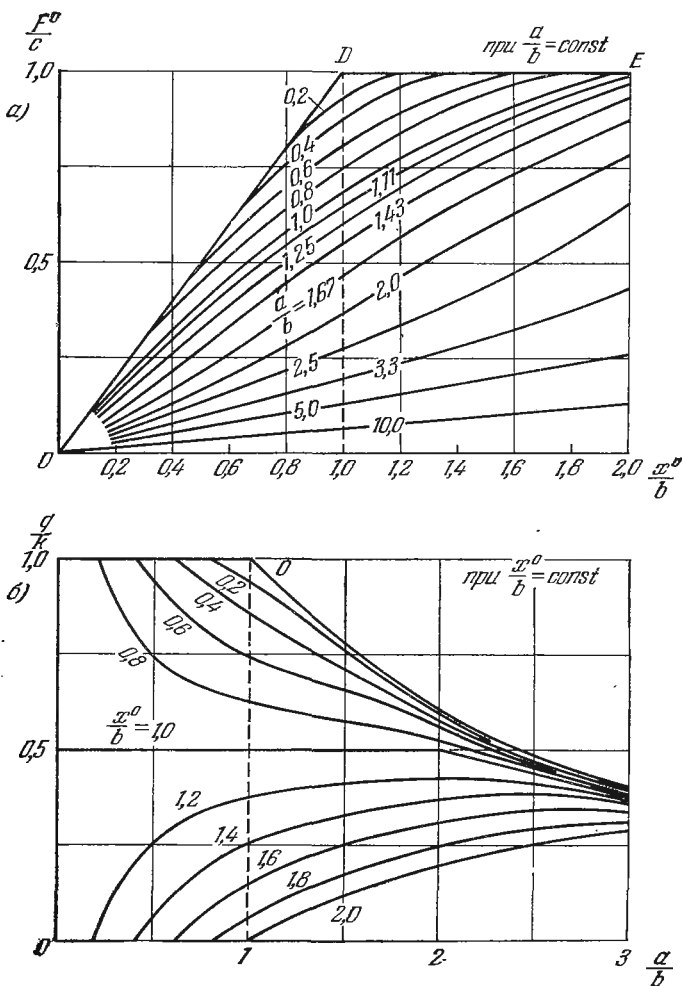


Рис. 19.13.

медленно меняющегося воздействия (функция смещения) сглаживается, причем увеличение амплитуды колебаний входной величины приводит к уменьшению коэффициента усиления нелинейного звена по постоянному или медленно меняющемуся входному воздействию.

Графики для q (рис. 19.13, б) характеризуют прохождение через нелинейное звено колебательной составляющей в зависимости от амплитуды на входе и смещения центра колебаний. Как видно, увеличение смещения приводит к уменьшению коэффициента усиления для колебательной составляющей.

Нелинейная характеристика типа люфта или зазора. В случае несимметричных колебаний нелинейная характеристика типа люфта или зазора (рис. 19.14) смещается вдоль средней линии, так что ее прежний центр O переходит в положение O' . Постоянная составляющая в этом случае определяется простой формулой

$$F^0 = kx^0.$$

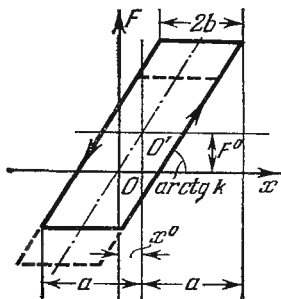


Рис. 19.14.

Колебательная составляющая функции $F(x^0 + a \sin \psi)$ относительно нового центра колебаний не зависит от величины смещения x^0 . Так, например, шестереночная пара, имеющая люфт, передает движение с тем же передаточным числом для любых углов поворота ведущей шестерни. В случае колебаний в кинематической передаче, включающей данную шестереночную пару, люфт будет проявлять себя одинаково для любых углов поворота. Поэтому для коэффициентов гармонической линеаризации характеристики типа люфта или зазора в случае смещенного центра колебаний относительно начала отсчета будем иметь те же формулы (18.27), что и для случая симметричных колебаний.

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 20.1. Приближенное исследование колебательных переходных процессов

Рассмотрим симметричные относительно оси времени колебательные переходные процессы в нелинейной автоматической системе, которые в первом грубом приближении могут быть описаны затухающей или расходящейся синусоидой с медленно меняющимися во времени показателем затухания и частотой (рис. 20.1).

Прежде чем записать это математически, обратим внимание на два существенных обстоятельства. Для линейных систем, когда показатель затухания $\zeta = \text{const}$ и частота $\omega = \text{const}$, пишут

$$x = a_0 e^{\zeta t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (20.1)$$

Если же частота ω и показатель затухания ζ в процессе колебаний меняются с течением времени, то решение следует записывать в другом виде.

Во-первых, следует писать $\sin \psi(t)$ и определять текущее значение частоты в произвольный момент времени в виде

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} \quad (20.2)$$

причем

$$\psi = \int_0^t \omega dt + \psi_0, \quad (20.3)$$

где ψ_0 — постоянная (начальная фаза). Существует другой способ, когда полагают $\psi = \omega_0 t + \varphi(t)$ при $\omega_0 = \text{const}$, причем согласно (20.2) текущее значение частоты

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt}. \quad (20.4)$$

Однако в данной задаче целесообразно придерживаться первого представления ((20.2) и (20.3)).

Во-вторых, при переменном во времени показателе затухания следует определять текущее значение амплитуды a (рис. 20.1) не в виде $a_0 e^{\zeta t}$, как сделано в (20.1), а в виде дифференциальной зависимости

$$\frac{da}{dt} = a\zeta. \quad (20.5)$$

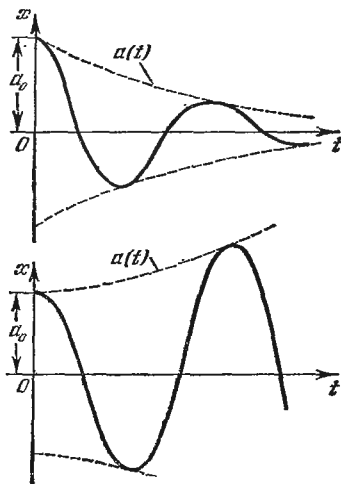


Рис. 20.1.

Тогда в случае линейной системы, когда $\zeta = \text{const}$, получаем как частный случай

$$\frac{da}{a} = \zeta dt, \quad a = a_0 e^{\zeta t},$$

а в случае нелинейной системы, когда ζ меняется в процессе колебаний, текущее значение амплитуды согласно (20.5) будет

$$\frac{da}{a} = \zeta dt, \quad a = a_0 e^{\int_0^t \zeta dt}, \quad (20.6)$$

т. е. огибающая колебаний (рис. 20.1) состоит из элементарных отрезков экспонент с непрерывно меняющимся показателем ζ .

Итак, будем искать решение для переходного процесса в нелинейной системе как первое приближение в виде

$$x = a \sin \psi, \quad (20.7)$$

$$\frac{da}{dt} = a\zeta, \quad \omega = \frac{d\psi}{dt}, \quad (20.8)$$

причем искомыми неизвестными будем считать медленно меняющиеся величины ζ и ω .

«Показатель затухания» может характеризовать быстроту не только затухания, но и расхождения колебаний:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} > 0 & \text{ при } \zeta > 0, \\ \frac{da}{dt} < 0 & \text{ при } \zeta < 0, \end{aligned} \right\} \quad (20.9)$$

т. е. положительным значениям «показателя затухания» ζ соответствуют расходящиеся колебания, а отрицательным — затухающие колебания.

Как уже было сказано, величины ζ и ω считаются медленно меняющимися функциями. Однако поскольку постоянные значения ζ могут соответствовать в линейных системах как медленному, так и быстрому затуханию колебаний, то и медленно меняющиеся значения ζ могут характеризовать как те, так и другие процессы.

Формулы гармонической линеаризации нелинейности для рассматриваемого случая будут иметь некоторую особенность по сравнению с прежними. В самом деле, если величина показателя затухания ζ не мала, то, дифференцируя выражение (20.7) по времени, как произведение двух функций, с учетом (20.8) находим

$$px = a\omega \cos \psi + a\zeta \sin \psi. \quad (20.10)$$

Отсюда и из (20.7) получаем

$$\sin \psi = \frac{x}{a}, \quad \cos \psi = \frac{px}{a\omega} - \frac{\zeta x}{a\omega} = \frac{p-\zeta}{a\omega} x. \quad (20.11)$$

Поэтому первая «гармоника» (затухающая или расходящаяся) нелинейной функций $F(x, px)$ при $x = a(t) \sin \psi(t)$ вместо (18.6) здесь будет

$$F(x, px) = qx + q' \frac{p-\zeta}{\omega} x = \left(q - \frac{\zeta}{\omega} q' \right) x + \frac{q'}{\omega} px, \quad (20.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, \quad a\omega \cos \psi + a\zeta \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, \quad a\omega \cos \psi + a\zeta \sin \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (20.13)$$

Здесь в общем случае коэффициенты гармонической линеаризации будут зависеть от трех неизвестных: a , ω и ζ . Если же рассматривается нелинейность $F(x)$, как чаще всего бывает, то q и q' сохраняют прежний вид:

$$q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad q' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi d\psi, \quad (20.14)$$

и в этом случае можно целиком использовать материал главы 18 в виде готовых выражений $q(a)$ и $q'(a)$ для различных конкретных нелинейностей, учитывая, однако, новую формулу (20.12) замены нелинейной функции.

В случае нелинейных систем первого класса дифференциальное уравнение колебательного переходного процесса

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = 0 \quad (20.15)$$

при наличии свойства фильтра (§ 18.2) после гармонической линеаризации согласно (20.12) принимает вид

$$Q(p)x + R(p)\left(q + \frac{p-\zeta}{\omega} q'\right)x = 0. \quad (20.16)$$

Колебательный процесс в линейной системе, описываемый решением (20.1), соответствует паре комплексных корней характеристического уравнения $p = \zeta + j\omega$ с постоянными значениями ζ и ω . Аналогично и колебательный процесс в нелинейной системе, описываемый приближенно формулами (20.7) и (20.8), определяется медленно меняющимися значениями ζ и ω , которые можно находить путем определения пары комплексных корней $p = \zeta \pm j\omega$ характеристического уравнения гармонически линеаризованной системы (20.16).

В соответствии с этим в характеристическое уравнение

$$Q(p) + R(p)\left(q + \frac{p-\zeta}{\omega} q'\right) = 0 \quad (20.17)$$

подставим $p = \zeta + j\omega$ для определения значений ζ и ω , удовлетворяющих этому уравнению. В результате получим

$$Q(\zeta + j\omega) + R(\zeta + j\omega)(q + jq') = 0. \quad (20.18)$$

Подстановку значения $\zeta + j\omega$ вместо p в любой многочлен удобно выполнять путем разложения его в ряд по степеням $j\omega$, например:

$$Q(\zeta + j\omega) =$$

$$= Q(\zeta) + \left(\frac{dQ}{dp}\right)_{\zeta} j\omega + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2Q}{dp^2}\right)_{\zeta} (j\omega)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n Q}{dp^n}\right)_{\zeta} (j\omega)^n, \quad (20.19)$$

где индекс ζ означает, что в выражения производных надо подставить ζ вместо p . По такой же формуле разлагается в ряд и многочлен $R(\zeta + j\omega)$.

При малых значениях ζ (для медленно затухающих процессов) вместо (20.19) удобнее применять разложение по степеням ζ , ограничиваясь его первой степенью, а именно:

$$\left. \begin{aligned} Q(\zeta + j\omega) &= Q(j\omega) + \left(\frac{dQ}{dp}\right)_{j\omega} \zeta, \\ R(\zeta + j\omega) &= R(j\omega) + \left(\frac{dR}{dp}\right)_{j\omega} \zeta, \end{aligned} \right\} \quad (20.20)$$

где индекс $j\omega$ означает подстановку $j\omega$ вместо p в выражения для производных.

В комплексном уравнении (20.18) содержатся три неизвестные: ζ , ω и a , причем последняя входит в q и q' . Поэтому указанное комплексное уравнение позволяет найти две переменные как функцию третьей:

$$\zeta = \zeta(a) \quad \text{и} \quad \omega = \omega(a), \quad (20.21)$$

т. е. изменение показателя затухания ζ и частоты ω с изменением амплитуды a затухающего или расходящегося колебательного процесса в нелинейной системе.

Когда функции (20.21) найдены, можно, пользуясь двумя дифференциальными уравнениями первого порядка (20.8), найти $a(t)$ и $\psi(t)$ для первого приближения искомого решения нелинейного уравнения (20.15) в форме (20.7). Интегралы уравнения (20.8) имеют при заданных начальных условиях ($a = a_0$, $\psi = \psi_0$ при $t = 0$) следующие выражения:

$$\int_{a_0}^a \frac{da}{a\zeta(a)} = t, \quad \psi = \int_0^t \omega(a) dt + \psi_0, \quad (20.22)$$

где $\zeta(a)$ и $\omega(a)$ — найденные ранее функции (20.21). Из первого уравнения (20.22) определяется $a(t)$, а из второго — $\psi(t)$ после подстановки в него $a(t)$ из первого. В результате получаем решение

$$x = a(t) \sin \psi(t). \quad (20.23)$$

Операция интегрирования (20.22) во многих случаях для оценки качества переходных процессов в автоматических системах не нужна. В большинстве случаев вполне достаточно бывает ограничиться нахождением функций (20.21) из комплексного алгебраического уравнения (20.18), так как качество симметричного колебательного переходного процесса вполне может быть охарактеризовано величинами ζ , ω и их отношением ζ/ω , а также характером их изменения в зависимости от амплитуды колебаний и от параметров системы.

Это достигается построением так называемых *диаграмм качества* затухания симметричных нелинейных колебаний. Диаграмма на рис. 20.2 представляет собой семейство линий $\zeta = \text{const}$ и линий $\omega = \text{const}$ на плоскости с координатами k , a , причем k означает какой-либо из основных подлежащих выбору параметров системы (коэффициент усиления или др.).

Для линейной системы линии $\zeta = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$ в тех же координатах имели бы вид вертикальных прямых, так как показатель затухания и частота колебательных переходных процессов в линейной системе не зависят от величины амплитуды колебаний a , а меняются только с изменением параметров системы (в данном случае k).

В нелинейной же системе эти линии искривляются (рис. 20.2) или просто наклоняются в зависимости от формы нелинейности и от общей структуры системы. Это выражает собой изменение

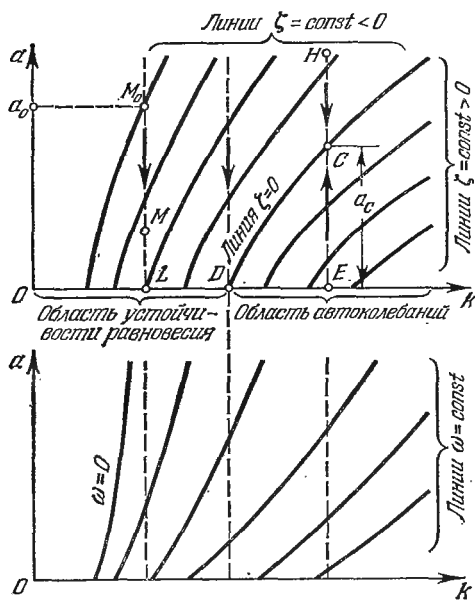


Рис. 20.2.

показателя затухания ζ и частоты ω нелинейных колебательных переходных процессов с изменением величины амплитуды колебаний a .

Значение $\zeta = 0$ соответствует отсутствию затухания, т. е. сохранению с течением времени постоянной амплитуды a . Например, точке C (рис. 20.2) соответствуют колебания с постоянной амплитудой a_c (автоколебания). Поэтому линия $\zeta = 0$ на диаграмме качества (рис. 20.2) представляет собой не что иное, как зависимость амплитуды автоколебаний от параметра системы k , которая определялась в главе 18. По одну сторону от этой линии лежат линии $\zeta = \text{const} > 0$, а по другую — $\zeta = \text{const} < 0$. Первые соответствуют расходящимся колебаниям, а вторые — затухающим.

Протеканию переходного процесса во времени соответствует движение изображающей точки M по вертикали (так как амплитуда a в переходном процессе меняется, а коэффициент усиления k сохраняется постоянным), как указано на рис. 20.2 пунктиром и стрелками. Например, значению k в точке L соответствует вертикальная прямая M_0L . Поскольку эта прямая пересекает линии только с отрицательными значениями ζ , то колебания в переходном процессе будут затухать, т. е. изображающая точка M будет двигаться из некоторого начального положения M_0 (где задана начальная амплитуда a_0) вниз. Процесс изменения амплитуды во времени показан на рис. 20.3, а. Изменение частоты $\omega(a)$ определяется при этом по соответствующей вертикали на нижней части рис. 20.2.

В том случае, когда параметр k в исследуемой системе имеет значение, соответствующее точке E (рис. 20.2), получается два варианта протекания переходного процесса. Если начальное положение изображающей точки будет ниже точки C ($a_0 < a_c$), то $\zeta > 0$, т. е. колебания расходятся и изображающая точка идет, как показано стрелкой на прямой EC , асимптотически приближаясь к точке C . Это соответствует процессу изменения амплитуды колебаний во времени, изображенному на рис. 20.3, б. Если же $a_0 > a_c$, то $\zeta < 0$, и изображающая точка пойдет по прямой HC вниз (рис. 20.2), что соответствует затухающему переходному процессу (рис. 20.3, в), асимптотически приближающемуся к автоколебаниям с амплитудой a_c .

Процессы, аналогичные этому, будут иметь место при любом значении параметра k правее точки D (рис. 20.2). Следовательно, область значений параметра k , лежащая правее точки D , является областью существования автоколебаний, к которой сходятся колебательные переходные процессы с обеих сторон (снизу и сверху). При этом положение равновесия системы (любая точка $a = 0$ на оси абсцисс) в данной области значений параметра k является неустойчивым, так как колебания в переходном процессе от него расходятся, стремясь к другому устойчивому состоянию — автоколебательному режиму.

Левее же точки D (рис. 20.2) лежат значения параметра k , при которых переходный процесс затухает от любой начальной амплитуды a_0 до нуля. Это есть область устойчивости равновесного состояния системы.

Левее линии $\omega = 0$ (рис. 20.2) лежит обычно область монотонных переходных процессов.

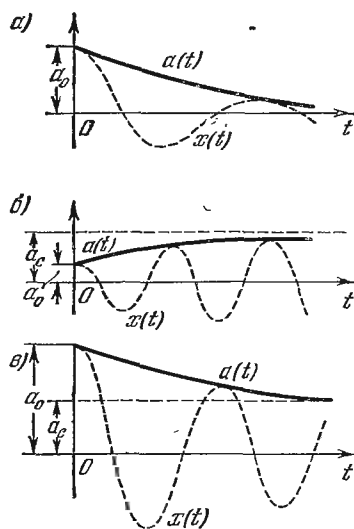


Рис. 20.3.

Итак, если диаграммы качества для разных структурных схем какой-либо автоматической системы построены по различным параметрам (k и др.), то они могут служить хорошим материалом для выбора наилучших параметров нелинейной системы при ее проектировании или синтезе.

Обратимся теперь к способам построения этих диаграмм.

Первый способ. Выделив в уравнении (20.18) вещественную X и мнимую Y части, подобно тому как это делалось в главе 18, получим два уравнения:

$$\begin{cases} X(a, \omega, \zeta) = 0, \\ Y(a, \omega, \zeta) = 0. \end{cases} \quad (20.24)$$

Пусть требуется построить диаграмму качества затухания нелинейных колебаний по некоторому параметру системы k , который входит в коэффициенты уравнений (20.24). Выразив на основании одного из этих уравнений величину

$$\omega = f_1(a, \zeta, k) \quad (20.25)$$

и подставив ее в другое из уравнений (20.24), найдем

$$k = f_2(a, \zeta). \quad (20.26)$$

Тогда, придавая ζ различные постоянные значения, по (20.26) можно легко построить семейство линий $\zeta = \text{const}$ на диаграмме качества (рис. 20.2). Затем, используя (20.25), можно построить также семейство линий $\omega = \text{const}$.

Второй способ. Характеристическое уравнение (20.17) можно записать в развернутом виде:

$$p^n + A_1 p^{n-1} + A_2 p^{n-2} + \dots + A_{n-1} p + A_n = 0, \quad (20.27)$$

где все коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_n$ или часть из них являются функциями искомых величин a, ω и ζ (в простейших задачах только от a). Разложим левую часть уравнения (20.27) на два сомножителя:

$$(p^{n-2} + C_1 p^{n-3} + \dots + C_{n-2})(p^2 + B_1 p + B_2), \quad (20.28)$$

последний из которых соответствует основной паре комплексных корней $p_{1-2} = \zeta \pm j\omega$, определяющей колебательный переходный процесс в исследуемой системе. Тогда получаем

$$\zeta = -\frac{B_1}{2}, \quad \omega^2 = B_2 - \zeta^2. \quad (20.29)$$

Первый из сомножителей (20.28) должен иметь значительно большие по модулю корни, чем второй, чтобы колебательное решение, соответствующее искомым корням $p_{1,2}$ при принятых начальных условиях, было основным.

Коэффициенты разложения (20.28) связаны следующими соотношениями:

$$A_1 = C_1 + B_1, \quad A_2 = B_2 + C_2 + B_1 C_1, \quad \dots, \quad A_n = C_{n-2} B_2.$$

Для нахождения величин ζ и ω необходимо, очевидно, в формулах (20.29) выразить коэффициенты B_1 и B_2 через коэффициенты первоначального уравнения (20.27)

В частности, для характеристического уравнения третьей степени

$$p^3 + A_1 p^2 + A_2 p + A_3 = (p + C_1)(p^2 + B_1 p + B_2) = 0$$

имеем:

$$A_1 = C_1 + B_1, \quad A_2 = B_2 + B_1 C_1, \quad A_3 = C_1 B_2. \quad (20.30)$$

Чтобы значения ζ и ω (20.29) определяли основную часть решения, а третий корень уравнения можно было не учитывать, нужно, чтобы

$$C_1 \gg \left| \frac{B_1}{2} \right| \quad \text{или} \quad A_1 \gg |\zeta|, \quad (20.31)$$

чем определяется верхний предел для значений $|\zeta|$, которые следует брать при построении диаграммы качества.

Составим предпоследний определитель Гурвица:

$$H_{n-1} = A_1 A_2 - A_3 = (C_1 + B_1)(B_2 + B_1 C_1) - C_1 B_2 = B_1(B_2 + C_1^2 + C_1 B_1).$$

Но так как из (20.30) и (20.29) следует, что $B_2 + C_1 B_1 = A_2$, $C_1^2 = (A_1 - B_1)^2$, $B_1 = -2\zeta$, то полученное выше выражение можно записать в виде

$$\zeta = -\frac{H_{n-1}}{2[A_2 + (A_1 + 2\zeta)^2]} = -\frac{|A_1 A_2 - A_3|}{2[A_2 + (A_1 + 2\zeta)^2]}. \quad (20.32)$$

Далее, поскольку из (20.30) следует, что

$$B_1 = \frac{A_3}{C_1} = \frac{A_3}{A_1 - B_1},$$

то из (20.29) получаем формулу для квадрата частоты:

$$\omega^2 = \frac{A_3}{A_1 + 2\zeta} - \zeta^2. \quad (20.33)$$

Формулы (20.22) и (20.23) позволяют строить диаграммы качества для систем третьего порядка.

Аналогично для системы четвертого порядка получаем

$$p^4 + A_1 p^3 + A_2 p^2 + A_3 p + A_4 = (p^2 + C_1 p + C_2)(p^2 + B_1 p + B_2), \quad (20.34)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= C_1 + B_1, & A_2 &= C_2 + B_2 + C_1 B_1, \\ A_3 &= C_1 B_2 + B_1 C_2, & A_4 &= C_2 B_2. \end{aligned} \right\} \quad (20.35)$$

Здесь требуется соблюдение того же условия (20.31).

Исходя из выражения предпоследнего определителя Гурвица, аналогичным путем находим формулу

$$\zeta = -\frac{H_{n-1}}{2(A_1 + 2\zeta)\{[A_2 + (A_1 + 2\zeta)2\zeta]^2 - 4A_4 + A_1 A_3\}}, \quad (20.36)$$

где

$$H_{n-1} = A_3(A_1 A_2 - A_3) - A_1^2 A_4,$$

а затем

$$\omega^2 = \frac{A_4(A_1 + 4\zeta)}{(A_1 + 2\zeta)(A_2 + 2\zeta) - A_3} - \zeta^2. \quad (20.37)$$

Третий способ. Рассмотрим часто встречающийся частный случай, когда коэффициенты гармонической линеаризации q и q' зависят только от амплитуды a и не зависят от частоты ω и показателя затухания ζ , что имеет место для нелинейностей вида $F(x)$. В этом случае после подстановки в характеристическое уравнение $p = \zeta + j\omega$ выражение (20.18) можно представить в виде

$$W_{\pi}(\zeta + j\omega) = -\frac{1}{W_{\Pi}(a)}, \quad (20.38)$$

где обозначено:

$$W_{\Pi}(a) = q(a) + jq'(a), \quad W_{\pi}(\zeta + j\omega) = \frac{R(\zeta + j\omega)}{Q(\zeta + j\omega)}, \quad (20.39)$$

причем числитель и знаменатель последнего выражения представляют собой, согласно (20.19), многочлены по степеням $j\omega$ с коэффициентами, зависящими от ζ .

Задавая различные постоянными значениями ξ , построим серию кривых $W_{\pi}(\xi + j\omega)$ как функции от $j\omega$ при $\xi = \text{const}$ (рис. 20.4) аналогично тому, как обычно строятся амплитудно-фазовые характеристики линейной части системы. На том же графике (рис. 20.4)

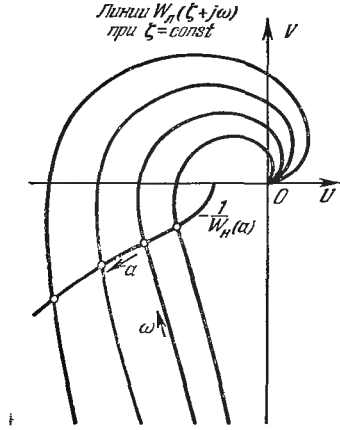


Рис. 20.4.

нанесем линию $-\frac{1}{W_H(a)}$. Точки пересечения ее с линиями $W_{\pi}(\xi + j\omega)$ определяют собой решение уравнения (20.38), а именно для каждого значения ξ в этих точках пересечения получаются соответствующие значения a (по кривой $-\frac{1}{W_H(a)}$) и ω (по кривой $W_{\pi}(\xi + j\omega)$). Этим самым определяется качество колебательного переходного процесса при всех заданных параметрах системы, т. е. определяются точки одной вертикали на диаграмме качества (рис. 20.2). Повторив такие же построения (рис. 20.4) для различных значений выбираемого параметра системы k , можно построить и всю диаграмму качества (рис. 20.2).

Способы построения диаграмм качества для систем второго класса и другие применения диаграмм см. в [100]. Там же рассматриваются несимметричные колебательные процессы и скользящие процессы.

§ 20.2. Примеры исследования колебательных переходных процессов

Рассмотрим сначала построение диаграммы качества и кривой переходного процесса на примере нелинейной следящей системы, а затем исследуем переходный процесс в нелинейной системе с логическим устройством.

Пример 1. Структурная схема следящей системы изображена на рис. 20.5, где 1 — датчик рассогласования, 2 — усилитель, 3 — реле, 4 — исполнительный двигатель, 5 — редуктор, 6 — управляемый объект,

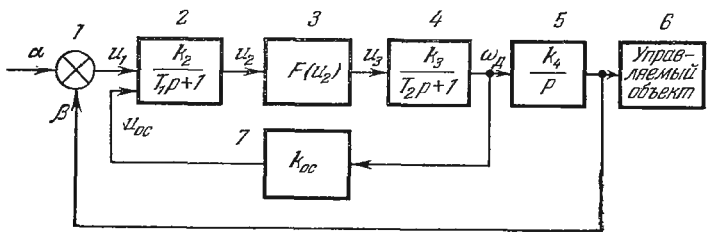


Рис. 20.5.

4 — исполнительный двигатель, 5 — редуктор, 6 — управляемый объект, 7 — дополнительная обратная связь.

Системы с такой структурной схемой находят применение в тех случаях, когда для управления двигателем нужна значительная мощность, а увеличение габаритов и веса усилителя нежелательно.

Для датчика рассогласования системы имеем уравнения

$$u_1 = k_1 (\alpha - \beta) = k_1 \Phi, \tag{20.40}$$

где α и β — соответственно входная и выходная величины системы, k_1 — передаточное число датчика рассогласования, Φ — рассогласование.

Статическая характеристика нелинейного звена — реле — изображена на рис. 20.6. Выполняя гармоническую линеаризацию нелинейной характеристики реле, получим уравнение

$$u_3 = q(a) u_2, \quad (20.41)$$

где в соответствии с (18.16) для однозначной релейной характеристики с зоной нечувствительности коэффициент гармонической линеаризации определяется формулой

$$q = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad (20.42)$$

Учитывая уравнение датчика рассогласования (20.40), гармонически линеаризованное уравнение реле (20.41) и передаточные функции других линейных звеньев, приведенные на рис. 20.5, запишем уравнение для собственного движения ($\alpha = 0$) следящей системы в виде

$$[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + k_2 k_3 k_{ocq}(a)p + k_1 k_2 k_3 k_{dq}(a)] u_2 = 0. \quad (20.43)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее полученному дифференциальному уравнению, будет

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + k_2 k_3 k_{ocq}(a)p + k_1 k_2 k_3 k_{dq}(a) = 0. \quad (20.44)$$

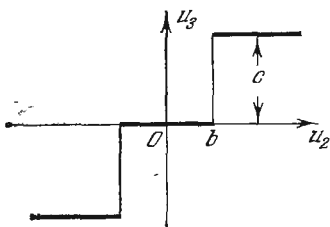


Рис. 20.6.

Произведем вначале построение диаграммы качества по первому способу, указанному в § 20.1. Для этого в уравнении (20.44) необходимо произвести подстановку $p = \zeta + j\omega$ с использованием формулы (20.19).

Вычисляя соответствующие производные характеристического полинома (20.44) по p и подставляя $p = \zeta$ в полученные выражения производных, найдем коэффициенты разложения в ряд уравнения (20.44) при $p = \zeta + j\omega$, которое в результате распадается на следующие два уравнения:

$$X = T_1 T_2 \zeta^3 + (T_1 + T_2) \zeta^2 + [1 + k_2 k_3 k_{ocq}(a)] \zeta + k_1 k_2 k_3 k_{dq}(a) - [3T_1 T_2 \zeta + T_1 + T_2] \omega^2 = 0, \quad (20.45)$$

$$Y = [3T_1 T_2 \zeta^2 + 2(T_1 + T_2) \zeta + 1 + k_2 k_3 k_{ocq}(a)] \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0. \quad (20.46)$$

Из последнего уравнения определяем квадрат частоты:

$$\omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2} [3T_1 T_2 \zeta^2 + 2(T_1 + T_2) \zeta + 1 + k_2 k_3 k_{ocq}(a)]. \quad (20.47)$$

Подставляя значение ω^2 в уравнение (20.45), получим

$$\begin{aligned} & T_1 T_2 \zeta^3 + (T_1 + T_2) \zeta^2 + [1 + k_2 k_3 k_{ocq}(a)] \zeta + k_1 k_2 k_3 k_{dq}(a) = \\ & = \frac{1}{T_1 T_2} [3T_1 T_2 \zeta^2 + 2(T_1 + T_2) \zeta + 1 + k_2 k_3 k_{ocq}(a)] [3T_1 T_2 \zeta + T_1 + T_2]. \end{aligned} \quad (20.48)$$

Построим диаграмму качества для следящей системы по параметру k_1 , т. е. по передаточному числу (крутизне характеристики) датчика рассогласования. Так как затухание ζ в (20.48) входит нелинейно, то удобно данное уравнение разрешить относительно параметра k_1 . В результате получим

$$\begin{aligned} k_1 = \frac{1}{k_2 k_3 k_{dq}(a)} \left\{ \frac{1}{T_1 T_2} [3T_1 T_2 \zeta^2 + 2(T_1 + T_2) \zeta + 1 + k_2 k_3 k_{ocq}(a)] \times \right. \\ \left. \times (3T_1 T_2 \zeta + T_1 + T_2) - [T_1 T_2 \zeta^3 + (T_1 + T_2) \zeta^2 + \zeta] \right\}. \end{aligned} \quad (20.49)$$

Для построения диаграммы зададимся следующими значениями других параметров: $T_1 = 0,05$ сек, $T_2 = 0,05$ сек, $k_2 = 1$, $k_3 = 200$ град/сек·в, $k_4 = 0,01$, $k_{ос} = 10^{-3}$ сек·в/град, $b = 5$ в, $c = 120$ в.

Подставляя приведенные значения параметров в (20.49) и задаваясь различными постоянными значениями показателя затухания $\zeta = \text{const}$, строим кривые $a(k_1)$ (рис. 20.7). На основании формулы (20.47) при постоянных значениях частоты $\omega = \text{const}$ строим также пунктирные кривые $a(k_1)$. Эти кривые представляют собой диаграмму качества для рассматриваемой следящей системы. Кривая $a(k_1)$ при $\zeta = 0$ соответствует автоколебаниям.

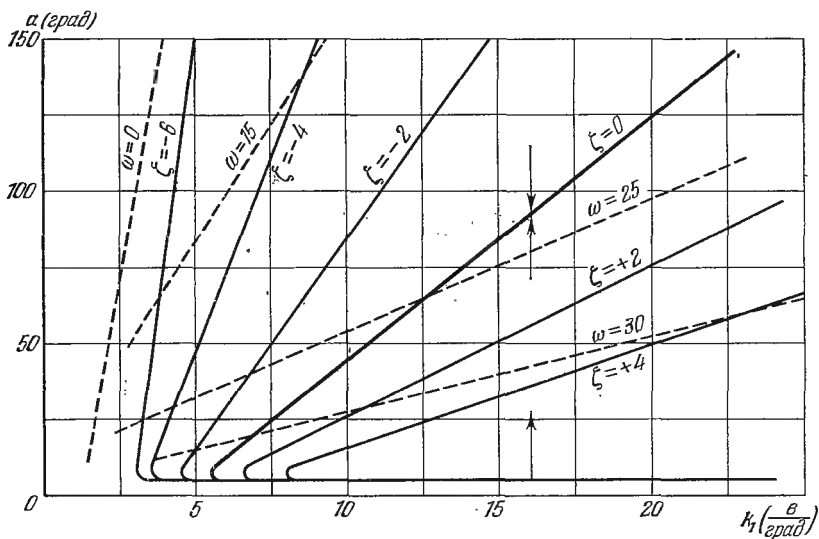


Рис. 20.7.

Выполним теперь построение диаграммы качества по второму способу, указанному в § 20.1.

Уравнение (20.44) запишем в виде

$$p^3 + A_1 p^2 + A_2 p + A_3 = 0,$$

где

$$A_1 = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}, \quad A_2 = \frac{1 + k_2 k_3 k_{ос} q(a)}{T_1 T_2}, \quad A_3 = \frac{k_1 k_2 k_3 k_4 q(a)}{T_1 T_2}.$$

Формулы (20.32) и (20.33) с этими значениями A_1 , A_2 , A_3 позволяют построить диаграмму затухания нелинейных процессов по любому из параметров системы. Для параметра k_1 при выбранных значениях других параметров следящей системы это дает тот же результат, что и в предыдущем случае.

Аналогичное построение диаграммы качества переходного процесса для той же системы при отключении дополнительной обратной связи дает результат, представленный на рис. 20.8. В данном частном случае линии $\zeta = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$ накладываются друг на друга.

Сравнивая полученные диаграммы для случаев наличия дополнительной обратной связи и отсутствия обратной связи, убеждаемся, что за счет обратной связи расширяется область затухающих колебательных процессов (область левее и выше линии $\zeta = 0$, соответствующей автоколебаниям). Кроме того, при тех же самых значениях параметра k_1 в случае наличия обратной связи в области затухающих процессов получается большее по абсолютной величине затухание, чем без обратной связи. Например, при $k_1 = 8$

и $a = 90^\circ$ при наличии обратной связи затухание $\zeta = -4$, тогда как в случае отключенной обратной связи $\zeta = -2$. Это говорит о том, что обратная связь приводит к увеличению быстроты затухания переходного процесса.

Полученные диаграммы качества позволяют оценить переходный процесс в нелинейной системе, если заданы параметры последней, а также дают

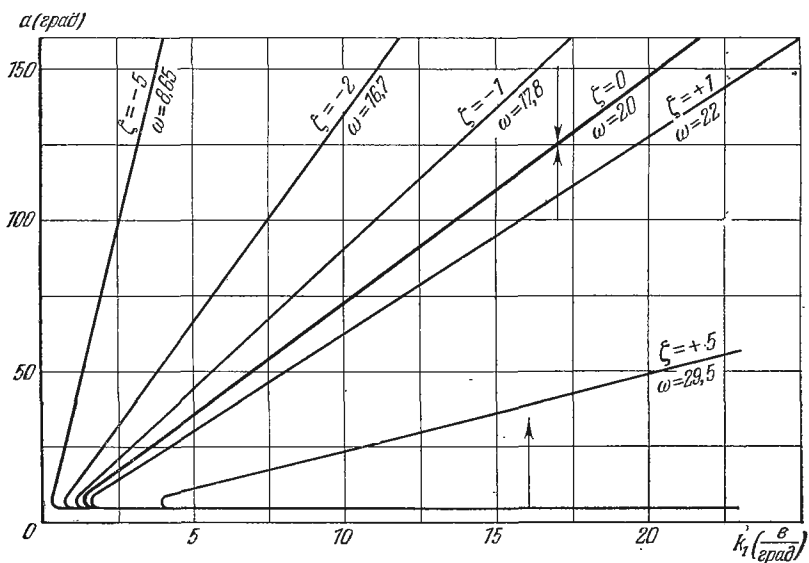


Рис. 20.8.

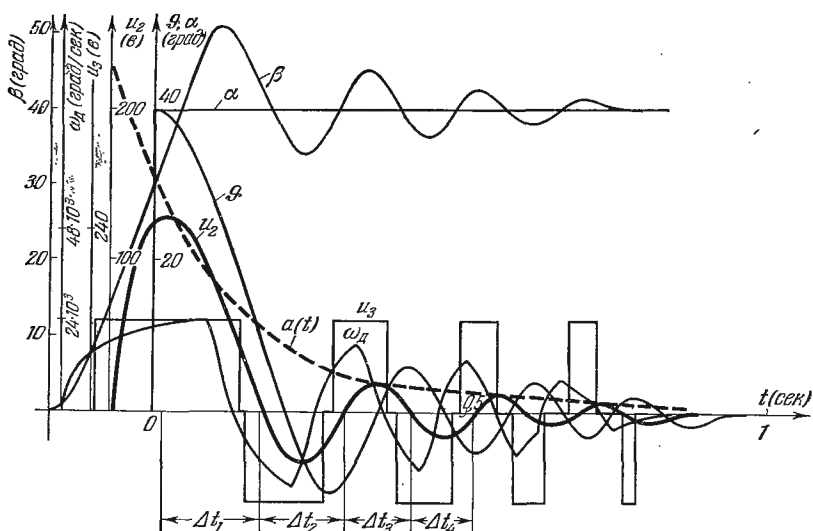


Рис. 20.9.

возможность решить и обратную задачу, т. е. выбрать значения параметров из условия заданного качества переходного процесса. Кроме того, по диаграммам качества легко построить огибающую амплитуд переходного процесса и найти изменение частоты процесса от периода к периоду, т. е. в конечном счете выполнить приближенное построение переходного процесса.

Для определения погрешности метода на рис. 20.9 построен переходный процесс в рассматриваемой системе численно-графическим методом Башки-

рова [98] при значении параметра $k_1 = 5 \text{ в/град}$ и при начальном значении амплитуды колебаний $a_0 = 250 \text{ в}$. На том же рис. 20.9 изображена пунктиром огибающая переходного процесса, построенная приближенно на основании диаграммы качества (рис. 20.7). Из выполненного построения видно, что

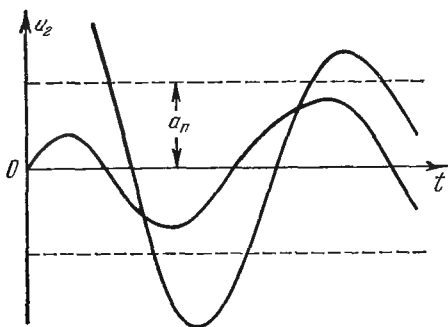


Рис. 20.10.

приближенный расчет по методу гармонической линейаризации дает небольшую погрешность при определении огибающей. На рис. 20.10 показан характер переходных процессов в той же системе при повышенной крутизне датчика рассогласования: $k_1 = 10 \text{ в/град}$. В данном случае в установившемся режиме имеют место автоколебания с амплитудой $a = 42 \text{ в}$.

На рис. 20.11 построен переходный процесс в той же системе при $k_1 = 10 \text{ в/град}$ для случая, когда система приходит к указанному режиму автоколебаний от малых начальных отклонений («снизу»).

Там же показана огибающая $a(t)$, найденная по методу гармонической линейаризации на основании диаграммы качества.

Приближенный метод дает достаточно хорошие результаты и в том случае, когда колебания затухают практически за один период (рис. 20.12).

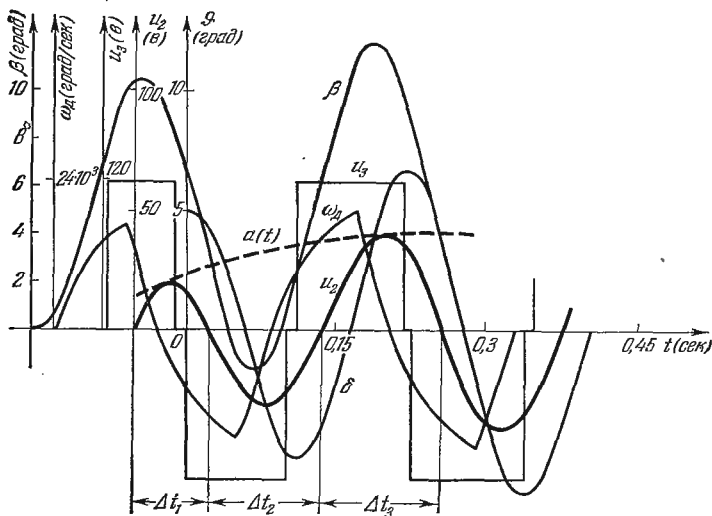


Рис. 20.11.

Пример 2. В главе 17 было рассмотрено точное исследование переходного процесса в идеальной системе с логическим устройством. Исследуем теперь приближенным методом переходный процесс в реальной системе с учетом нескольких постоянных времени, имея в виду, что он сходится к автоколебаниям с некоторой амплитудой $a = a_n$, которые изучались в § 18.4.

Найдем зависимости показателя затухания ζ и частоты ω от меняющейся в переходном процессе амплитуды a , т. е. зависимости $\zeta(a)$, $\omega(a)$. Тогда, зная начальную амплитуду a_0 и конечную $a = a_n$, можно судить о качестве переходного процесса по соответствующим значениям показателя затухания ζ и частоты ω .

Формула для гармонической линеаризации нелинейности вместо (18.153) принимает вид

$$\Phi(u, v) = \left[q + \frac{q'}{\omega} (p - \zeta) \right] x,$$

где q и q' определяются прежними формулами (18.154), так как последовательность переключений, согласно рис. 20.13, остается прежней. Но

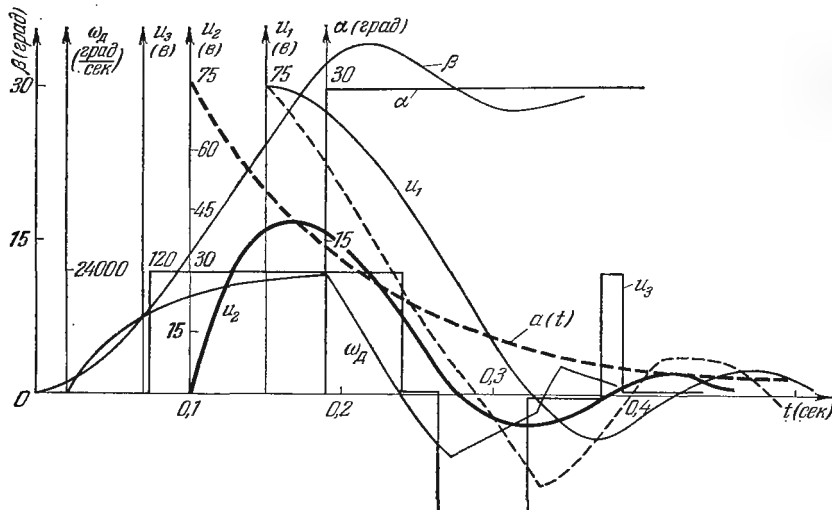


Рис. 20.12.

значения входящих в q и q' тригонометрических функций (18.151) и (18.152) изменятся следующим образом. При определении a_u и a_v через a нужно в соответствующие передаточные функции подставить $p = \zeta + j\omega$, что дает

$$a_u = \frac{k_1 a}{(1 + T_1 \zeta) \sqrt{\left(\frac{T_1 \omega}{1 + T_1 \zeta} \right)^2 + 1}},$$

$$\beta' = \arctg \frac{T_1 \omega}{1 + T_1 \zeta}$$

(аналогичные выражения получаются для a_v и γ). Сравнивая их с (18.149), приходим к выводу, что в формулах (18.151) и (18.152) вместо a , $T_1 \omega$, $a \omega$, $T_2 \omega$ должны быть поставлены соответственно выражения:

$$\frac{a}{1 + T_1 \zeta}, \quad \frac{T_1 \omega}{1 + T_1 \zeta}, \quad \frac{a \omega}{1 + T_2 \zeta}, \quad \frac{T_2 \omega}{1 + T_2 \zeta}. \quad (20.50)$$

В результате q и q' будут функциями всех трех величин: $q(a, \omega, \zeta)$; $q'(a, \omega, \zeta)$. Характеристическое уравнение вместо (18.155) примет вид

$$b_0 p^4 + b_1 p^3 + b_2 p^2 + p + k \frac{q'(a, \omega, \zeta)}{\omega} (p - \zeta) + k q(a, \omega, \zeta) = 0,$$

где

$$b_0 = T_0 T_3 T_4, \quad b_1 = T_0 T_3 + T_0 T_4 + T_3 T_4, \quad b_2 = T_0 + T_3 + T_4, \\ k = k_0 k_3 k_4.$$

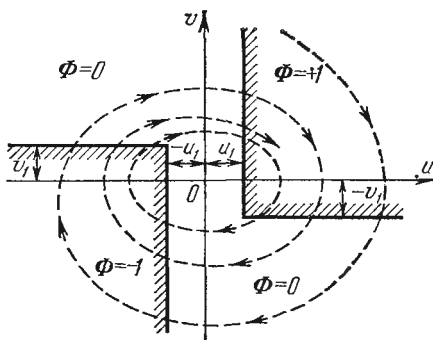


Рис. 20.13.

После подстановки $p = \zeta + j\omega$ по формуле (20.19) получаем вещественную и мнимую части:

$$X = kq(a, \omega, \zeta) + b_0 \zeta^4 + b_1 \zeta^3 + b_2 \zeta^2 + \zeta - (6b_0 \zeta^2 + 3b_1 \zeta + 2b_2) \omega^2 + b_0 \omega^4 = 0,$$

$$Y = kq'(a, \omega, \zeta) + (4b_0 \zeta^3 + 3b_1 \zeta^2 + 2b_2 \zeta + 1) \omega - (4b_0 \zeta + 6b_1) \omega^3 = 0.$$

Отсюда находим:

$$kq(a, \omega, \zeta) = f_1(\omega, \zeta), \quad kq'(a, \omega, \zeta) = f_2(\omega, \zeta). \quad (20.51)$$

Будем задаваться разными значениями ζ и ω и строить на основании уравнений (20.51) линии равных значений ζ и ω на плоскости координат k, a (рис. 20.14). Для этого для заданных ζ, ω сначала строится кривая отношения $q(a)/q'(a)$ (рис. 20.15). Согласно (20.51) это отношение должно быть равно определенному числу: $q(a)/q'(a) = f_1/f_2$, чем определится значение a (рис. 20.15) для данных ζ, ω . После этого для них вычисляется значение

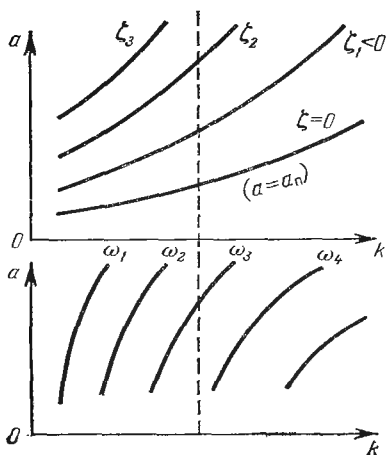


Рис. 20.14.

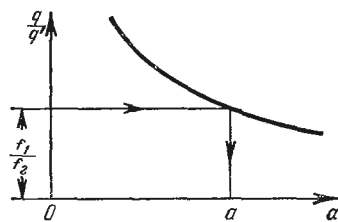


Рис. 20.15.

$k = f_1/q$. Таким путем по точкам строится вся диаграмма качества нелинейного переходного процесса (рис. 20.14). Линия $\zeta = 0$ соответствует зависимости амплитуды установившихся автоколебаний от коэффициента усиления k .

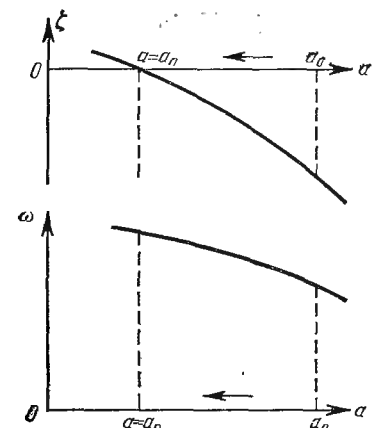


Рис. 20.16.

При любом заданном k изменение показателя затухания ζ и изменение частоты ω во время переходного процесса определится прямой $k = \text{const}$ (рис. 20.14, пунктир). Результат показан на рис. 20.16. Это позволяет судить о быстроде затухания и о количестве колебаний за время переходного процесса.

Заметим, что решение задачи несколько упростится при малом ζ . В этом случае, считая постоянные времени измерителей T_1 и T_2 достаточно малыми, можем пренебречь произведениями $T_1 \zeta$ и $T_2 \zeta$ в выражениях (20.50) и пользоваться прежними выражениями q и q' (18.151) с подстановками (18.154) и (18.152). Кроме того, в написан-

ных выше выражениях для X и Y нужно сохранить только первую степень ζ :

$$X = kq(a, \omega) + \zeta - (3b_1 \zeta + 2b_2) \omega^2 + b_0 \omega^4 = 0,$$

$$Y = kq'(a, \omega) + (2b_2 \zeta + 1) \omega - (4b_0 \zeta + 6b_1) \omega^3 = 0.$$

В принципе решение не меняется. Изложенный метод решения задачи отличается тем, что он одинаково пригоден к различным системам, описываемым уравнениями любого порядка, и не связан с построением годографов на комплексной плоскости.

§ 20.3. Система с нелинейным корректирующим устройством

На примере конкретной следящей системы (рис. 20.17) рассмотрим некоторые особенности введения специальных нелинейных корректирующих устройств, использование которых приводит к тому, что переходный процесс

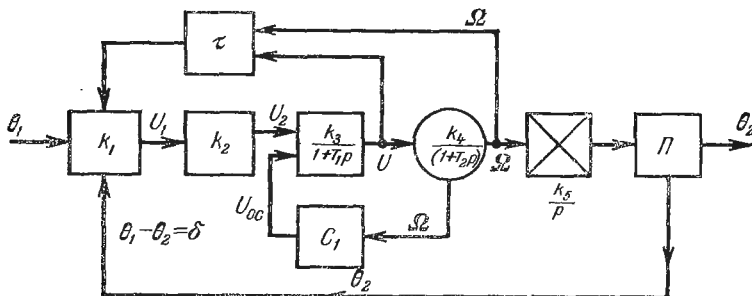


Рис. 20.17.

в системе имеет такой вид, как будто инерционность двигателя во время переходного процесса существенно уменьшается [134].

На рис. 20.18 тонкой линией показано, что при синусоидальных колебаниях вследствие инерционности двигателя ошибка реальной системы δ_p отстает от ошибки при «идеальном» двигателе δ_n на угол $\psi = \arctg \omega T$, где ω — частота колебаний, T — постоянная времени двигателя.

Введение нелинейных динамических корректирующих сигналов в данном случае производится таким образом, чтобы деформировать вид кривой ошибки δ_p , как показано штриховкой на рис. 20.18.

Для отыскания численных соотношений, определяющих зависимость между интервалом введения динамического корректирующего сигнала и эквивалентными параметрами двигателя, разложим заштрихованную кривую (рис. 20.18) в ряд Фурье и сравним с кривой ошибки δ_n при безынерционном двигателе. Ограничиваясь основной гармоникой колебаний, получим

$$\delta = \delta_1 \sin \omega t + \delta_2 \cos \omega t, \quad (20.52)$$

где

$$\delta_1 = \frac{2}{\pi} \delta_0 \int_{\psi}^{\pi} \sin(\omega t - \psi) \sin \omega t d\omega t, \quad \delta_2 = \frac{2}{\pi} \delta_0 \int_{\psi}^{\pi} \sin(\omega t - \psi) \cos \omega t d\omega t$$

или

$$\delta_1 = \frac{\delta_0}{\pi} [\cos \psi (\pi - \psi) + \sin \psi], \quad \delta_2 = \frac{\delta_0}{\pi} \sin \psi (\psi - \pi). \quad (20.53)$$

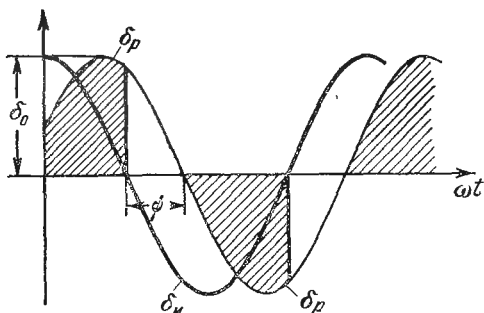


Рис. 20.18.

Заметим, что амплитуда ошибки δ_0 связана с амплитудой управляющего напряжения a соотношением $\delta_0 = k_4 k_5 a \cos \psi$. При этом выражения для коэффициентов гармонической линеаризации примут вид

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{k_4 k_5 \cos \psi}{\pi} [\cos \psi (\pi - \psi) + \sin \psi], \\ q' &= -\frac{k_4 k_5 \sin 2\psi}{2\pi} (\pi - \psi). \end{aligned} \right\} \quad (20.54)$$

Поэтому гармонически линеаризованное уравнение двигателя с указанной нелинейной коррекцией будет

$$\Omega = \left[q(a, \omega) + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} p \right] U, \quad (20.55)$$

где Ω и U обозначены на рис. 20.17.

Оно позволяет совместно с уравнениями остальных звеньев системы проводить анализ системы. Однако использование уравнения (20.55) технически не всегда бывает удобно. Недостатком формы записи его является то, что двигатель, по существу, является инерционным звеном, в то время как уравнение его получилось в форме уравнения звена с введением производной, причем $q' < 0$.

Для получения передаточной функции двигателя обычного вида необходимо сделать некоторые специальные преобразования. Будем искать ее в виде

$$\Omega = \frac{k^*}{1 + T^* p} U \quad (20.56)$$

с неизвестными пока k^* и T^* . Потребуем, чтобы (20.56) и (20.55) были эквивалентны друг другу.

Уравнение (20.56) запишем в виде

$$T^* \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = k^* U \quad (20.57)$$

и подставим в него значения $\frac{d\Omega}{dt}$ и Ω из (20.55):

$$T^* \left[q(a, \omega) \frac{dU}{dt} + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} \frac{d^2 U}{dt^2} \right] + q(a, \omega) U + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} \frac{dU}{dt} = k^* U. \quad (20.58)$$

Для случая исследования автоколебаний и устойчивости системы выражение для напряжения U принимается в виде

$$U = a \sin \omega t.$$

Подставив это в уравнение (20.58) и выделив члены с синусами и косинусами, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} T^* q(a, \omega) \omega + q(a, \omega) &= 0, \\ -T^* q'(a, \omega) \omega + q(a, \omega) - k^* &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим

$$T^* = \frac{-q'(a, \omega)}{\omega q(a, \omega)}, \quad k^* = q(a) + \frac{[q'(a, \omega)]^2}{q(a, \omega)}. \quad (20.59)$$

Таким образом, передаточная функция двигателя с нелинейной коррекцией имеет вид

$$\Omega = \frac{q(a) + \frac{[q'(a, \omega)]^2}{q(a, \omega)}}{1 + \frac{-q'(a, \omega)}{\omega q(a, \omega)} p} U. \quad (20.60)$$

Заметим, что в данном случае $q'(a) < 0$ и эквивалентная постоянная времени звена T^* , как это и должно быть, положительна.

Из выражения (20.59) видно, что для уменьшения постоянной времени двигателя нужно уменьшить величину $|q'|$.

Найдем передаточную функцию двигателя с указанной нелинейной коррекцией для исследования переходного процесса.

Вместо (20.55) получим

$$\Omega = \left[q(a, \omega) - \frac{\xi}{\omega} q'(a, \omega) + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} p \right] U. \quad (20.61)$$

Передаточную функцию двигателя с нелинейной коррекцией, как и прежде, ищем в виде (20.56) или

$$T^* \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = k^* U.$$

Подставим сюда значения $\frac{d\Omega}{dt}$ и Ω из (20.61). Получим

$$T^* \left\{ \left[q(a, \omega) - \frac{\xi}{\omega} q'(a, \omega) \right] pU + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} p^2 U \right\} + \\ + \left[q(a, \omega) - \frac{\xi}{\omega} q'(a, \omega) \right] U + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} pU = k^* U. \quad (20.62)$$

Затем, учитывая форму решения (20.7), (20.8), запишем выражения

$$pU = a(\xi \sin \psi + \omega \cos \psi), \quad p^2 U = a(\xi^2 - \omega^2) \sin \psi + 2a\xi\omega \cos \psi$$

и подставим их в (20.62). Разделяя там члены с синусами и косинусами, получим систему уравнений

$$T^* [\omega q(a, \omega) + \xi q'(a, \omega)] + q'(a, \omega) = 0, \\ T^* [\xi q(a, \omega) - \omega q'(a, \omega)] + q(a, \omega) - k^* = 0.$$

Отсюда находим выражения для эквивалентного коэффициента усиления и постоянной времени:

$$k^* = q(a, \omega) + \frac{[q'(a, \omega)]^2 - \frac{\xi}{\omega} q(a, \omega) q'(a, \omega)}{q(a, \omega) + \frac{\xi}{\omega} q'(a, \omega)}, \quad (20.63)$$

$$T^* = \frac{-q'(a, \omega)}{\omega \left[q(a, \omega) + \frac{\xi}{\omega} q'(a, \omega) \right]}. \quad (20.64)$$

Они отличаются от выражений (20.59), выведенных для случая исследования автоколебаний и устойчивости, наличием членов с ξ/ω , характеризующих переходный процесс.

Поскольку в полученные формулы величина показателя затухания ξ входит только в составе дроби ξ/ω , причем практически при исследовании колебательных переходных процессов часто $\omega \gg \xi$, то во многих случаях и для переходных процессов можно использовать более простые формулы (20.59).

Используя выражения, полученные для коэффициентов гармонической линеаризации (20.54), и выражения для эквивалентных параметров двигателя (20.63) и (20.64), можно найти общее выражение для эквивалентной постоянной времени двигателя при использовании данного вида нелинейных корректирующих сигналов:

$$T^* = \frac{\pi - \psi}{\pi - \psi + \omega T}. \quad (20.65)$$

В тех случаях, когда требуется значительно скомпенсировать во время переходного процесса отрицательное влияние инерционности двигателя, необходимо ввести «упреждение» γ (рис. 20.19).

Графики коэффициентов гармонической линеаризации и эквивалентных значений постоянной времени и коэффициента усиления звена для подобного типа корректирующих сигналов приведены на рис. 20.20, а, б, в при разных значениях γ .

Из рис. 20.20, в виден эффект уменьшения инерционности приводного двигателя за счет описанной коррекции.

Для оценки влияния нелинейных корректирующих сигналов рассмотрим процессы в следящей системе, схема которой изображена на рис. 20.17.

Перед усилителем следящей системы (или в первых каскадах усилителя) установлено логическое устройство, которое включает корректирующий сигнал.

В те интервалы времени, в которые знаки анализируемых

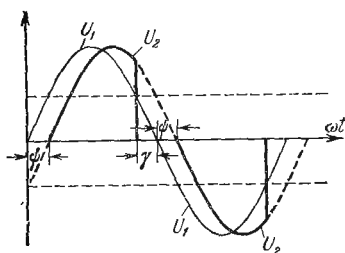


Рис. 20.19.

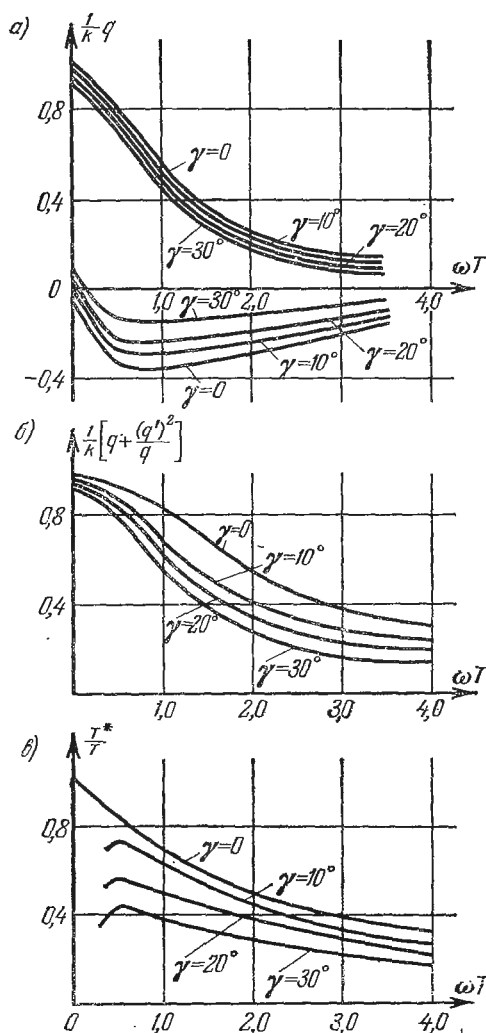


Рис. 20.20.

сигналов U и Ω не совпадают, в системе формируется корректирующий сигнал, который сдвигается на время τ и подается для выключения сигнала ошибки.

Уравнения системы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \theta_1 - \theta_2, & U_1 &= k_1 \delta, \\ U &= k_2 U_1, & U_{oc} &= c_1 \Omega, \\ U_3 &= \frac{k_3}{1 + T_1 p} (U_2 - U_{oc}), \\ \Omega &= \frac{k^*}{1 + T^* p} U_3, & \theta_2 &= \frac{k_5}{p} \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (20.66)$$

Отсюда выражение для ошибки системы с учетом выражений (20.59) будет

$$\delta = \frac{\left[1 + \frac{-q'(a, \omega)}{\omega q(a, \omega)} p\right] (1 + T_1 p) + c_1 k_3 \left[q(a, \omega) + \frac{q'(a, \omega)^2}{q(a, \omega)}\right]}{p \left[1 + \frac{-q'(a, \omega)}{\omega q(a, \omega)} p\right] (1 + T_1 p) + c_1 k_3 \left[q(a, \omega) + \frac{q'(a, \omega)^2}{q(a, \omega)}\right] p + k} p \theta_1. \quad (20.67)$$

Характеристическое уравнение системы будет

$$p^3 + A_1 p^2 + A_2 p + A_3 = 0,$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{T_1} + \frac{\omega q(a, \omega)}{-q'(a, \omega)}, \\ A_2 &= \frac{1 + c_3 k_3 \left[q(a, \omega) + \frac{q'(a, \omega)^2}{q(a, \omega)}\right]}{\frac{-q'(a, \omega)}{\omega q(a, \omega)} T_1}, \\ A_3 &= \frac{k}{\frac{-q'(a, \omega)}{\omega q(a, \omega)} T_1}. \end{aligned} \right\} \quad (20.68)$$

Для определения автоколебаний и устойчивости воспользуемся коэффициентным методом (§ 18.2). По критерию Гурвица ($A_1 A_2 - A_3 = 0$) находим критический коэффициент усиления

$$k_{кр} = \left[\frac{1}{T_1} + \frac{\omega q(a, \omega)}{-q'(a, \omega)} \right] \left[1 + c_1 k_3 \left(q(a, \omega) + \frac{q'(a, \omega)^2}{q(a, \omega)} \right) \right], \quad (20.69)$$

причем уравнение для частоты колебаний системы получает вид

$$\omega^2 = \frac{A_3}{A_1} = \frac{k_{кр}}{T_1 + \frac{-q'(a, \omega)}{\omega q(a, \omega)}}. \quad (20.70)$$

Решение системы этих двух уравнений целесообразно производить методом последовательных приближений.

Производя вычисления для заданных значений параметров системы $T_1 = 0,04 \text{ сек}$, $T_2 = 0,02 \text{ сек}$, $k_3 = 1$, $c = 5 \cdot 10^{-3} \text{ в.сек/град}$, $k_4 = 200 \text{ град/сек.в}$, $\gamma = 30^\circ$, получим:

$$k_{кр} = 255 \text{ сек}^{-1}, \quad \omega = 75 \text{ сек}^{-1}.$$

В линейной следящей системе (без нелинейной коррекции) $k_{кр}$ при таких же параметрах значительно ниже.

Для определения качества переходных процессов используем формулы (20.32) и (20.33), что дает

$$\zeta = - \frac{\left[\frac{1}{T_1} + \frac{\omega q(a, \omega)}{-q'(a, \omega)} \right] \left[1 + k_3 c \left(q(a, \omega) + \frac{q'(a, \omega)^2}{q(a, \omega)} \right) \right] - k}{2 \left[1 + k_3 c_1 \left(q(a, \omega) + \frac{q'(a, \omega)^2}{q(a, \omega)} \right) - \left(\frac{1}{T_1} + \frac{\omega q(a, \omega)}{q'(a, \omega)} + 2\xi \right)^2 \frac{T_1 q'(a, \omega)}{\omega q(a, \omega)} \right]},$$

$$\omega^2 = \frac{k}{T_1 + \frac{-q'(a, \omega)}{\omega q(a, \omega)} - 2\xi \frac{T_1 q'(a, \omega)}{\omega q(a, \omega)}}.$$

Решая эти уравнения методом последовательных приближений для значения коэффициента усиления системы $k_{ст} = 300 \text{ сек}^{-1}$, получим значение показателя затухания и частоты колебаний: $\zeta = -5,25 \text{ сек}^{-1}$, $\omega = 55 \text{ сек}^{-1}$. Длительность переходного процесса здесь составляет примерно 0,5 сек, а перерегулирование — 74%.

Для того чтобы получить аналогичное качество переходного процесса в линейной системе без использования нелинейных динамических корректирующих сигналов, необходимо, чтобы коэффициент усиления системы был не более 90 сек^{-1} , т. е. примерно в 3 раза меньше, чем в нелинейной системе. При этом показатель затухания и частота колебаний будут равны: $\zeta = -5 \text{ сек}^{-1}$, $\omega = 40,5 \text{ сек}^{-1}$. Длительность переходного процесса в данном случае будет равна $t_1 \approx 0,6 \text{ сек}$.

На рис. 20.21 приведены результаты точного решения исходных нелинейных уравнений для следующих значений параметров системы: $k_1 k_2 = 2000$, $k_3 = 1$, $k_4 = 200 \text{ град/сек} \cdot \text{е}$, $k_5 = 10^{-3}$, $c_1 = 0$, $T_1 = 0,04 \text{ сек}$, $T_2 = 0,02 \text{ сек}$.

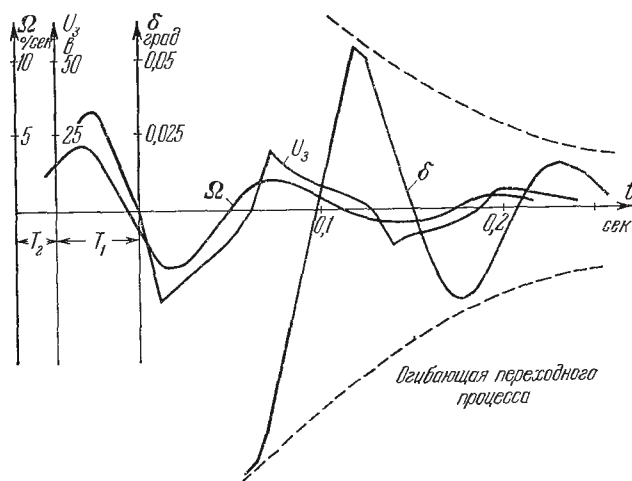


Рис. 20.21.

Точное значение коэффициента затухания $\zeta_t = -9 \text{ сек}^{-1}$ отличается от приближенного $\zeta = -7 \text{ сек}^{-1}$ в данном случае на 22%. Точное значение частоты колебаний $\omega_t = 52 \text{ сек}^{-1}$ отличается от приближенного значения $\omega = 54 \text{ сек}^{-1}$ на 4%. Подобная точность определения параметров переходного процесса может считаться вполне приемлемой.

При наличии в системе дополнительной нелинейности типа насыщения, что практически почти всегда имеет место, величина первого перерегулирования существенно уменьшается.

§ 20.4. Применение логарифмических частотных характеристик для исследования нелинейных законов регулирования

Аппарат логарифмических частотных характеристик является простым расчетным средством линейной теории регулирования. Многие расчеты нелинейных систем, основанные на гармонической линеаризации нелинейностей, могут быть также переложены на язык логарифмических частотных характеристик. Однако, имея в виду желательность наибольшей простоты расчета, будем здесь вместо гармонического коэффициента усиления $q(a)$ применять эквивалентный коэффициент усиления нелинейного звена $k(x)$:

$$F(x) = k(x)x, \quad \text{где} \quad k(x) = \frac{F(x)}{x}. \quad (20.71)$$

Это выражение $k(x)$ является точным для любой заданной точки графика $F(x)$. Требуется определить коэффициент усиления амплитуды колебаний. Выше он записывался в виде $q(a)$. Теперь же введем коэффициент

усиления амплитуды в виде

$$k(a) = \frac{F(a)}{a}.$$

Большое его практическое преимущество состоит в простоте вычисления k по виду $F(x)$ и обратно, что затруднено в гармонической линеаризации. Строго говоря, это выражение $k(a)$ соответствует не синусоидальным, а прямоугольным колебаниям (рис. 20.22), где действительно $A = k(a)a$ (прямоугольная линеаризация). Однако вычисления показывают, что значения $k(a)$ и $q(a)$ для многих типовых нелинейностей отличаются друг от друга всего на несколько процентов, что вполне приемлемо для приближенных инженерных расчетов.

Проиллюстрируем метод исследования на примере системы с нелинейным законом регулирования, формируемым в нелинейных блоках W_ψ и W_z (рис. 20.23), при учете нелинейности $p\delta = F(\sigma)$ в виде ограничения по скорости исполнительного привода. Система имеет три контура: внутренний контур 1, промежуточный контур 2, внешний контур 3.

Параметры внутреннего контура и объекта управления заданы. Задача состоит в отыскании структуры и параметров нелинейных блоков промежуточного и внешнего контуров, т. е. нелинейных передаточных функций W_ψ

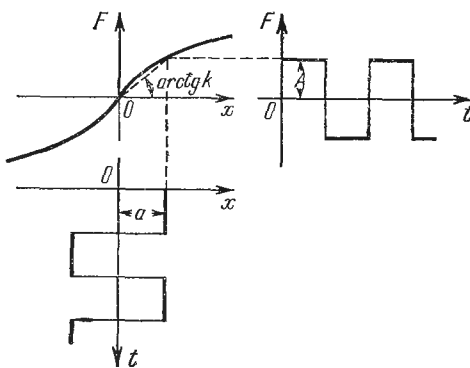


Рис. 20.22.

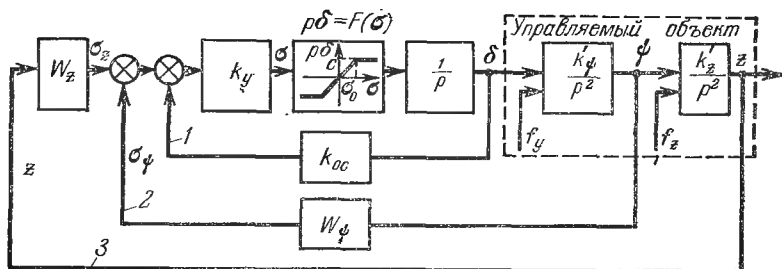


Рис. 20.23.

и W_z , обеспечивающих наилучшие характеристики управления величинами ψ и z в смысле устойчивости, а также точности стабилизации z при воздействии на систему возмущений f_y и f_z .

Передаточная функция внутреннего контура тоже будет нелинейной:

$$\frac{\delta}{\sigma} = \frac{k_{пр}}{\tau(\sigma)p + 1}, \quad (20.72)$$

где

$$\tau(\sigma) = \frac{1}{k(\sigma)k_yk_{oc}}, \quad k_{пр} = \frac{1}{k_{oc}k_y}, \quad k(\sigma) = \frac{F(\sigma)}{\sigma}.$$

При этом с увеличением сигнала σ (при $\sigma > \sigma_0$) значение постоянной времени $\tau(\sigma)$ увеличивается.

Передаточная функция разомкнутого промежуточного контура для рассматриваемого примера будет

$$W(p, \sigma) = \frac{k_{\text{PT}} k'_{\Psi} W_{\Psi}}{p^2 [\tau(\sigma) p + 1]}. \quad (20.73)$$

Если внутренний контур работает в линейной зоне (т. е. при $\sigma \leq \sigma_0$), то по линейной теории регулирования рекомендуется выбрать структуру блока W_{Ψ} в виде

$$W_{\Psi}(p) = k_1 (1 + T_a p), \quad (20.74)$$

причем, на основании требований к быстродействию и к величине перерегулирования,

$$T_a = n\tau_0, \quad k_1 = \frac{1}{k_{\text{PT}} k'_{\Psi} T_a \sqrt{T_a \tau_0}}, \quad (20.75)$$

где n — некоторое число, выбор которого зависит от того, какой коэффициент колебательности и запас по фазе необходимо обеспечить, а τ_0 — постоянная времени рулевого тракта при $\sigma \leq \sigma_0$, т. е.

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{k_y k_{\text{CO}} c}.$$

При выборе параметров регулятора по формулам (20.75) частота среза ω_c будет лежать на ветви логарифмической амплитудно-частотной характеристики с наклоном в 20 дБ/дек, посредине участка $\left(\frac{1}{T_a}, \frac{1}{\tau_0}\right)$ шириной $\lg n$ декад.

Однако при $\sigma > \sigma_0$ внутренний контур будет работать в зоне насыщения скоростной характеристики и постоянная времени $\tau(\sigma)$ будет увеличиваться с увеличением σ . Это может привести при выбранных выше параметрах T_a и k_1 к значительной колебательности и даже потери устойчивости в случае,

$$\tau(\sigma) \geq T_a. \quad (20.76)$$

Поэтому для обеспечения устойчивости при $\sigma > \sigma_0$ необходимо брать значения n завышенными, но тогда окажутся неудовлетворительными характеристики стабилизации при $\sigma \leq \sigma_0$, т. е. невозможно обеспечить хорошую

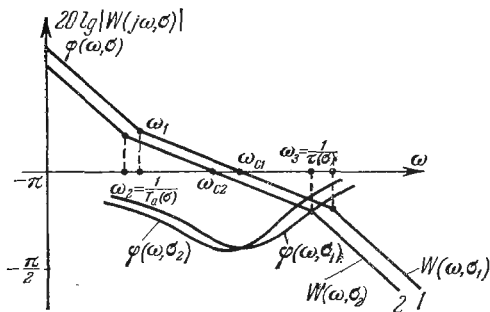


Рис. 20.24.

настройку системы регулирования с помощью постоянных k_1 и T_a для всех режимов. В таком случае вместо (20.74) целесообразно вводить нелинейный закон регулирования, при котором параметры блока W_{Ψ} будут зависеть от величины сигнала.

Стабилизация фазовой характеристики. За счет влияния нелинейности $F(\sigma)$ внутреннего контура наблюдается зависимость частотных характеристик не только от частоты ω (как в линейных системах), но и от амплитуды сигнала на входе σ . В результате амплитудная и фазовая

частотные характеристики будут «плыть» с изменением амплитуды σ , как показано на рис. 20.24 для некоторых двух значений σ_1 и σ_2 . Условие стабилизации фазовой характеристики можно записать в виде

$$\frac{\partial \varphi(\omega, \sigma)}{\partial \sigma} = 0. \quad (20.77)$$

Передаточной функции (20.73) соответствует выражение для фазовой характеристики

$$\varphi(\omega, \sigma) = -\pi + \arg W_{\psi}(j\omega, \sigma) - \operatorname{arctg} \tau(\sigma)\omega. \quad (20.78)$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} [\operatorname{arctg} \tau(\sigma)\omega] = -\frac{h}{1+h^2\sigma^2},$$

где

$$h = \frac{\omega}{k_y k_{oc} c}.$$

Поэтому условие стабилизации фазовой характеристики (20.77) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} [\arg W_{\psi}(j\omega, \sigma)] = \frac{h}{1+h^2\sigma^2}$$

или

$$\arg W_{\psi}(j\omega, \sigma) = \operatorname{arctg} \frac{\sigma\omega}{k_y k_{oc} c}. \quad (20.79)$$

Отсюда, взяв нелинейную передаточную функцию в виде

$$W_{\psi}(p, \sigma) = k_1(\sigma) + k_2(\sigma)p + k_3(\sigma)p^2. \quad (20.80)$$

получим условия

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_2(\sigma)}{k_1(\sigma)} &= T_a + \tau(\sigma), \\ \frac{k_3(\sigma)}{k_1(\sigma)} &= T_a \tau(\sigma). \end{aligned} \right\} \quad (20.81)$$

В частности, если принять $k_1 = \text{const}$, то

$$\left. \begin{aligned} k_2(\sigma) &= k_1 [T_a + \tau(\sigma)] = k_2 + k_1 \tau(\sigma), \\ k_3(\sigma) &= k_1 T_a \tau(\sigma) = k_2 \tau(\sigma). \end{aligned} \right\} \quad (20.82)$$

На рис. 20.25 представлена схема соответствующего нелинейного блока с передаточной функцией

$$W(p, \sigma) = \frac{k_{\psi} r_1}{r_1 + r_2} \frac{(T_a p + 1) [T_1(\sigma) p + 1]}{T_2(\sigma) p + 1}, \quad T_a = \frac{k'_{\psi}}{k_{\psi}}.$$

Видно, что при значении $T_2(\sigma) < T_1(\sigma)$ можно с достаточным приближением реализовать стабилизацию фазовой характеристики.

На рис. 20.26 изображена л. а. х. разомкнутого промежуточного контура, построенная по передаточной функции

$$W(p, \sigma) =$$

$$= \frac{k'_{\psi} k_{\text{пр}} (k_{\psi} + k'_{\psi} p)}{p^2 [\tau(\sigma) p + 1] [T_2(\sigma) p + 1]} \frac{r_1}{r_1 + r_2} [T_1(\sigma) p + 1]$$

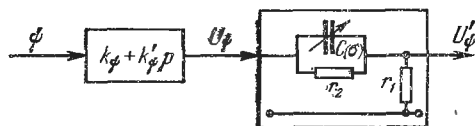


Рис. 20.25.

(пунктиром показана характеристика без учета нелинейного корректирующего контура), а на рис. 20.27 изображены стабилизированные за счет нелинейной коррекции амплитудная и фазовая характеристики данной нелинейной системы для промежуточного контура 2 (рис. 20.23).

Можно рекомендовать иной способ стабилизации фазовой характеристики, используя управляющую функцию вида

$$\sigma_{\psi} = k_1 \psi + k_2 p \psi + k'_2 |\sigma| p \psi. \quad (20.83)$$

В этом случае отрицательное влияние постоянной времени τ (σ) скомпенсируется введением дополнительного демпфирования с помощью слагаемого $k'_2 |\sigma| p\psi$.

Аналогичными приемами можно стабилизировать запас по фазе, показатель колебательности и т. п., т. е. исключить плавание этих характеристик из-за нелинейности при изменении величины сигнала.

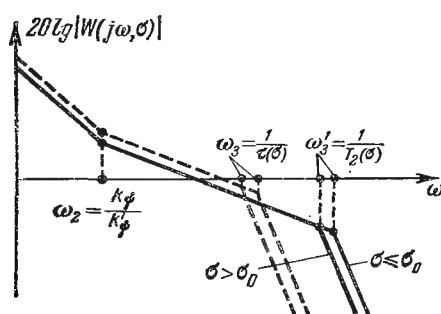


Рис. 20.26.

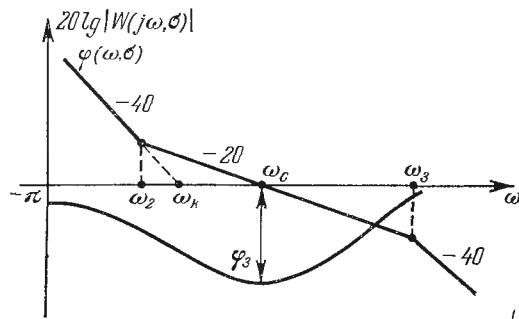


Рис. 20.27.

Обеспечение повышенной точности внешнего контура. Поставим задачу выбора структуры и параметров блока W_z (рис. 20.23), обеспечивающего устойчивость внешнего контура и повышенную точность стабилизации величины z с учетом ранее выбранной структуры и параметров первого и второго контуров.

Передаточная функция промежуточного контура по отношению к управляющему воздействию будет

$$\frac{\psi}{\sigma_z} = \frac{1}{\bar{W}_\psi(p, \sigma)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\bar{W}(p, \sigma)}}.$$

Если рассматривать наиболее характерные частоты, влияющие на работу внешнего контура, т. е. $\omega < \omega_c$, то получим

$$\frac{1}{\bar{W}(p, \sigma)} < 1.$$

Тогда

$$\frac{\psi}{\sigma_z} \approx \frac{1}{\bar{W}_\psi(p, \sigma)}. \quad (20.84)$$

В случае линейной системы блок W_ψ имеет структуру (20.74), а блок W_z внешнего контура должен иметь следующую структуру:

$$W_z(p) = m_1 (1 + T_z p), \quad (20.85)$$

причем по рекомендации линейной теории

$$T_z = n' T_a, \quad m_1 = \frac{k_1}{k'_2 T_z \sqrt{T_z T_a}}, \quad (20.86)$$

где n' — некоторое число, выбор которого зависит от требований к колебательности и запасу по фазе внешнего контура.

Зависимость установившейся ошибки $z_{уст}$ от возмущений f_z и f_y определяется формулой

$$z_{уст} = \frac{k_1}{m_1} f_z + \frac{1}{m_1} f_y. \quad (20.87)$$

Для уменьшения установившейся ошибки $z_{уст}$ при ранее выбранном k_1 необходимо увеличивать m_1 . Однако предельное значение m_1 ограничено требованием обеспечения устойчивости системы.

Для уменьшения установившейся ошибки можно рекомендовать нелинейный закон регулирования, например, в виде

$$\sigma_z = m_1 |z|^r \operatorname{sign} z + m_2 p z. \quad (20.88)$$

Тогда

$$W_z(p, z) = \frac{\sigma_z}{z} = m(z) [1 + T(z)p], \quad (20.89)$$

где

$$m(z) = m_1 |z|^{r-1}, \quad T(z) = \frac{m_2}{m(z)}.$$

Передаточная функция разомкнутого внешнего контура

$$W_B(p, z, \psi) = \frac{k_2 m(z) [1 + T(z)p]}{W_\psi(p, \psi) p^2}. \quad (20.90)$$

На рис. 20.28 представлены логарифмические амплитудные частотные характеристики, соответствующие этой передаточной функции. Характерно, что частота среза ω_c в данном случае не зависит от величины сигнала z . Характеристика 1 соответствует малым сигналам, а 3 — большим сигналам.

Величина установившейся ошибки в данной системе будет

$$z_{уст} = \frac{1}{m(z)} [k_1 f_z + f_y]. \quad (20.91)$$

Расчеты и моделирование показывают, что таким путем можно в несколько раз повысить установившуюся точность по сравнению с линейным законом регулирования при сохранении устойчивости и требуемых запасов по фазе и по амплитуде.

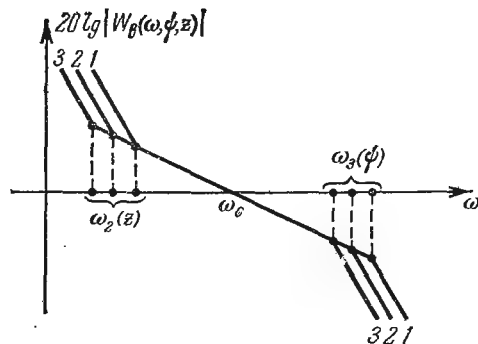


Рис. 20.28.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

§ 21.1. Симметричные одночастотные вынужденные колебания

Проблема определения вынужденных колебаний нелинейных систем вообще является весьма сложной и многообразной. Поскольку принцип наложения решений (суперпозиция) здесь несправедлив, то, вообще говоря, нельзя складывать частные решения при различных внешних воздействиях, найденных по отдельности, а также складывать свободные и вынужденные колебания. Особое нелинейное сложение решений возможно в случае, если решения разделяются по степени медленности протекания их во времени (т. е. по значению возможных частот колебаний), аналогично тому, как это делалось в главе 19. При этом каждое из складываемых решений существенно зависело от другого, а именно амплитуда автоколебаний существенно зависела от величины смещения, характеризующей медленно протекающие процессы. Такого же рода разделение решений для вынужденных колебаний будет рассмотрено ниже, где появится возможность рассмотрения нелинейных двухчастотных колебаний с большой разностью частот.

Не касаясь сложных форм вынужденных колебаний нелинейных систем (хотя их исследование также имеет большое практическое значение), ограничимся в данном параграфе определением одночастотных вынужденных колебаний, когда колебания системы происходят с частотой внешнего периодического воздействия. Форма колебаний, как и прежде, на основании свойства фильтра будет считаться близкой к синусоидальной для переменной x , стоящей под знаком нелинейной функции. При рассмотрении вынужденных колебаний во многих случаях возникают ограничения, накладываемые на амплитуду и частоту внешнего периодического воздействия (зависящие также и от параметров системы) и обуславливающие существование одночастотных вынужденных колебаний в нелинейной системе. Будем их кратко называть *условиями захватывания* (в указанном широком смысле). Особое значение эти условия приобретают для автоколебательных систем при частотах, близких к частоте автоколебаний и выше.

Итак, пусть имеется некоторая нелинейная автоматическая система, в любом месте которой приложено внешнее синусоидальное воздействие

$$f(t) = B \sin \omega_b t. \quad (21.1)$$

Пусть уравнение динамики системы приведено к виду

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t). \quad (21.2)$$

Выполнение условий фильтра (§ 18.2), а также выводимых ниже условий захватывания (где это необходимо) позволяет в первом приближении искать решение для установившихся вынужденных колебаний системы в синусоидальной форме

$$x = a_b \sin(\omega_b t + \varphi), \quad (21.3)$$

где искомыми неизвестными постоянными будут амплитуда a_B и сдвиг фазы φ , в то время как частота ω_B здесь уже задана выражением (21.1). В отличие от такой типичной постановки задачи можно будет, конечно, в дальнейшем решать и обратную задачу определения потребной частоты ω_B или амплитуды B внешнего воздействия по заданной амплитуде вынужденных колебаний a_B и т. п.

Чтобы иметь возможность применить тот же общий подход к решению задачи, который был принят при отыскании автоколебаний, выразим в уравнении (21.2) переменную f через x . Согласно (21.1)

$$f(t) = B \sin [(\omega_B t + \varphi) - \varphi] = B \cos \varphi \sin (\omega_B t + \varphi) - B \sin \varphi \cos (\omega_B t + \varphi).$$

Отсюда, принимая во внимание выражение (21.3) для x и выражение для его производной

$$px = a_B \omega_B \cos (\omega_B t + \varphi),$$

окончательно получаем

$$f(t) = \frac{B}{a_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\omega_B} p \right) x. \quad (21.4)$$

Подставив это выражение в заданное дифференциальное уравнение системы (21.2), получим

$$\left[Q(p) - S(p) \frac{B}{a_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\omega_B} p \right) \right] x + R(p) F(x, px) = 0. \quad (21.5)$$

Таким образом, неоднородное нелинейное уравнение (21.2) при заданном внешнем воздействии (21.1) и предполагаемой форме решения (21.3) сведено к однородному нелинейному уравнению (21.5), содержащему добавочный член в левой части. Уравнение (21.5) аналогично прежнему уравнению (§ 18.2) и отличается от него только заменой операторного многочлена $Q(p)$ на новый операторный многочлен, стоящий в (21.5) в квадратных скобках. Применяя при отыскании синусоидального периодического решения формально тот же метод, что и в главе 18, нужно потребовать выполнения свойства фильтра от этой новой системы.

Заданная нелинейность $F(x, px)$ должна допускать симметричные колебания, т. е. должно выполняться условие

$$\int_0^{2\pi} F(a_B \sin \psi, a_B \omega_B \cos \psi) d\psi = 0. \quad (21.6)$$

Итак, получив для определения вынужденных колебаний однородное уравнение (21.5), можно, как и в § 18.2, произвести гармоническую линеаризацию нелинейности

$$F(x, px) = qx + \frac{q'}{\omega_B} px, \quad (21.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a_B} \int_0^{2\pi} F(a_B \sin \psi, a_B \omega_B \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi a_B} \int_0^{2\pi} F(a_B \sin \psi, a_B \omega_B \cos \psi) \cos \psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (21.8)$$

причем согласно (21.3)

$$\psi = \omega_B t + \varphi, \quad (21.9)$$

что, однако, не влияет на результат вычисления q и q' . Поэтому при определении симметричных однозначных вынужденных колебаний можно целиком пользоваться готовыми выражениями для q и q' , приведенными в главе 18, с заменой в них a , ω на a_B , ω_B . Таким образом, для каждой нелинейности в общем случае получаются зависимости

$$q(a_B, \omega_B), \quad q'(a_B, \omega_B), \quad (21.10)$$

а во многих частных случаях (см. главу 18) —

$$q(a_B), \quad q'_1(a_B). \quad (21.11)$$

В результате из (21.5) и (21.7) получаем характеристическое уравнение для первого приближения

$$Q(p) - S(p) \frac{B}{a_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\omega_B} p \right) + R(p) \left(q + \frac{q'}{\omega_B} p \right) = 0. \quad (21.12)$$

Подставляя сюда чисто мнимое значение $p = j\omega_B$, что соответствует отысканию синусоидального решения (21.3), получаем

$$Q(j\omega_B) - S(j\omega_B) \frac{B}{a_B} (\cos \varphi - j \sin \varphi) + R(j\omega_B) (q + jq') = 0. \quad (21.13)$$

Замечая, что

$$\cos \varphi - j \sin \varphi = e^{-j\varphi},$$

из уравнения (21.13) находим, что

$$a_B \frac{Q(j\omega_B) + R(j\omega_B) (q + jq')}{S(j\omega_B)} = B e^{-j\varphi}. \quad (21.14)$$

Возможны два метода дальнейшего решения задачи. Эти методы остаются справедливыми и для нелинейных систем с временным запаздыванием τ , когда выражение (21.14) принимает вид

$$a_B \frac{Q(j\omega_B) + R(j\omega_B) (q + jq') e^{-j\tau\omega_B}}{S(j\omega_B)} = B e^{-j\varphi} \quad (21.15)$$

или другой аналогичный вид, содержащий τ .

Графический метод. Для каждого значения частоты при заданных параметрах системы на комплексной плоскости строится кривая (рис. 21.1)

$$Z(a_B) = a_B \frac{Q(j\omega_B) + R(j\omega_B) (q + jq')}{S(j\omega_B)}. \quad (21.16)$$

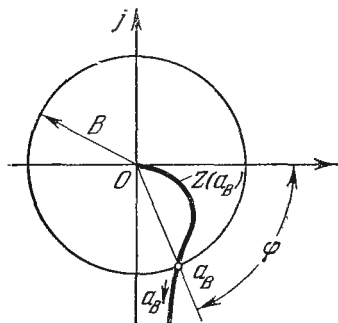


Рис. 21.1.

Эта кривая соответствует левой части равенства (21.14)¹⁾. Правая же часть (21.14) изобразится в виде окружности радиуса B . Пересечение ее с кривой $Z(a_B)$ дает решение задачи, причем в точке пересечения по дуге окружности определяется фазовый сдвиг φ , а по кривой $Z(a_B)$ — величина амплитуды a_B вынужденных колебаний.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний a_B от частоты ω_B (рис. 21.2, б) можно получить, если на рис. 21.1 начертить серию кривых $Z(a_B)$ при разных постоянных значениях ω_B (рис. 21.2, а). Таким же путем,

¹⁾ Аналогично решается задача и в случае выражения (21.15).

строая кривые $Z(a_B)$ при разных постоянных значениях какого-нибудь параметра k (рис. 21.2, а), можно определить зависимость a_B от любого параметра системы k (рис. 21.2, в), входящего в выражение (21.16) для $Z(a_B)$.

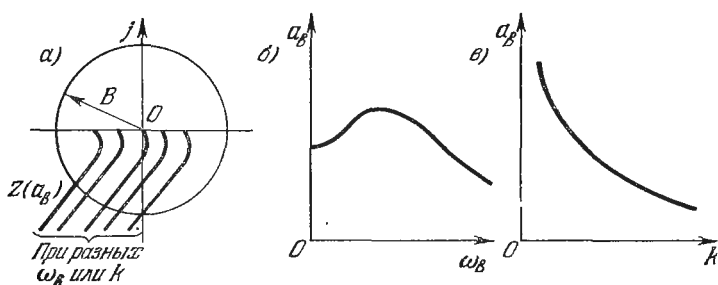


Рис. 21.2.

Для отыскания зависимости a_B от амплитуды внешнего воздействия B нужно нанести серию concentric окружностей разных радиусов B (рис. 21.3, а). При этом возможны два случая: 1) когда имеется точка пересечения окружности с кривой $Z(a_B)$ при любой величине радиуса B , начиная

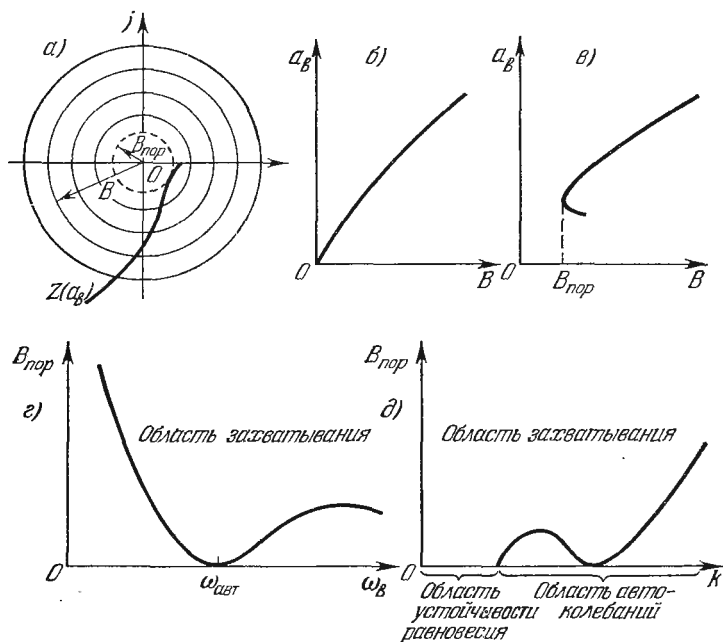


Рис. 21.3.

от нуля, что дает зависимость $a_B(B)$, например, в виде рис. 21.3, б; 2) когда точка пересечения окружности с кривой $Z(a_B)$ существует только при значениях радиуса B , превышающих некоторое пороговое значение $B_{пор}$ (рис. 21.3, а), что приводит к зависимости $a_B(B)$ типа рис. 21.3, в.

Графическое определение $B_{пор}$ ясно из чертежа. Можно построить зависимость пороговой амплитуды $B_{пор}$ внешнего воздействия от частоты ω_B при заданных параметрах системы (рис. 21.3, г) или от любого параметра k при данной частоте ω_B (рис. 21.3, д). Последнюю зависимость можно найти с помощью рис. 21.3, а, построенного для серии кривых $Z(a_B)$, соответствующих различным k .

Рассмотренный второй случай, когда система переходит на одночастотные колебания с частотой ω_b только при $B > B_{\text{пор}}$, наблюдается чаще всего в таких нелинейных системах, которые до приложения внешнего периодического воздействия работают в автоколебательном режиме. При этом величина $B_{\text{пор}}$ обращается в нуль в том случае, когда частота ω_b совпадает с частотой автоколебаний ω_d данной системы (рис. 21.3, г). $B_{\text{пор}}$ равно нулю обычно также в области отсутствия автоколебаний (область устойчивости равновесия системы, рис. 21.3, д).

Тогда выше кривых на рис. 21.3, г, д будут лежать значения амплитуды B внешнего воздействия, при которых существует одночастотный режим вынужденных колебаний с частотой ω_b (область захватывания), а при значениях, лежащих ниже кривой, будет иметь место более сложное вынужденное движение системы. Это и является определением (пока графическим) условий захватывания, о которых говорилось выше.

В других нелинейных системах может быть $B_{\text{пор}} = 0$, как в случае рис. 21.3, б.

Аналитический метод. Из равенства (21.14) или (21.15) можно получить аналитические выражения для определения амплитуды a_b и сдвига фазы φ одночастотных вынужденных колебаний нелинейной системы. Для этого выделим вещественные и мнимые части числителя и знаменателя и запишем равенства для модулей и аргументов обеих частей уравнения (21.14) или (21.15):

$$a_b^2 \frac{X^2(a_b, \omega_b) + Y^2(a_b, \omega_b)}{X_S^2(\omega_b) + Y_S^2(\omega_b)} = B^2, \quad (21.17)$$

$$\varphi = -\arctg \frac{Y(a_b, \omega_b)}{X(a_b, \omega_b)} + \arctg \frac{Y_S(\omega_b)}{X_S(\omega_b)}, \quad (21.18)$$

где X и Y — вещественная и мнимая части числителя выражения (21.14) или (21.15), X_S и Y_S — вещественная и мнимая части знаменателя, т. е. $S(j\omega_b)$. При этом X и Y соответствуют левой части заданного нелинейного уравнения (21.2), т. е. являются теми же самыми выражениями X и Y , которые применялись при исследовании автоколебаний (§ 18.2), а X_S и Y_S являются новыми выражениями, соответствующими правой части заданного нелинейного уравнения (21.2).

Как видим, выражение (21.17) может, вообще говоря, оказаться довольно сложным алгебраическим уравнением относительно a_b . Однако важно то, что это уравнение содержит лишь одну неизвестную a_b , которая, следовательно, так или иначе может быть определена. После этого фазовый сдвиг φ легко вычисляется по формуле (21.18). Напомним, что и при отыскании автоколебаний (глава 18) часто получалось сложное относительно a уравнение, но это не вызывало больших затруднений. Действительно, в большинстве случаев интересуются тем, как будет изменяться амплитуда вынужденных колебаний a_b в зависимости от частоты и амплитуды внешнего воздействия, а также при изменении того или иного параметра системы. Указанные параметры могут входить в уравнение (21.17) более простым образом, чем амплитуда a_b . Тогда уравнение (21.17) можно будет разрешить в явном виде относительно любого из этих параметров, а затем, задавая разными значениями a_b и вычисляя по найденной формуле рассматриваемый параметр, можно построить искомые зависимости $a_b(B)$, $a_b(\omega_b)$ или $a_b(k)$ и т. п.; затем по формуле (21.18) можно также вычислить для каждого случая фазовый сдвиг φ .

Например, возможен следующий простой прием решения уравнения (21.17). Для каждой заданной частоты внешнего воздействия ω_b будем задаваться разными значениями a_b и вычислять каждый раз величину B .

По результатам этих вычислений легко строится график (рис. 21.4), который и представляет собой искомое решение уравнения (21.17).

Что касается условия захватывания, то оно может быть определено аналитически как условие существования вещественного положительного решения для a_B в уравнении (21.17). Это условие автоматически выявится при построении графика типа рис. 21.4.

Итак, получены амплитуда a_B и сдвиг фазы φ вынужденных колебаний для переменной x , стоящей под знаком нелинейной функции. После этого можно подсчитать амплитуду и фазу первой гармоники вынужденных колебаний для любой другой переменной исследуемой системы на основании соответствующих уравнений или передаточных функций звеньев, связывающих эту переменную с переменной x .

Частотный метод. Пусть нелинейное звено в системе определяется уравнением

$$y = F(x). \quad (21.19)$$

Находим для него приближенную амплитудно-фазовую характеристику $W_H(a)$ согласно формулам (18.210) и (18.211). Рассмотрим два случая.

Первый случай. Передаточная функция $\frac{x}{f}$ замкнутой системы такова, что

$$\frac{x}{f} = \frac{1}{1 + W_H(j\omega) W_H(a)} = \frac{M_H(j\omega)}{M_H(j\omega) + W_H(a)}, \quad (21.20)$$

где $M_H(j\omega) = \frac{1}{W_H(j\omega)}$ — обратная амплитудно-фазовая характеристика линейной части. Изобразим характеристики $M_H(j\omega)$ и $-W_H(a)$ на комплексной плоскости (рис. 21.5). Амплитуда a_B вынужденных колебаний величины x определяет точку D , а частота ω_B — точку E . Из формулы (21.20) и из чертежа (рис. 21.5) находим

$$\frac{a_B}{B} = \frac{|M_H(j\omega_B)|}{|M_H(j\omega_B) + W_H(a)|} = \frac{OE}{DE},$$

откуда амплитуда B внешнего периодического воздействия f получает значение

$$B = \frac{DE}{OE} a_B. \quad (21.21)$$

Рис. 21.5.

Перемещая точку D вдоль кривой $-W_H(a)$, можно найти зависимость величины a_B от B при заданной частоте ω_B , а перемещая точку E — зависимость величины a_B от частоты ω_B .

Второй случай. Передаточная функция $\frac{x}{f}$ замкнутой системы такова, что

$$\frac{x}{f} = \frac{W_H(j\omega)}{1 + W_H(j\omega) W_H(a)} = \frac{1}{M_H(j\omega) + W_H(a)}. \quad (21.22)$$

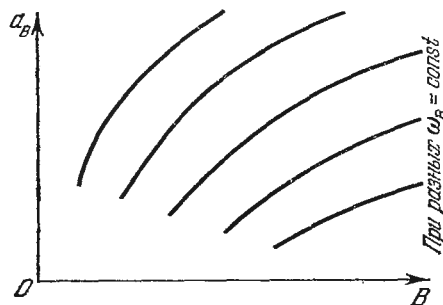
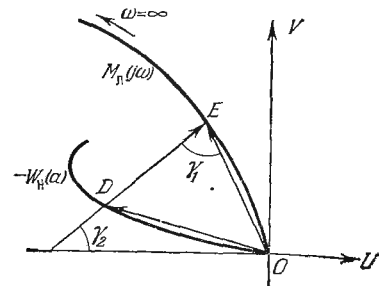


Рис. 21.4.



Тогда на основании этой формулы и чертежа (рис. 21.5) получаем

$$\frac{a_B}{B} = \frac{1}{|M_{II}(j\omega) + W_H(a)|} = \frac{1}{DE},$$

откуда

$$B = DE \cdot a_B. \quad (21.23)$$

В других случаях, когда передаточная функция не подходит под частные виды (21.20) и (21.22), построения усложняются.

§ 21.2. Несимметричные вынужденные колебания с медленно меняющейся составляющей

Вынужденные колебания будут несимметричными в следующих случаях:

- 1) при несимметричных нелинейных характеристиках системы;
- 2) при наличии постоянного или медленно меняющегося внешнего воздействия (в статических системах);
- 3) при наличии постоянной или медленно меняющейся скорости изменения внешнего воздействия (в астатических системах).

В общем случае будем полагать, что к нелинейной системе приложены два внешних воздействия, вследствие чего ее уравнение вместо (21.2) имеет вид

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S_1(p)f_1(t) + S_2(p)f_2(t), \quad (21.24)$$

причем $f_1(t)$ — медленно меняющееся внешнее воздействие, а $f_2(t)$ — периодическое внешнее воздействие:

$$f_2(t) = B \sin \omega_B t. \quad (21.25)$$

Медленно меняющееся воздействие $f_1(t)$ считается мало изменяющимся за период $T_B = \frac{2\pi}{\omega_B}$, т. е. предполагается, что возможные частоты изменения $f_1(t)$ значительно ниже частоты ω_B .

Решение уравнения (21.24) будем искать в виде

$$x = x^0 + x^*, \quad x^* = a_B \sin(\omega_B t + \varphi), \quad (21.26)$$

где x^0 — медленно меняющаяся составляющая, а x^* — колебательная составляющая, амплитуда a_B и фаза φ которой в общем случае тоже медленно изменяются во времени.

Тогда гармоническая линеаризация нелинейности $F(x, px)$ может производиться по формуле, аналогичной (19.5):

$$F(x, px) = F^0 + qx^* + \frac{q'}{\omega_B} px^*, \quad (21.27)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a_B \sin \psi, a_B \omega_B \cos \psi) d\psi, \\ q &= \frac{1}{\pi a_B} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a_B \sin \psi, a_B \omega_B \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi a_B} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a_B \sin \psi, a_B \omega_B \cos \psi) \cos \psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (21.28)$$

причем $\psi = \omega_B t + \varphi$. Из сравнения этих формул с (19.6) видно, что при отыскании вынужденных колебаний можно целиком пользоваться всеми

конкретными выражениями для F^0 , q и q' , приведенными в главе 19. Таким образом, для каждой конкретной нелинейности имеются готовые выражения:

$$F^0(x^0, a_B, \omega_B), \quad q(x^0, a_B, \omega_B), \quad q'(x^0, a_B, \omega_B), \quad (21.29)$$

причем часто величина ω_B в них отсутствует. В качестве примера на рис. 21.6 приведены эти зависимости для нелинейности типа насыщения, аналогичные приведенным в главе 19.

По аналогии с [формулой (21.4) запишем

$$f_2 = \frac{B}{a_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\omega_B} p \right) x^*. \quad (21.30)$$

Подставив выражения для $F(x, px)$, $f_2(t)$ и x в заданное дифференциальное уравнение нелинейной системы (21.24), получим уравнение

$$Q(p)(x^0 + x^*) + R(p) \left(F^0 + \right. \\ \left. + qx^* + \frac{q'}{\omega_B} px^* \right) = S_1(p)f_1(t) + \\ + S_2(p) \frac{B}{a_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\omega_B} p \right) x^*,$$

которое разбивается нелинейным образом (см. главу 19) на два уравнения соответственно для медленно меняющихся и для колебательных составляющих:

$$Q(p)x^0 + R(p)F^0 = S_1(p)f_1(t), \quad (21.31)$$

$$\left[Q(p) - S_2(p) \frac{B}{a_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\omega_B} p \right) \right] x^* + R(p) \left(q + \frac{q'}{\omega_B} p \right) x^* = 0. \quad (21.32)$$

Оба уравнения содержат все три неизвестные a , φ и x^0 .

Второе из этих уравнений совпадает с прежним уравнением (21.5), но только с иными коэффициентами гармонической линеаризации q и q' , зависящими от величины смещения x^0 . Поэтому уравнение (21.32) до конца решается только совместно с уравнением (21.31), хотя, как будет видно из дальнейшего, возможны и более простые случаи. Пока же можно, написав характеристическое уравнение вида (21.12), после подстановки $p = j\omega_B$ привести уравнение (21.32) к следующему:

$$a_B \frac{Q(j\omega_B) + R(j\omega_B)(q + jq')}{S_2(j\omega_B)} = Be^{-j\varphi}, \quad (21.33)$$

в результате решения которого любым из двух методов (графическим или аналитическим), описанных в § 21.1, определяются зависимости амплитуды a_B и сдвига фазы φ от величины смещения x^0 , т. е.

$$a_B(x^0, \omega_B, B), \quad \varphi(x^0, \omega_B, B), \quad (21.34)$$

где x^0 остается пока еще неизвестным.

Для применения графического метода § 21.1 к отысканию зависимости $a_B(x^0)$ по уравнению (21.33) нужно на рис. 21.1 построить серию кривых $Z(a_B)$

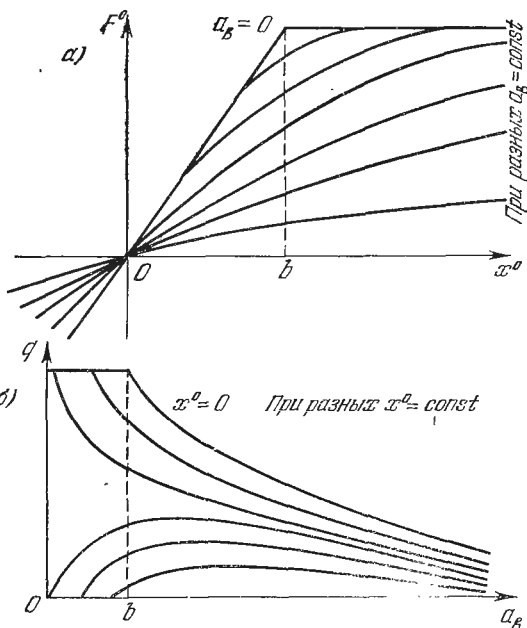


Рис. 21.6.

для разных значений $x^0 = \text{const}$, которые согласно (21.28) входят в выражения для q и q' . Уравнение аналитического метода (21.17) примет вид

$$a_B^2 = \frac{X_2^2(\omega_B) + Y_2^2(\omega_B)}{X^2(\omega_B, a_B, x^0) + Y^2(\omega_B, a_B, x^0)} B^2, \quad (21.35)$$

где X_2 , Y_2 и X , Y обозначают вещественные и мнимые части соответственно для выражения $S_2(j\omega_B)$ и выражения

$$Q(j\omega_B) + R(j\omega_B)[q(a_B, \omega_B, x^0) + jq'(a_B, \omega_B, x^0)].$$

Уравнение (21.35) не решается так просто, как (21.17). Однако можно применить следующий графический прием его решения. Разбив (21.35) на два уравнения:

$$a_B^2 = \zeta,$$

$$\frac{X_2^2(\omega_B) + Y_2^2(\omega_B)}{X^2(\omega_B, a_B, x^0) + Y^2(\omega_B, a_B, x^0)} B^2 = \zeta,$$

построим по первому из них на плоскости (ζ, a_B) кривую 1 (рис. 21.7), а по второму — серию кривых 2 для разных значений $x^0 = \text{const}$ при заданных

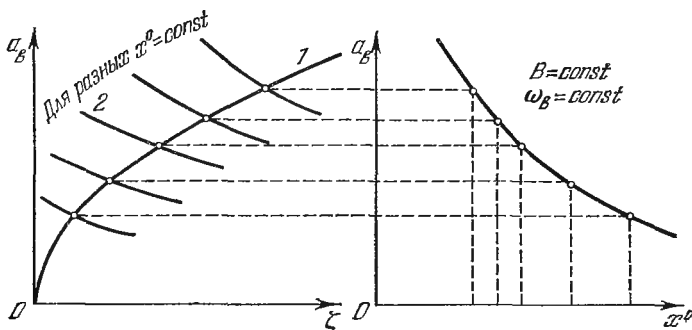


Рис. 21.7.

B и ω_B . Переносим полученные точки пересечения кривых вправо на плоскость x^0, a_B , получаем сразу искомую зависимость $a_B(x^0)$ для заданного внешнего периодического воздействия, т. е. для заданной пары значений B и ω_B . Эту зависимость легко получить таким же путем и для любых других заданных B и ω_B .

Подставив теперь значение амплитуды a_B в первое из выражений (21.29), найдем функцию смещения в виде

$$F^0 = \Phi(x^0, \omega_B, B), \quad (21.36)$$

которая является характеристикой данного нелинейного звена системы по отношению к медленно меняющимся составляющим переменных F и x . Эти медленно меняющиеся составляющие определяются затем путем решения дифференциального уравнения (21.31), в которое надо подставить найденную функцию смещения (21.36).

Независимость очертания функции смещения $\Phi(x^0)$ от характера изменения и места приложения медленно меняющихся внешних воздействий здесь остается в силе, как было и при автоколебаниях (глава 19).

Однако принципиальным отличием функции смещения (21.36), определяющей прохождение медленно меняющихся сигналов через нелинейную систему при наличии вынужденных колебаний, от функции смещения (19.13) при автоколебаниях является существенная зависимость ее от частоты

и амплитуды внешнего периодического воздействия (в то время как при автоколебаниях вид функции смещения зависел только от структуры и от соотношения параметров самой системы).

В результате для каждой заданной частоты вынужденных колебаний ω_b получается серия кривых $F^0 = \Phi(x^0)$ для разных значений амплитуды B внешнего периодического воздействия $f_2(t)$, как показано, например, на рис. 21.8, а. При заданных ω_b и B получается вполне определенное очертание

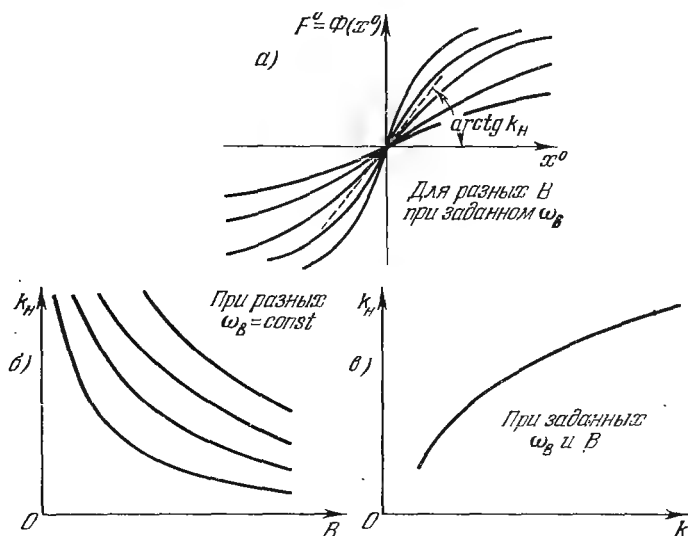


Рис. 21.8.

функции смещения $\Phi(x^0)$, зависящее только от структуры и параметров самой системы, входящих в уравнение (21.33).

Здесь, так же как и в главе 19, возможен и второй метод отыскания функции смещения. При этом методе попутно определяются также статические и установившиеся ошибки. Метод состоит в следующем.

Поскольку функция смещения $F^0 = \Phi(x^0)$ не зависит от характера изменения и места приложения медленно меняющихся воздействий, то ее можно определить для простейшего случая $f_1 = \text{const} = f_1^0$ (или при астатической системе для $pf_1 = \text{const} = g_1^0$). Тогда уравнение (21.31) принимает вид

$$Q(0)x^0 + R(0)F^0 = M^0, \quad (21.37)$$

где $M^0 = S_1(0)f_1^0$ или для астатических систем $M^0 = \left| \frac{S_1(p)}{p} \right|_{p=0} g_1^0$. Используя первое выражение из (21.29), т. е. (при заданной частоте ω_b)

$$F^0(x^0, a_b), \quad (21.38)$$

из уравнения (21.37) находим

$$x^0(a_b, M^0). \quad (21.39)$$

Подставив это в выражения для q и q' , определяемые второй и третьей из формул (21.29), получим зависимости

$$q(a_b, M^0) \text{ и } q'(a_b, M^0).$$

Вводя их в уравнение (21.33), эквивалентное (21.32), и решая его любым из двух способов, указанных выше, при заданных B и ω_b находим амплитуду

вынужденных колебаний $a_B(M^0)$. Подставляя $a_B(M^0)$ в (21.38) и (21.39), получаем зависимости

$$F^0(x^0, M^0) \text{ и } x^0(M^0). \quad (21.40)$$

Эти зависимости представляют самостоятельный интерес, так как ими определяется статическая ошибка (а для астатической системы — установившаяся ошибка при постоянной скорости) нелинейной системы по медленно меняющейся составляющей, на которую накладывается еще установившаяся периодическая ошибка вынужденных колебаний с амплитудой $a_B(M^0)$. Все эти ошибки определяются, как видим, в зависимости от величины постоянной правой части M^0 уравнения (21.37), т. е. от величины внешнего воздействия (постоянного и равного f_1^0 или меняющегося с постоянной скоростью g_1^0). Но, кроме того, что очень важно для нелинейных систем, величина статического отклонения $x^0(M^0)$ может существенно зависеть от амплитуды B и частоты ω_B внешнего периодического воздействия, так как выражения (21.40) выводились с помощью уравнения (21.33), в которое входят B и ω_B . В свою очередь амплитуда вынужденных колебаний a_B зависит через M^0 от величины постоянного внешнего воздействия. Это яркий пример неприменимости принципа суперпозиции для нелинейных систем и в то же время иллюстрация достоинства развиваемого здесь метода, который позволяет это уловить, несмотря на приближенность решения задачи.

Далее, исключая из выражений (21.40) величину M^0 , находим функцию смещения $F^0 = \Phi(x^0)$ для заданных B и ω_B (рис. 21.8, а).

Итак, наличие в нелинейной системе вынужденных колебаний с частотой внешнего периодического воздействия приводит к эффекту вибрационного сглаживания нелинейности, как и при автоколебаниях. При этом согласно (21.31) для медленно протекающих процессов в условиях вынужденных вибраций исходное дифференциальное уравнение системы (21.24) заменяется уравнением

$$Q(p)x^0 + R(p)\Phi(x^0) = F_1(p)f_1(t), \quad (21.41)$$

т. е. заданная нелинейность $F(x, px)$ заменяется функцией смещения $\Phi(x^0)$ и отбрасывается внешнее периодическое воздействие $f_2(t)$, по сравнению с которым $f_1(t)$ является медленно меняющимся.

Функция смещения $\Phi(x^0)$ обычно на определенном участке изменения величины x^0 изображается однозначной плавной кривой (рис. 21.8, а), в то время как заданная нелинейность $F(x, px)$ или $F(x)$ может быть скачкообразной (релейной), петлевой, с зоной нечувствительности и т. п. Этот эффект сглаживания характеристики нелинейного звена позволяет, следовательно, ликвидировать влияние вредных гистерезисных петель, зоны нечувствительности, эффекта сухого трения и пр. по отношению к медленно меняющимся сигналам. В некоторых же случаях вибрационное сглаживание может оказаться отрицательным явлением, как было в случае рис. 19.8, где получался эффект снижения коэффициента усиления. Кроме этих явлений, аналогичных вибрационному сглаживанию при автоколебаниях, здесь появляются и принципиально новые явления вследствие зависимости характеристики $\Phi(x^0)$ от B и ω_B , что будет подробнее рассмотрено ниже.

Плавность функции смещения $\Phi(x^0)$ (рис. 21.8, а) позволяет произвести обычную линеаризацию, а именно на некотором участке вблизи начала координат можно принять

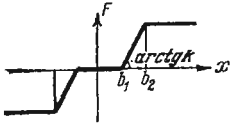
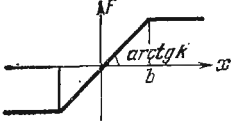
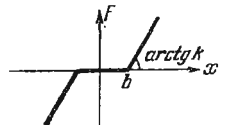
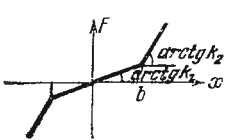
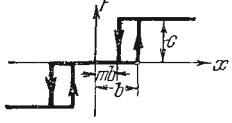
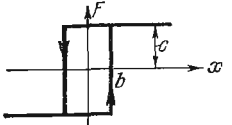
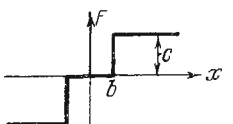
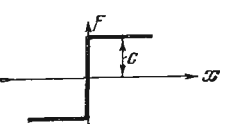
$$F^0 = k_H x^0, \quad (21.42)$$

где

$$k_H = \left(\frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0}. \quad (21.43)$$

Таблица 21.1

Нелинейные коэффициенты усиления

№ п. п.	Форма нелинейности	Выражение $k_H(a_B)$
1		$k_H = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_2}{a_B} - \arcsin \frac{b_1}{a_B} \right)$
2		$k_H = \frac{2k}{\pi} \arcsin \frac{b}{a_B}$
3		$k_H = k - \frac{2k}{\pi} \arcsin \frac{b}{a_B}$
4		$k_H = k_2 - \frac{2(k_2 - k_1)}{\pi} \arcsin \frac{b}{a_B}$
5		$k_H = \frac{c}{\pi a_B} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a_B}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{mb}{a_B}\right)^2}} \right]$
6		$k_H = \frac{2c}{\pi a_B} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a_B^2}}}$
7		$k_H = \frac{2c}{\pi a_B} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a_B^2}}}$
8		$k_H = \frac{2c}{\pi a_B}$

Тогда все медленно протекающие процессы в данной нелинейной системе можно будет рассчитывать не по уравнению (21.41), а по линейному уравнению

$$[Q(p) + k_H R(p)] x^0 = S_1(p) f_1(t). \quad (21.44)$$

При этом очень существенно то, что коэффициент усиления k_H (рис. 21.8, а) будет зависеть не только от структуры и параметров самой системы, как было при автоколебаниях, но также и от амплитуды B и частоты ω_B внешнего периодического воздействия, которые могут меняться в известных пределах независимо от самой системы. Поэтому вибрационное сглаживание нелинейных характеристик при помощи вынужденных колебаний обладает значительно большими практическими возможностями, чем при автоколебаниях, и довольно часто применяется в технике, особенно в релейных системах автоматического управления. Однако в некоторых случаях вибрационное сглаживание может приводить к вредным последствиям, вплоть до потери устойчивости системы.

С точки зрения упрощения решения задачи важно иметь в виду, что для всех нечетно-симметричных нелинейностей $F(x)$, как однозначных, так и петлевых, вычисление коэффициента k_H при линеаризации функции смещения можно производить, как было показано в § 19.2, не по формуле (21.43), а по более простой формуле:

$$k_H = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0}, \quad (21.45)$$

т. е. непосредственно по первому из выражений (21.29), не определяя вовсе самой функции смещения $\Phi(x^0)$. Выражения $k_H(a_B)$, найденные по формуле (21.45), для некоторых нелинейностей приведены в табл. 21.1. Геометрически величина k_H будет крутизной кривой $F^0(x^0)$ в начале координат, например кривой $F^0(x^0)$ на рис. 21.6, а в начале координат. Чтобы взять при этом определенную кривую из изображенной на рис. 21.6, а серии кривых для различных a_B , нужно предварительно по заданным значениям амплитуды B и частоты ω_B внешнего периодического воздействия найти величину амплитуды вынужденных колебаний a_B при $x^0 = 0$. Но эта задача была уже решена в § 21.1, причем результат решения представлен в виде графика рис. 21.4. Следовательно, теперь для подстановки в формулу (21.45) или для рис. 21.6, а нужно взять просто готовые значения a_B из рис. 21.4 для заданных B и ω_B .

При этом легко могут быть построены зависимости величины k_H не только от B и ω_B (рис. 21.8, б), но также и от любого параметра системы k (рис. 21.8, в), влияние которого желательно исследовать и от которого зависит амплитуда вынужденных колебаний a_B (рис. 21.2, в), фигурирующая на рис. 21.6, а.

§ 21.3. Зависимость устойчивости и качества нелинейных систем от внешних вибраций

После определения функции смещения $F^0 = \Phi(x^0)$ открывается возможность исследовать по уравнению (21.41) или по линейному уравнению (21.44) любые медленно меняющиеся процессы в системе.

Устойчивость системы по медленно меняющейся составляющей можно рассматривать тоже путем исследования нелинейного уравнения (21.41) или же линейного уравнения (21.44).

На устойчивость системы существенно может влиять величина амплитуды B и частоты ω_B внешнего периодического воздействия, так как от них зависят вид функции смещения $\Phi(x^0)$ и величина коэффициента k_H . Это

является совершенно новым и очень важным специфически нелинейным фактором, который в предыдущих главах еще не встречался. В линейных системах такое явление вообще отсутствует.

При использовании линейного уравнения (21.44) можно применять обычные критерии устойчивости линейных систем (Гурвица, Михайлова, Найквиста) и обычные логарифмические частотные характеристики.

Может оказаться, что область устойчивости системы по какому-либо параметру k (рис. 21.9, а) сужается, как показано на рис. 21.9, б, при увеличении амплитуды B внешних помех, имеющих вид вибраций заданной частоты ω_v . Вследствие этого для каждого значения k при данной частоте внешних

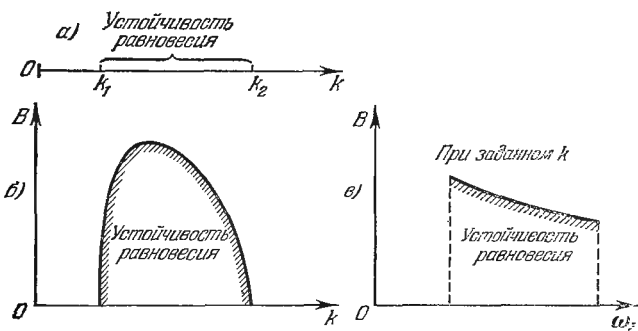


Рис. 21.9.

вибраций может быть свое критическое значение их амплитуды B , при котором система становится неустойчивой. Аналогично, меняя частоту вибраций ω_v , можно определить для заданного значения параметра k зависимость критической амплитуды внешних вибраций от частоты (рис. 21.9, в) — границу вибрационной помехоустойчивости системы.

Важно при этом иметь в виду, что при изменении параметров системы меняется и коэффициент k_n и очертание функции смещения $\Phi(x^0)$. Поэтому, строя области устойчивости системы по какому-нибудь параметру k (рис. 21.9), нужно соответственно все время менять величину k_n в уравнении (21.44) или $\Phi(x^0)$ в (21.41), т. е. при построении области устойчивости нужно учитывать, что любой параметр системы k может входить не только в состав $R(p)$ и $Q(p)$, но также и в состав величины k_n . Зависимость же величины k_n от любого параметра системы нетрудно найти предварительно согласно § 21.2 (см., например, рис. 21.8, в).

Кроме исследования устойчивости нелинейной системы можно по уравнению (21.41) или (21.44) провести полный анализ всех динамических качеств нелинейной системы, подверженной внешним вибрациям (качество переходных процессов, статические и динамические ошибки), при любых медленно меняющихся по сравнению с вибрациями внешних воздействиях $f_1(t)$.

По указанным уравнениям могут определяться и вынужденные колебания системы на низких частотах, если медленно меняющееся воздействие $f_1(t)$ изменяется периодически, т. е. имеется возможность исследования двухчастотных вынужденных колебаний нелинейной системы при большой разнице частот. Можно и здесь (как в § 19.2) проводить разделение общего движения нелинейной системы не только на два, но и на три вида по степени медленности движения во времени.

В результате всех перечисленных расчетов будет выявлена специфическая для нелинейных систем зависимость всех статических и динамических качеств и даже ее устойчивости от величины амплитуды B и частоты ω_v внешнего периодического воздействия (вибраций), что в некоторых случаях

на практике может оказаться решающим для создания качественной автоматической системы.

Изложенная общая теория поведения нелинейных автоматических систем при наличии внешнего периодического воздействия (вибраций) может значительно упрощаться в различных частных задачах.

Приведем здесь видоизменение этой общей теории для следующих двух наиболее типичных частных задач:

1) приложение специального внешнего периодического воздействия с целью вибрационного сглаживания нелинейности (с последующей линейризацией сглаженной характеристики при расчете системы в целом);

2) исследование работы нелинейной автоматической системы при высокочастотных внешних вибрационных помехах, когда не все звенья системы пропускают эти вибрации.

Задача 1. Когда в любой автоматической системе прикладывается внешнее периодическое воздействие $f_2(t)$ (рис. 21.10) специально для того, чтобы произвести вибрационное сглаживание нелинейности, то обязательно ставится условие, чтобы на выходе амплитуда вынужденных колебаний x_3

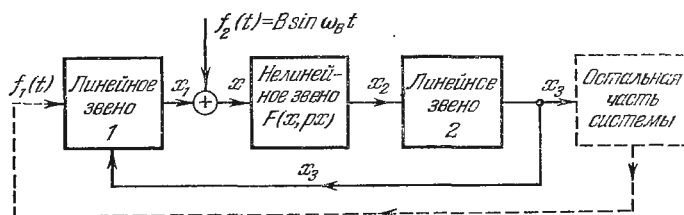


Рис. 21.10.

была практически ничтожной. В результате этого переменные x_3 и x_1 (рис. 21.10) практически не будут содержать колебательной составляющей, а будут определяться через медленно меняющееся воздействие $f_1(t)$ по уравнениям типа (21.44) или (21.44). Поэтому переменная x на входе нелинейного звена будет

$$x = x^0 + x^*, \quad x^* = B \sin \omega_B t. \quad (21.46)$$

Следовательно, в данной задаче (вибрационная линейризация нелинейности при помощи вынужденных колебаний) нет необходимости в решении уравнения (21.32) или (21.33) для определения колебательных составляющих, ибо, согласно (21.26), уже имеется готовое решение

$$a_B = B, \quad \varphi = 0. \quad (21.47)$$

Поскольку внешнее периодическое воздействие $f_2(t)$ предполагается приложенным к системе непосредственно там же, где и x (рис. 21.10), то в уравнении (21.24), составленном для исследуемой части системы (не включая пунктирной части на рис. 21.10), будет

$$S_2(p) = Q(p). \quad (21.48)$$

На основании (21.47) по первой из формул (21.28) находим

$$F^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + B \sin \psi, B \omega_B \cos \psi) d\psi,$$

что и дает искомую сглаженную характеристику. При этом можно воспользоваться для всех типовых нелинейностей готовыми формулами из главы 19 и их графиками типа рис. 21.6, а, заменив везде a и a_b на величину B . Как видим, здесь совершенно отпадает описанное в § 21.2 особое определение функции смещения $\Phi(x^0)$.

В результате сглаженная характеристика $F^0(x^0)$ будет иметь крутизну, зависящую в общем случае от амплитуды B и частоты ω_b внешних вибраций. Если же имеется нелинейность менее общего вида, а именно $F(x)$, то частота ω_b не войдет в выражение для F^0 , как, например, в случае рис. 21.6, а. Однако все же и в этом случае нужно потребовать, чтобы частота содержалась в определенных пределах, позволяющих считать воздействие $f_1(t)$ по сравнению с $f_2(t)$ медленно меняющимся.

Определив таким образом сглаженную характеристику $F^0(x^0)$, можно затем по уравнению типа (21.34) или (21.44) с использованием линеаризации (21.45) исследовать любые медленно протекающие процессы в системе в целом обычными методами теории регулирования. Заметим, что линеаризация по формуле (21.45) в данной задаче справедлива для любых форм нелинейностей, так как здесь частная производная по x^0 совпадает с полной производной.

Что касается уравнения для колебательных составляющих (21.32) или, что то же самое, (21.33), то его нужно использовать в данной задаче только для определения желательной величины частоты ω_b внешнего периодического воздействия $f_2(t)$, обеспечивающей возможность получения решения (21.47) для вынужденных колебаний и выполнение сделанного выше предположения о малости вынужденных вибраций на выходе системы x_3 . С этой целью подставим равенства (21.47) и (21.48) в уравнение (21.33). Тогда для удовлетворения последнего уравнения необходимо потребовать, чтобы модуль отношения

$$\left| \frac{R(j\omega_b)}{Q(j\omega_b)} \right|$$

был очень мал. Следовательно, частота внешнего периодического воздействия ω_b должна лежать за пределами полосы пропускания частотной характеристики всей линейной части рассматриваемого участка системы (блоки 1 и 2).

Кроме того, чтобы амплитуда вынужденных вибраций на выходе системы x_3 была ничтожна, нужно взять частоту ω_b также и за пределами полосы пропускания отдельного блока 2 исследуемой системы (рис. 21.10).

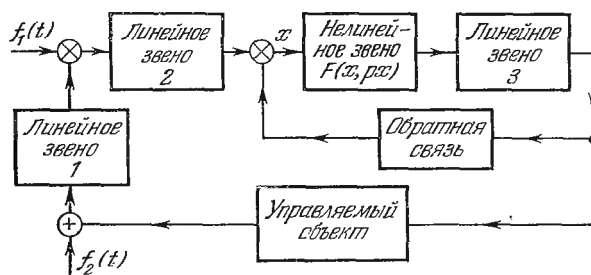


Рис. 21.11.

Задача 2. Пусть на какую-нибудь систему автоматического управления (рис. 21.11) воздействует внешняя вибрационная помеха

$$f_2(t) = B \sin \omega_b t$$

и, кроме того, внешнее задающее или возмущающее воздействие $f_1(t)$, которое по отношению к помехе является медленно меняющимся. Уравнение динамики системы приводится к виду (21.24).

Решение уравнения (21.24) ищется в виде (21.26), где x^0 — полезный сигнал управления, а x^* — вибрационная помеха на входе нелинейного звена. Разбив уравнение (21.24) на два, а именно на (21.34) и (21.33), необходимо, согласно развитому выше общему методу, определить сначала с помощью (21.33) и (21.29) функцию смещения $F^0 = \Phi(x^0)$, после чего можно решать дифференциальное уравнение (21.34) относительно переменной $x^0(t)$ при заданной функции $f_1(t)$. Однако в данной задаче этот общий метод решения можно упростить. Рассмотрим два случая.

В том случае, когда вся приведенная линейная часть системы (рис. 21.11), определяемая передаточной функцией

$$W_n(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, \quad (21.49)$$

практически не пропускает вибраций с заданной частотой ω_b , уравнение (21.33) можно записать в виде

$$a_b = \frac{S_2(j\omega_b)}{Q(j\omega_b)} B e^{-j\varphi}.$$

Тогда амплитуда вибраций на входе нелинейного звена будет определяться формулой

$$a_b^2 = \frac{X_2^2(\omega_b) + Y_2^2(\omega_b)}{X_Q^2(\omega_b) + Y_Q^2(\omega_b)} B^2, \quad (21.50)$$

где через $X_2(\omega_b)$, $Y_2(\omega_b)$ и $X_Q(\omega_b)$, $Y_Q(\omega_b)$ обозначены вещественные и мнимые части соответственно для выражений $S_2(j\omega_b)$ и $Q(j\omega_b)$.

Формула (21.50) дает линейную зависимость $a_b(B)$ с разными коэффициентами пропорциональности для разных частот вибраций ω_b (рис. 21.12).

В частности, для схемы рис. 21.11 они будут определяться структурой линейных блоков 1 и 2.

По сравнению с общей теорией здесь существенно то, что амплитуда вибраций a_b на входе нелинейного звена в этом случае не зависит от величины полезного сигнала x^0 . Поэтому здесь, как и в задаче 1, отпадает необходимость отыскания функции смещения $\Phi(x^0)$ и характеристика нелинейного звена по полезному сигналу $F^0(x^0)$ будет определяться непосредственно первой формулой (21.29), представленной графически, например, на рис. 21.6, а.

Однако здесь нужно подставить в выражение F^0 или взять на графике рис. 21.6, а значение a_b , определяемое по формуле (21.50) или графиком рис. 21.12. Поэтому, в отличие от задачи 1, здесь даже для простейших нелинейностей очертание характеристики нелинейного звена по полезному сигналу $F^0(x^0)$ и ее крутизна

$$k_n = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0}$$

будут зависеть не только от амплитуды B , но и от частоты ω_b вибрационных помех, а также, конечно, и от параметров линейных блоков 1 и 2 (рис. 21.11), входящих в формулу (21.50).

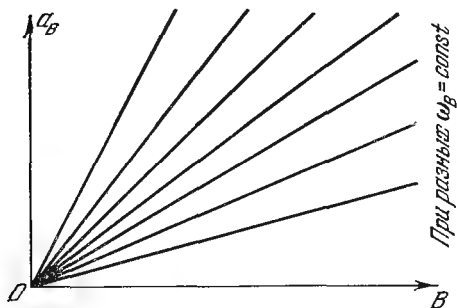


Рис. 21.12.

Рассмотрим далее *другой случай*, когда первая гармоника вибраций с заданной частотой ω_b пропускается линейной частью системы с передаточной функцией (21.49), но все же не пропускается каким-либо одним блоком системы. Пусть, например, в схеме на рис. 21.11 вибрации не пропускаются вовсе только управляемым объектом, а по внутренней обратной связи первая гармоника вибраций с частотой ω_b проходит. Тогда, вообще говоря, уже нельзя не считаться с зависимостью (21.34) амплитуды вибраций a_b переменной x от величины полезного сигнала x^0 . Однако и в этом случае возможно упрощение решения задачи по сравнению с общей теорией, состоящее в том, что при определении функции смещения выбрасывается часть системы, не пропускающая вибраций (рис. 21.13, а).

В этом случае нужно записать уравнение динамики только оставшейся части системы (рис. 21.13, а):

$$Q_c(p)x + R_c(p)F(x, px) = S_{1c}(p)f_1(t) + S_{2c}(p)f_2(t), \quad (21.51)$$

которое будет, конечно, проще общего уравнения (21.24). Отсюда по аналогии с (21.35) получим уравнение для определения амплитуды вибраций на входе нелинейного звена в виде

$$a_b^2 = \frac{X_{2c}^2(\omega_b) + Y_{2c}^2(\omega_b)}{X_c^2(a_b, \omega_b, x^0) + Y_c^2(a_b, \omega_b, x^0)} B^2,$$

где через X_{2c} , Y_{2c} и X_c , Y_c обозначены вещественные и мнимые части соответственно для $S_{2c}(j\omega_b)$ и для выражения

$$Q_c(j\omega_b) + R_c(j\omega_b)[q(a_b, \omega_b, x^0) + jq'(a_b, \omega_b, x^0)].$$

Написанное уравнение позволяет определить зависимость амплитуды вибраций a_b от величины полезного сигнала x^0 на входе нелинейного звена для каждой заданной внешней вибрационной помехи (т. е. для заданных B , ω_b) графическим приемом, описанным в § 21.2 (рис. 21.7).

Полученная зависимость $a_b(x^0)$ подставляется затем в первую из формул (21.29) для получения функции смещения $F^0 = \Phi(x^0)$, которая в данном случае и будет являться характеристикой нелинейного звена по полезному сигналу. Вид ее будет зависеть от заданных амплитуды B и частоты ω_b внешних вибраций и от параметров системы, входящих в выделенную часть контура (рис. 21.13, а).

В обоих рассмотренных случаях, проведя линеаризацию $F^0 = k_H x^0$ характеристики нелинейного звена $F^0(x^0)$ или $F^0 = \Phi(x^0)$ по полезному сигналу, можно обычными методами теории автоматического регулирования, используя линейные уравнения (21.44), выявить зависимость всех статических и динамических качеств данной нелинейной системы автоматического управления (и ее устойчивости) от амплитуды B и частоты ω_b вибрационных помех.

Линейная система выходила бы из строя при наличии помех тогда, когда полезный сигнал практически перестал бы различаться на фоне помех.

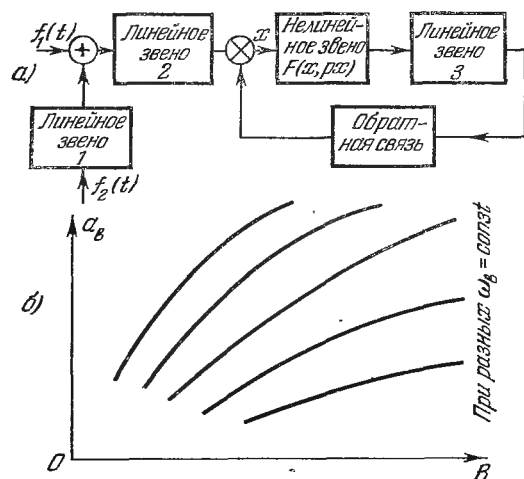


Рис. 21.13.

Но пока он нормально различается, все статические и динамические свойства системы по полезному сигналу, если система линейна, остаются неизменными. Вибрационная помеха при этом накладывается как дополнительная ошибка. Совсем иначе дело обстоит в нелинейной системе. Коэффициент усиления k_n полезного сигнала в нелинейном звене, а вместе с ним и все качества и даже устойчивость системы могут настолько существенно зависеть от помехи (от B и ω_B), что система может выйти из строя по этой причине раньше, чем перестанет различаться полезный сигнал на уровне помех. Это очень важно учитывать на практике.

С точки зрения упрощения решения задачи нужно всегда иметь в виду упрощенную формулу линеаризации (21.45), которая позволяет и во втором из рассмотренных случаев обходиться без определения функции смещения. В этом случае нужно подставить в (21.45) значение амплитуды вибраций на входе нелинейного звена a_B , найденное при отсутствии полезного сигнала ($x^0 = 0$) любым из двух методов, изложенных в § 21.1, но для более простого уравнения системы (21.51). Зависимость $a_B(B)$ будет при этом, в отличие от первого случая, криволинейной (рис. 21.13, б).

В заключение заметим, что тем же методом, что и в § 18.5, легко вычислять высшие гармоники вынужденных колебаний (см. § 9.4 книги [100]).

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

§ 22.1. Статистическая линеаризация нелинейностей

Предварительно заметим, что по уравнениям, выведенным в § 19.2 и в § 21.2, можно исследовать также медленно меняющиеся *случайные* процессы в автоматической системе, сопровождающиеся соответственно автоколебаниями и вынужденными колебаниями. При этом целесообразно функцию смещения $\Phi(x^0)$ подвергнуть обычной линеаризации (19.70) и затем целиком применить линейную теорию случайных процессов к уравнению (19.73) или (21.44). Нелинейная же колебательная часть решения определяется с помощью гармонической линеаризации так же, как и в § 19.2 и в § 21.2. При этом находятся сглаженная характеристика (функция смещения) и зависимости амплитуды и частоты колебательной составляющей от величины медленно меняющейся составляющей. В этом случае предполагается, что внешние воздействия $f(t)$ в (19.73) и $f_1(t)$ в (21.44) являются медленно меняющимися случайными процессами с нормальным законом распределения (см. подробнее § 10.1 в книге [100]).

Для решения других задач при случайных воздействиях удобно бывает применять так называемую статистическую линеаризацию нелинейностей, разработанную И. Е. Казаковым [49]. Сущность ее заключается в следующем.

Для оценки динамической точности автоматических систем при случайных воздействиях будем определять два первых вероятностных момента случайных процессов: математическое ожидание (среднее значение) и дисперсию (или среднеквадратичное отклонение). Последнее эквивалентно определению спектральной плотности или корреляционной функции.

Если нелинейная система описывается дифференциальным уравнением

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t), \quad (22.1)$$

то схематически можно себе представить прохождение сигналов, как показано на рис. 22.1. Проходя через линейную часть, случайный процесс $f(t)$, заданный двумя первыми вероятностными моментами, преобразуется в переменную x , которую тоже можно определить двумя первыми моментами. Однако определение дальнейшего преобразования случайного процесса $x(t)$ в нелинейном звене $F(x, px)$ существенно связано с высшими вероятностными моментами (подобно тому как в главе 18 приходилось иметь дело с высшими гармониками). Ввиду замкнутости контура системы это обстоятельство накладывает отпечаток и на все процессы в данной системе. Поэтому точное решение задачи в большинстве случаев оказывается недоступным.

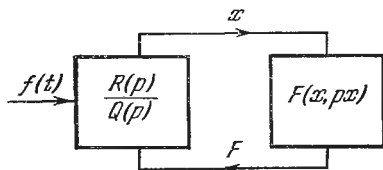


Рис. 22.1.

Достаточно хорошее для целей инженерных расчетов первое приближение применительно к рассматриваемым классам систем, обладающих свойством фильтра (см. § 18.2), дает пренебрежение высшими моментами, т. е. замена нелинейного звена эквивалентным линейным, которое одинаково с данным нелинейным преобразует два первых вероятностных момента: математическое ожидание (среднее значение) и дисперсию (или среднеквадратичное отклонение). Это и называется статистической линеаризацией нелинейности.

Эта операция по общей идее (но не по конкретному содержанию) аналогична тому, как в главе 19 нелинейное звено при помощи гармонической линеаризации заменялось эквивалентным линейным, которое одинаково с данным нелинейным преобразует постоянную (или медленно меняющуюся) составляющую и первую гармонику колебательной составляющей, т. е. принимались во внимание два первых члена ряда Фурье и отбрасывались все высшие гармоники.

Итак, представим переменную x под знаком нелинейности $F(x, px)$ в виде

$$x = \tilde{x} + x^{\text{сл}}, \quad (22.2)$$

где $\tilde{x}$ — математическое ожидание (среднее значение), которое является обычной (регулярной) функцией времени, и $x^{\text{сл}}$ — случайная составляющая с нулевым математическим ожиданием (центрированная случайная функция времени). Это представление аналогично тому, которое употреблялось в главе 19 при гармонической линеаризации, но оно имеет совсем другой, вероятностный смысл. Далее, и переменную $F(x, px)$ также представим в виде

$$F(x, px) = \tilde{F} + q^{\text{сл}} x^{\text{сл}}, \quad (22.3)$$

где $\tilde{F}$ — математическое ожидание (среднее значение) нелинейной функции F , которое является регулярной составляющей, $q^{\text{сл}}$ — эквивалентный коэффициент усиления случайной составляющей (центрированной). Это выражение по форме тоже аналогично тому, которое применялось в главе 19, но имеет иное конкретное содержание.

Величина регулярной составляющей $\tilde{F}$ определяется, следовательно, по известной формуле для математического ожидания. В случае однозначной нелинейной функции $F(x)$ эта формула дает

$$\tilde{F} = M[F(\tilde{x} + x^{\text{сл}})] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tilde{x} + x^{\text{сл}}) w(x) dx, \quad (22.4)$$

где M — обозначение операции взятия математического ожидания, $w(x)$ — дифференциальный закон распределения случайной составляющей, например нормальный закон (рис. 11.10):

$$w = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \tilde{x}}{\sigma_x} \right)^2}. \quad (22.5)$$

Для нелинейности общего вида $F(x, px)$ будет более сложное выражение:

$$\tilde{F} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tilde{x} + x^{\text{сл}}, p\tilde{x} + px^{\text{сл}}) w(x, px) dx dpx, \quad (22.6)$$

которое для петлевых нелинейностей $F(x)$ при симметричном законе распределения (в том числе и нормальном) упрощается. Например, для

нелинейности, показанной на рис. 22.2, будет

$$\begin{aligned} \tilde{F} = & \int_{-\infty}^{-b_1} F(\tilde{x} + x^{\text{сл}}) w(x) dx + \\ & + \int_{-b_1}^{b_2} \frac{1}{2} [F_1(\tilde{x} + x^{\text{сл}}) + F_2(\tilde{x} + x^{\text{сл}})] w(x) dx + \int_{b_2}^{\infty} F(\tilde{x} + x^{\text{сл}}) w(x) dx. \end{aligned} \quad (22.7)$$

Величину эквивалентного коэффициента усиления $q^{\text{сл}}$ случайной составляющей в формуле (22.3) рекомендуется определять одним из следующих двух способов.

Первый способ исходит непосредственно из величин среднеквадратичных отклонений σ_x и σ_F переменной x и нелинейной функции F , а именно:

$$q^{\text{сл}} = \frac{\sigma_F}{\sigma_x} = \sqrt{\frac{M\{[F^{\text{сл}}]^2\}}{M\{(x^{\text{сл}})^2\}}}, \quad (22.8)$$

что в случае однозначной нелинейности $F(x)$ дает

$$\begin{aligned} q^{\text{сл}} = & \frac{1}{\sigma_x} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\tilde{x} + x^{\text{сл}}) w(x) dx - \tilde{F}^2}. \end{aligned} \quad (22.9)$$

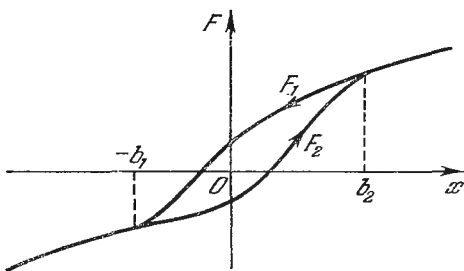


Рис. 22.2.

Для общего случая $F(x, px)$ и в случае петлевой нелинейности $F(x)$ получаются более сложные выражения, которые можно получить для $q^{\text{сл}}$, обобщив (22.9) по тому же образцу, как обобщены выражения (22.6) и (22.7) по сравнению с (22.4).

Второй способ заключается в определении коэффициента $q^{\text{сл}}$ из условия минимума математического ожидания квадрата разности истинной нелинейной функции $F(x, px)$ и ее заменяющей (22.3), т. е. минимума среднеквадратичного отклонения. Записав это условие

$$M\{[F(x, px) - \tilde{F} - q^{\text{сл}} x^{\text{сл}}]^2\} = \min,$$

получим

$$q^{\text{сл}} = \frac{M[F^{\text{сл}} x^{\text{сл}}]}{M[(x^{\text{сл}})^2]} = \frac{r_{Fx}}{\sigma_x^2}, \quad (22.10)$$

где r_{Fx} — значение взаимной корреляционной функции переменных F и x при $\tau = 0$. Отсюда в случае однозначной нелинейности $F(x)$ находим

$$q^{\text{сл}} = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tilde{x} + x^{\text{сл}}) x^{\text{сл}} w(x) dx. \quad (22.11)$$

Аналогично предыдущему легко получить также выражение коэффициента $q^{\text{сл}}$ для общего случая $F(x, px)$ и для петлевой нелинейности $F(x)$.

Второй способ определения коэффициента $q^{\text{сл}}$ приводит к более простым расчетным формулам. С этой точки зрения его использование предпочтительнее. По точности же оба способа примерно равноценны и соответствуют общей степени приближенности всего метода в целом. Замечено, что во

многих случаях, когда первый из этих способов дает завышенные значения корреляционной функции нелинейного процесса $F(t)$ по сравнению с точными, второй дает заниженные значения. Поэтому часто может получиться более хорошее приближение, если в качестве величины $q^{сл}$ взять среднее арифметическое из двух: (22.8) и (22.10).

Важно иметь в виду, что величины $\tilde{F}$ и $q^{сл}$ взаимосвязаны тем, что каждая из них зависит от обеих рассматриваемых характеристик случайного процесса: $\tilde{x}$ и σ_x (входящих в закон распределения w). Сам факт наличия этих зависимостей и их взаимосвязь и позволяют, несмотря на линеаризацию задачи, уловить существенно нелинейные особенности случайных процессов, подобно тому как в прежних главах зависимость величин F^0 , q и q' от всех

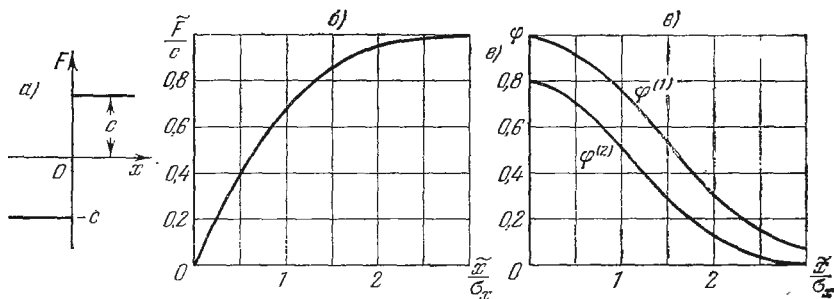


Рис. 22.3.

трех неизвестных x^0 , a и ω (или по крайней мере от первых двух из них) и взаимосвязь этих величин позволяли исследовать существенно нелинейные особенности регулярных процессов во времени методом гармонической линеаризации.

Приведем выражения величин $\tilde{F}$ и $q^{сл}$ и их графики для некоторых типовых нелинейностей, составленные по формулам (22.4), (22.9) и (22.11) при условии нормального закона распределения (22.5) случайной переменной x (при других законах распределения величины $\tilde{F}$ и $q^{сл}$ имели бы другие выражения).

1. Идеальная релейная характеристика (рис. 22.3, а). Из формулы (22.4) находим

$$\tilde{F} = c\Phi(u), \quad u = \frac{\tilde{x}}{\sigma_x \sqrt{2}},$$

где обозначено

$$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-y^2} dy \quad (22.12)$$

(числовые значения этого интеграла вероятностей имеются в справочниках, а также приведены на стр. 305). Зависимость величины $\tilde{F}/c$ от отношения $\tilde{x}/\sigma_x$ показана графически на рис. 22.3, б.

По формулам (22.9) и (22.11) находим соответственно

$$q^{сл} = \frac{c}{\sigma_x} \varphi^{(1)}(\tilde{x}, \sigma_x) \quad \text{и} \quad q^{сл} = \frac{c}{\sigma_x} \varphi^{(2)}(\tilde{x}, \sigma_x), \quad (22.13)$$

где

$$\varphi^{(1)} = \sqrt{1 - \Phi^2(u)}, \quad \varphi^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2}.$$

Зависимости $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ показаны на рис. 22.3, в.

2. Однозначная релейная характеристика с зоной нечувствительности (рис. 22.4, а). По формуле (22.4) с учетом обозначения (22.12) находим

$$\tilde{F} = \frac{c}{2} [\Phi(u_1) - \Phi(u_2)],$$

где

$$u_1 = \frac{1 + \tilde{x}_1}{\sigma_1 \sqrt{2}}, \quad u_2 = \frac{1 - \tilde{x}_1}{\sigma_1 \sqrt{2}}, \quad \tilde{x}_1 = \frac{\tilde{x}}{b}, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b}. \quad (22.14)$$

Функция $\tilde{F}/c$ изображена графически на рис. 22.4, б в зависимости от $\tilde{x}_1$ при разных значениях σ_1 .

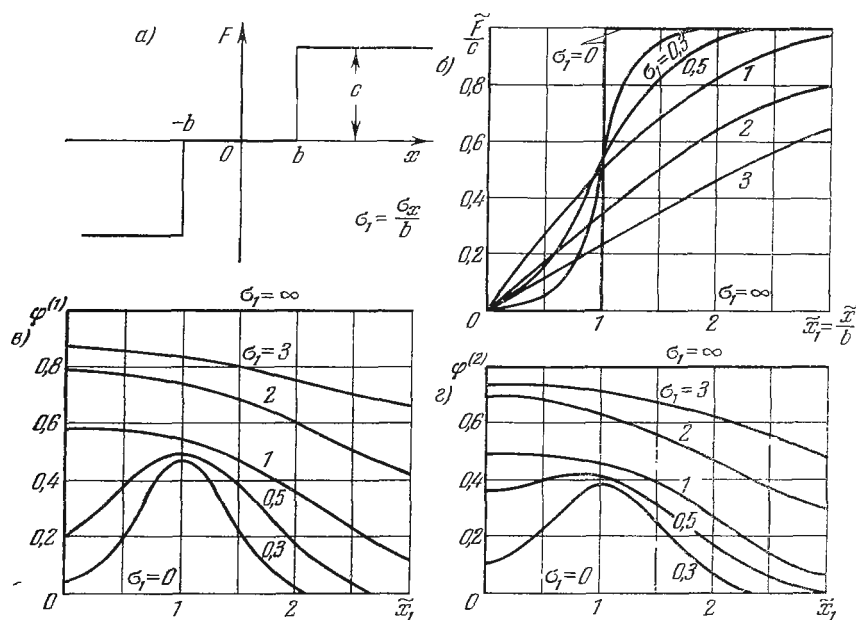


Рис. 22.4.

По формулам (22.9) и (22.14) получаем выражения типа (22.13), где

$$\varphi^{(1)} = \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{F}}{c}\right)^2} - \frac{1}{2} [\Phi(u_1) + \Phi(u_2)], \quad \varphi^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-u_1^2/2} + e^{-u_2^2/2}),$$

что изображено графически на рис. 22.4, в и г.

3. Петлевая релейная характеристика общего вида (рис. 22.5, а). По формулам (22.7) находим

$$\tilde{F} = \frac{c}{4} [\Phi(u_1) - \Phi(u_2) + \Phi(u_3) - \Phi(u_4)],$$

где кроме (22.14) и (22.12) введены еще обозначения

$$u_3 = \frac{m + \tilde{x}_1}{\sigma_1 \sqrt{2}}, \quad u_4 = \frac{m - \tilde{x}_1}{\sigma_1 \sqrt{2}}.$$

Зависимость $\tilde{F}/c$ для случая $m = 0,5$ показана на рис. 22.5, б.

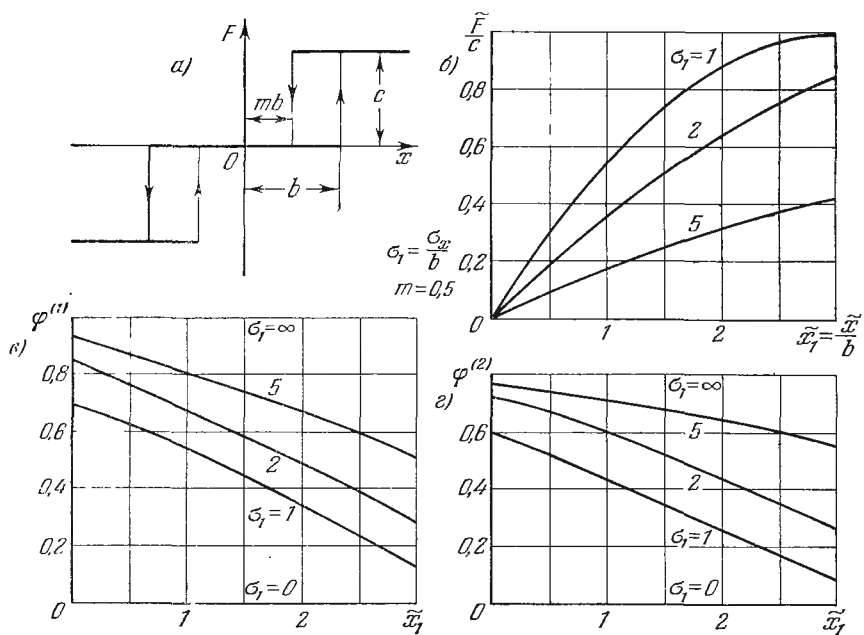


Рис. 22.5.

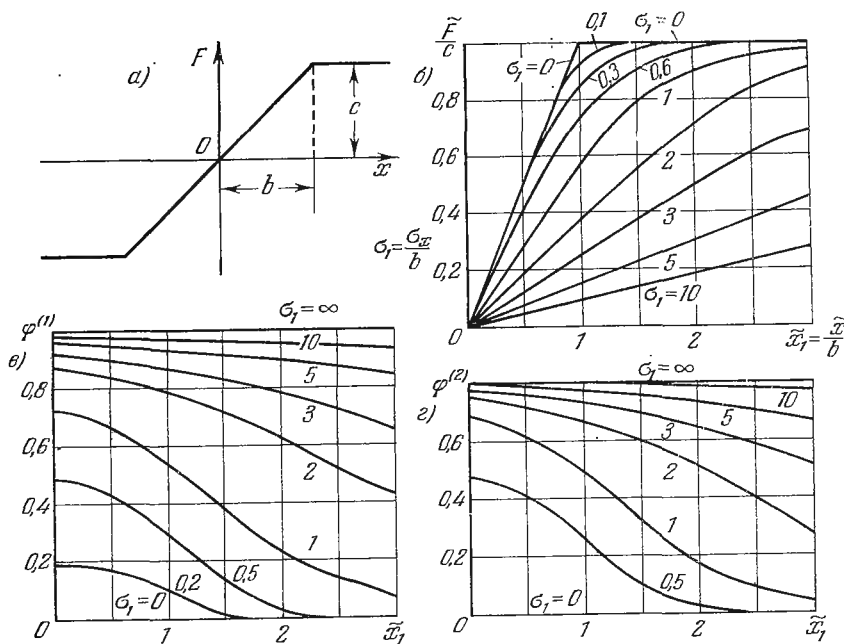


Рис. 22.6.

Далее получаем выражения типа (22.13), где

$$\Phi^{(1)} = \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{F}}{C}\right)^2 - \frac{1}{4} [\Phi(u_1) + \Phi(u_2) + \Phi(u_3) + \Phi(u_4)]},$$

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} (e^{-u_1^2} + e^{-u_2^2} + e^{-u_3^2} + e^{-u_4^2}).$$

Эти функции для случая $m = 0,5$ изображены на рис. 22.5, *в* и *г*.

4. Характеристика типа насыщения (рис. 22.6, *а*). По формуле (22.4) с учетом обозначений (22.12) и (22.14) находим

$$\frac{\tilde{F}}{\varepsilon} = \frac{\tilde{x}_1 + 1}{2} \Phi(u_1) + \frac{\tilde{x}_1 - 1}{2} \Phi(u_2) + \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-u_1^2} - e^{-u_2^2}),$$

что показано в зависимости от $\tilde{x}_1$ при разных σ_1 на рис. 22.6, *б*. По формулам же (22.9) и (22.11) находим выражение (22.13), где

$$\Phi^{(1)} = \left\{ 1 - \left(\frac{\tilde{F}}{c}\right)^2 + \frac{\sigma_1^2}{2} (1 - 2u_1 u_2) \left[\Phi(u_1) + \Phi(u_2) - \frac{\sigma_1^2}{\sqrt{\pi}} (u_2 e^{-u_1^2} + u_1 e^{-u_2^2}) \right] \right\}^{1/2},$$

$$\Phi^{(2)} = \frac{\sigma_1}{2} [\Phi(u_1) + \Phi(u_2)],$$

что изображено на рис. 22.6, *в* и *г*.

§ 22.2. Простейшие случайные процессы в нелинейных системах

В данном параграфе рассматриваются такие задачи, в которых регулярная составляющая процесса x (математическое ожидание) постоянна или медленно меняется во времени по сравнению с составляющими основных частот спектра случайной составляющей x^{cl} . Обратимся к нелинейным системам, динамика которых описывается уравнениями вида

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t), \quad (22.15)$$

где $f(t)$ — внешнее воздействие, представляющее собой случайный процесс, причем

$$f(t) = \tilde{f} + f^{cl}(t). \quad (22.16)$$

Здесь $\tilde{f}$ — заданное математическое ожидание (регулярная составляющая), а f^{cl} — центрированная случайная составляющая.

Пусть параметры системы таковы, что автоколебания отсутствуют и система устойчива относительно равновесного состояния. Применив статистическую линеаризацию (22.3) и подставив полученное выражение в заданное уравнение (22.15), разобьем последнее на два уравнения:

$$Q(p)\tilde{x} + R(p)\tilde{F} = S(p)f, \quad (22.17)$$

$$[Q(p) + R(p)q^{cl}]x^{cl} = S(p)f^{cl}, \quad (22.18)$$

соответственно для регулярных (математических ожиданий) и случайных (центрированных) составляющих. При этом

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x), \quad q^{cl}(\tilde{x}, \sigma_x)$$

определяются для каждой заданной нелинейности, как указано в § 22.1.

Рассмотрим в общем виде две различные задачи.

Первая задача. Если имеет место стационарный процесс, то величины $\tilde{f}$, $\tilde{x}$, σ_x являются постоянными (имеет место некоторый установившийся режим) и уравнение (22.17) принимает алгебраический вид:

$$Q(0)x + R(0)\tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x) = S(0)\tilde{f}. \quad (22.19)$$

Здесь фигурируют две неизвестные: $\tilde{x}$ и σ_x . Поэтому в принципе отсюда можно лишь выразить величину $\tilde{x}$ как функцию σ_x :

$$\tilde{x}(\sigma_x). \quad (22.20)$$

Далее по линейной теории случайных процессов, описанной в главе 11, производится исследование уравнения (22.18). В этом уравнении величина $f^{\text{сл}}$ задана спектральной плотностью $s_f(\omega)$ или корреляционной функцией $r_f(\tau)$. Линейная теория дает

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{S(j\omega)}{Q(j\omega) + q^{\text{сл}}R(j\omega)} \right| s_f(\omega) d\omega, \quad (22.21)$$

где в выражении

$$q^{\text{сл}}(\tilde{x}, \sigma_x) \quad (22.22)$$

необходимо $\tilde{x}$ заменить найденной выше функцией (22.20). Тогда в уравнении (22.21) останется одна неизвестная величина σ_x . Учитывая формулы (11.91) и (11.92), уравнение (22.21) можно записать в виде

$$\sigma_x^2 = hI_n(\tilde{x}, \sigma_f), \quad (22.23)$$

где h — постоянный множитель, выносимый за знак интеграла (формулы для вычисления интеграла I_n приведены в приложении 2).

Таким образом, путем решения уравнения (22.23) с подстановкой (22.20) будет найдено среднеквадратичное отклонение σ_x , а затем по формуле (22.20) будет вычислено и математическое ожидание $\tilde{x}$, т. е. полностью определится искомое приближенное решение ¹⁾ уравнения (22.15):

$$x = \tilde{x} + x^{\text{сл}}. \quad (22.24)$$

Это решение справедливо для случая установившегося режима при стационарном случайном процессе.

Однако зависимость $\tilde{x}(\sigma_x)$ далеко не всегда можно выразить из уравнения (22.19) в явном виде ввиду сложности выражения $\tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x)$. Поэтому в большинстве случаев придется решать совместно два уравнения, (22.19) и (22.23), либо численно, путем последовательных приближений, либо графически.

Можно применять, например, следующий графический прием. Представим уравнение (22.19) в виде двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \tilde{x}, \\ \eta &= \frac{S(0)}{Q(0)}\tilde{f} - \frac{R(0)}{Q(0)}\tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x). \end{aligned} \right\} \quad (22.25)$$

Первое из них дает прямую 1 (рис. 22.7, а), а второе — серию кривых 2 для различных постоянных значений σ_x . Перенеся все точки пересечения этих кривых с прямой 1 на плоскость координат $\tilde{x}$, σ_x (рис. 22.7, б), получим зависимость $\sigma_x(\tilde{x})$ в виде кривой 3, так как каждой точке пересечения на верхнем графике соответствовало определенное значение σ_x . После этого

¹⁾ Во всех задачах здесь и далее будем искать приближенное решение только для переменной x , стоящей под знаком нелинейности. Когда оно найдено, всегда можно через соответствующие передаточные функции найти приближенное решение и для других переменных системы.

построим (рис. 22.7, б) еще одну зависимость $\sigma_x(\tilde{x})$ в виде кривой 4 по формуле (22.23), подставляя в правую часть этой формулы значения σ_x , взятые для каждого $\tilde{x}$ из кривой 3. Очевидно, что координаты точки пересечения 3 кривых 3 и 4 представляют собой искомый результат совместного решения уравнений (22.19) и (22.23).

Вторая задача. Перейдем теперь к решению другой задачи, когда исследуется неустойчивый процесс.

Часто в автоматических системах управления разложению искомого решения (22.24) на $\tilde{x}$ и $x^{сл}$ соответствует разложение его на полезный регулярный сигнал $\tilde{x}$ и случайную помеху $x^{сл}$. Когда полезный сигнал управления $\tilde{x}$ изменяется во времени, процесс уже не будет стационарным. Однако, если помехи (флуктуации) характеризуются спектром значительно более высоких частот, чем полезный сигнал, можно считать последний медленно меняющимся. Тогда можно исследовать случайный процесс в первом приближении как стационарный, применяя формулу (22.23). Но при этом для определения регулярной составляющей $\tilde{x}$ нельзя пользоваться алгебраическим уравнением (22.19), а надо обращаться к дифференциальному уравнению (22.17).

В этом случае описанное выше графическое решение не годится и следует поступать иначе. Сначала надо из уравнения (22.23) определить зависимость $\sigma_x(\tilde{x})$. Для этого по аналогии с графическим решением (21.25) разобьем уравнение [(22.23) на два уравнения:

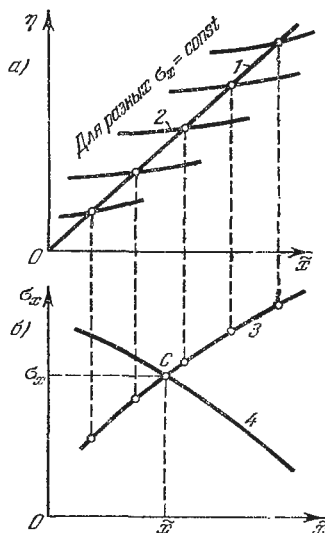


Рис. 22.7.

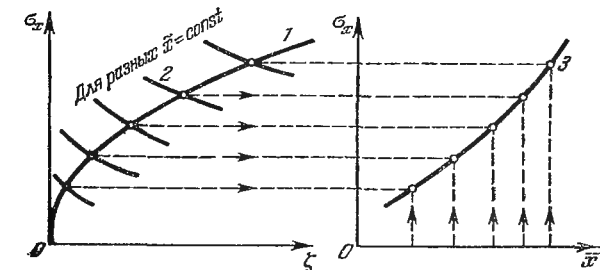


Рис. 22.8.

каждой из них соответствующие кривым 2 абсциссы $\tilde{x}$, получим в виде кривой 3 (рис. 22.8) искомую зависимость $\sigma_x(\tilde{x})$.

Подставив полученную зависимость $\sigma_x(\tilde{x})$ в вычисленное для заданной нелинейности согласно § 22.1 выражение

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x), \quad (22.27)$$

исключим из него величину σ_x и получим функцию от одной переменной

$$\tilde{F} = \Phi(\tilde{x}), \quad (22.28)$$

которую, как и в главе 19 и § 21.2, можно назвать функцией смещения¹⁾,

¹⁾ По аналогии с введенными ранее функциями смещения это будет сглаженная при помощи случайных флуктуаций нелинейная характеристика для медленно меняющейся составляющей процесса.

так как здесь математические ожидания $\tilde{x}$ и $\tilde{F}$ представляют собой смещения центра случайных составляющих.

Когда функция смещения (22.28) найдена, ее можно подставить в уравнение (22.17):

$$Q(p)\tilde{x} + R(p)\Phi(\tilde{x}) = S(p)f(t), \quad (22.29)$$

и отсюда по заданной функции $\tilde{f}(t)$ найти путем решения дифференциального уравнения регулярную составляющую процесса $\tilde{x}(t)$.

В большинстве задач функция смещения (22.28) будет иметь вид плавной кривой (рис. 22.9), которую в некоторых пределах можно подвергнуть обычной линеаризации,

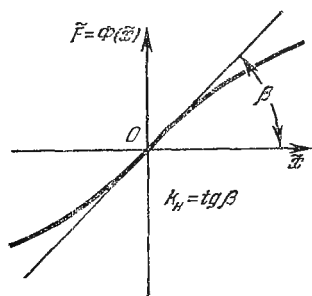


Рис. 22.9.

$$\tilde{F} = k_n \tilde{x}, \quad k_n = \left(\frac{d\Phi}{d\tilde{x}} \right)_{\tilde{x}=0} = \operatorname{tg} \beta. \quad (22.30)$$

В случае, если система такова, что линейная часть с передаточной функцией

$$\frac{R(p)}{Q(p)}$$

не пропускает спектр частот, соответствующий флуктуациям $f^{\text{сл}}(t)$ и определяемый спектральной плотностью $s_f(\omega)$, отыскание величины σ_x значительно упрощается, а именно из (22.24) следует

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{S(j\omega)}{Q(j\omega)} \right|^2 s_f(\omega) d\omega, \quad (22.31)$$

т. е. σ_x не будет зависеть от формы нелинейности и от величины $\tilde{x}$.

В этом случае вместо дифференцирования функции смещения (22.28) можно определить k_n непосредственно ¹⁾ из (22.27):

$$\tilde{F} = k_n \tilde{x}, \quad k_n = \left(\frac{d\tilde{F}}{d\tilde{x}} \right)_{\tilde{x}=0}. \quad (22.32)$$

Здесь k_n получается как функция от σ_x :

$$k_n = k_n(\sigma_x). \quad (22.33)$$

Затем надо подставить величину σ_x , найденную из формулы (22.31).

Вместо этого можно воспользоваться кривой на рис. 22.3, б — 22.6, б, соответствующей найденному значению σ_x . При этом вычисление интеграла (22.31) производится по готовым формулам $\sigma_x^2 = hI_n$ (см. приложение 2).

В результате подстановки (22.30) или (22.32) уравнение для определения регулярной составляющей (22.29) станет линейным:

$$[Q(p) + k_n R(p)]\tilde{x} = S(p)\tilde{f}(t). \quad (22.34)$$

Оно решается при помощи обычного характеристического уравнения

$$Q(p) + k_n R(p) = 0. \quad (22.35)$$

¹⁾ Графически это будет тангенс угла наклона кривых на рис. 22.3, б — 22.6, б для соответствующих нелинейностей.

Важно отметить, однако, следующее. Согласно формулам (22.21) и (22.31) величина σ_x зависит от спектральной плотности помехи $s_f(\omega)$. Поэтому и определяемая через величину σ_x форма функции смещения (22.28) и крутизна ее k_n (рис. 22.9) зависят не только от параметров самой системы, но также и от спектральной плотности помехи $s_f(\omega)$. Но если k_n зависит от $s_f(\omega)$, то согласно (22.34) и (22.35) все статические и динамические качества и даже устойчивость системы по полезному сигналу будут зависеть не только от параметров самой системы, но и от параметров спектральной плотности внешней случайной помехи. Следовательно, устойчивая при отсутствии помех нелинейная система может при определенном уровне помех потерять свои качества, т. е. выйти из строя как система автоматического управления не по причине того, что система перестает фильтровать полезный сигнал, как бывает обычно, а потому, что основной контур регулирования меняет свои динамические качества с изменением k_n или даже становится неустойчивым.

Возможны случаи, когда это специфическое для нелинейных систем явление будет наступать раньше, чем система, рассчитанная как линейная, перестанет фильтровать полезный сигнал. С этой точки зрения учет фактически имеющихся в системе автоматического управления нелинейностей при наличии высокочастотных (по сравнению с полезным сигналом) помех является чрезвычайно важным для практики. Это столь же важно, как и учет влияния вибрационных синусоидальных помех, рассмотренный в § 21.2. Результаты решения обеих задач аналогичны.

Очевидно, что описанное специфическое для нелинейных систем влияние помех в некоторых случаях может и улучшать динамические качества системы.

Привлекательной стороной изложенного метода является то, что исследование качеств переходных процессов, всех частотных характеристик и других качеств системы управления по полезному (регулярному) сигналу производится любыми методами линейной теории автоматического регулирования по уравнению (22.34). Несмотря на эту линеаризацию решения задачи, хорошо выявляются и все важные для практики специфические нелинейные явления благодаря описанному методу определения коэффициента k_n , учитывающему несправедливость принципа суперпозиции для нелинейных систем.

Важно иметь в виду еще следующее. Исследуя методами линейной теории регулирования по уравнению (22.34) изменение статических и динамических качеств системы по полезному сигналу с изменением структуры и параметров этой системы, надо обязательно учитывать при этом и изменение самого коэффициента k_n , вытекающее из выражений (22.33) и (22.31) или (22.21)

§ 22.3. Пример исследования влияния случайных помех на динамику нелинейной системы

На нелинейную систему автоматического управления (рис. 22.10) действует случайная помеха $f(t)$, являющаяся высокочастотной по сравнению

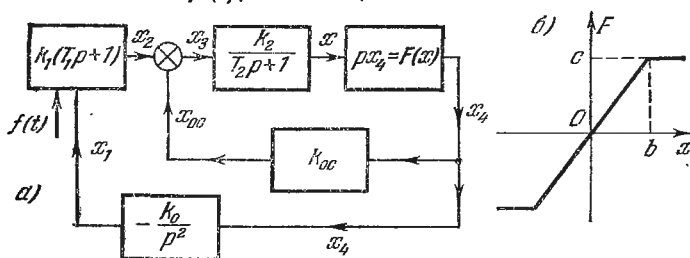


Рис. 22.10.

с медленно меняющимся полезным сигналом управления в данной системе. Проходя через нелинейное звено, помеха изменяет его коэффициент усиления

по отношению к полезному сигналу (вторая задача § 22.2). Требуется оценить влияние этого явления на динамические качества данной системы автоматического управления по полезному сигналу.

Уравнение замкнутой системы (рис. 22.10) в целом будет

$$p^3 \cdot (T_2 p + 1) x + (k_2 k_{oc} p^2 + k k_0 T_1 p + k k_0) F(x) = k p^3 (T_1 p + 1) f(t), \quad (22.36)$$

где $k = k_1 k_2$, $F(x)$ — заданная нелинейность (рис. 22.10, б). При этом заданы: $k = 18$, $k_2 = 60$, $k_{oc} = 0,03$, $k_0 = 0,5$, $T_1 = 0,5$, $T_2 = 0,02$, $\frac{c}{b} = 4$.

Помеха имеет нормальный закон распределения и задана спектральной плотностью (рис. 22.11)

$$s_f(\omega) = \frac{2\beta\sigma_f^2}{(\omega_1^2 - \alpha^2\omega^2)^2 + \mu^2\omega^2}, \quad (22.37)$$

где $\alpha = 0,05$, $\beta = 1,35$, $\omega_1^2 = 7,5$, $\mu = 0,03$. Меняя величину дисперсии помехи σ_f^2 , характеризующую «уровень помехи», будем определять динамические качества системы в зависимости от величины σ_f .

Произведя статистическую линеаризацию (22.3), разобьем уравнение системы (22.36) на два, соответственно для регулярной и случайной составляющих:

$$\left. \begin{aligned} p^3 (T_2 p + 1) \tilde{x} + (k_2 k_{oc} p^2 + k k_0 T_1 p + k k_0) \tilde{F} &= 0, \\ [p^3 (T_2 p + 1) + (k_2 k_{oc} p^2 + k k_0 T_1 p + k k_0) q^{cn}] x^{cn} &= k p^3 (T_1 p + 1) f(t). \end{aligned} \right\} \quad (22.38)$$

Поскольку передаточная функция линейной части системы

$$W_{л}(p) = \frac{k_2 k_{oc} p^2 + k k_0 T_1 p + k k_0}{p^3 (T_2 p + 1)}$$

при заданных выше ее параметрах практически не пропускает¹⁾ частот, при которых спектральная плотность помехи (рис. 22.11) имеет существенное значение, то согласно (22.34) дисперсия помехи на входе нелинейного звена будет

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{S(j\omega)}{Q(j\omega)} \right|^2 s_f(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{k(T_1 j\omega + 1)}{T_2 j\omega + 1} \right|^2 \frac{2\beta\sigma_f^2}{(\omega_1^2 - \alpha^2\omega^2)^2 + \mu^2\omega^2} d\omega.$$

Чтобы привести этот интеграл к стандартному виду (§ 11.6), преобразуем сначала знаменатель спектральной плотности, а именно:

$$(\omega_1^2 - \alpha^2\omega^2)^2 + \mu^2\omega^2 = |\alpha^2(j\omega)^2 + \mu j\omega + \omega_1^2|^2.$$

Тогда согласно обозначениям приложения 2 получим

$$A(j\omega) = a_0(j\omega)^3 + a_1(j\omega)^2 + a_2(j\omega) + a_3,$$

где

$$a_0 = \alpha^2 T_2, \quad a_1 = \alpha^2 + \mu T_2, \quad a_2 = \omega_1^2 T_2 + \mu, \quad a_3 = \omega_1^2.$$

В числителе же получим

$$G(\omega) = |T_1 j\omega + 1|^2 = b_0 \omega^4 + b_1 \omega^2 + b_2,$$

где

$$b_0 = 0, \quad b_1 = T_1^2, \quad b_2 = 1.$$

¹⁾ Это определяется путем простого построения амплитудной частотной характеристики линейной части системы по ее передаточной функции.

В результате находим

$$\sigma_x = k\sigma_f \sqrt{2\beta I_3}, \quad (22.39)$$

где согласно приложению 2

$$I_3 = \frac{\alpha^2 + \mu T_2 + T_1^2 \omega^2}{2\mu\omega_1^2 (\alpha^2 + \mu T_2 + T_2^2 \omega^2)}. \quad (22.40)$$

Перейдем теперь к уравнению (22.38) для регулярной составляющей, т. е. для полезного сигнала $\tilde{x}$. Функция $\tilde{F}$ определяется в нем графиком рис. 22.6, б в зависимости от $\tilde{x}_1 = \frac{\tilde{x}}{b}$ и $\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b}$. В начальной части все кривые

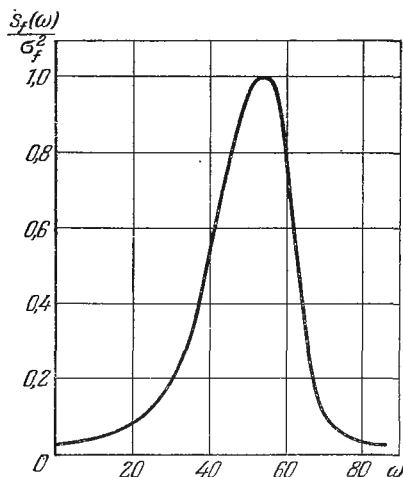


Рис. 22.11.

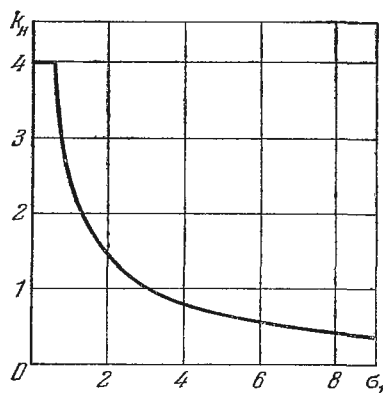


Рис. 22.12.

этого графика близки к прямым. Поэтому можно провести их обычную линеаризацию в виде

$$\tilde{F} = k_n \tilde{x}, \quad (22.41)$$

где k_n — крутизна в начале координат (рис. 22.6, б), которая зависит от величины σ_1 . Для данной задачи получим

σ_1	0	0,1	0,3	0,6	1,0	2,0	3,0	5,0	10	∞
k_n	4,0	4,0	4,0	3,2	2,3	1,4	1,0	0,6	0,4	0

Физически величина k_n является коэффициентом усиления полезного сигнала в нелинейном звене в присутствии помех, причем приведенная таблица дает зависимость этого коэффициента от уровня помехи, т. е. от среднеквадратичного ее значения $\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b}$, на входе нелинейного звена.

Как видим, увеличение уровня помехи ведет к существенному снижению коэффициента усиления полезного сигнала в нелинейном звене, что показано графически на рис. 22.12. Это составляет принципиальную особенность нелинейной системы, которая обуславливает зависимость всех ее статических и динамических качеств по полезному сигналу, в том числе и устойчивости, от уровня помех.

Найдем, например, зависимость устойчивости системы от уровня помех. Для этого согласно (22.38) и (22.41) запишем характеристическое уравнение системы:

$$T_2 p^4 + p^3 + k_2 k_{oc} k_n p^2 + k k_0 k_n T_1 p + k k_0 k_n = 0. \quad (22.42)$$

Условие устойчивости системы по критерию Гурвица принимает вид

$$k_n > \frac{1}{T_1 (k_2 k_{oc} - k k_0 T_1 T_2)}. \quad (22.43)$$

При заданных в начале параграфа параметрах это дает $k_n > 1,17$. Это согласно рис. 22.12 соответствует значению

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b} = 2,65.$$

Но согласно (22.39)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b} = \frac{\sigma_f}{b_f} \sqrt{2\beta I_3}, \quad (22.44)$$

где обозначено

$$b_f = \frac{b}{k}.$$

Эту величину удобно принять для выражения среднеквадратичного значения внешней помехи σ_f в относительных единицах, учитывая, что согласно рис. 22.10 размерности переменных $f(t)$ и x связаны между собой именно через коэффициент $k = k_1 k_2$.

Вычислив величину I_3 по формуле (22.40) при заданных выше параметрах системы, из (22.44) находим

$$\frac{\sigma_f}{b_f} = 0,00437.$$

Это означает, что только при уровне помех, не превышающем указанного значения, данная система остается устойчивой. Далее она теряет устойчивость по полезному сигналу.

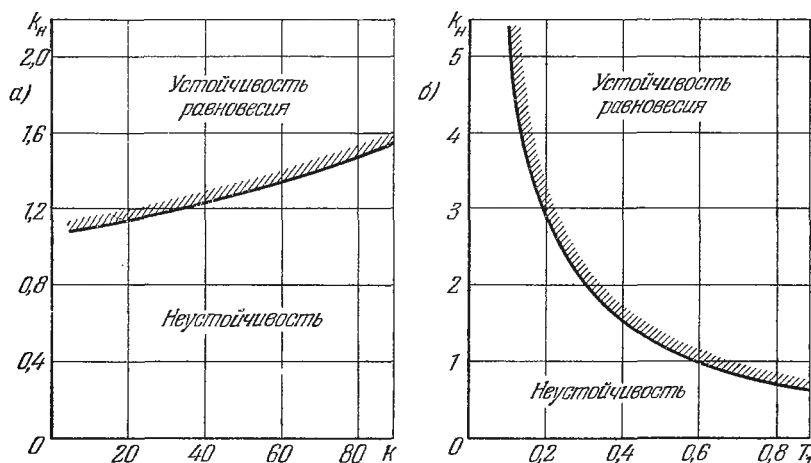


Рис. 22.13.

Выясним теперь влияние параметров k и T_1 на устойчивость системы в присутствии помех. Для этого по формуле (22.43) найдем сначала границы устойчивости системы на плоскостях параметров k , k_n и T_1 , k_n (рис. 22.13, а

и б). На границе устойчивости для каждого значения k_n по графику рис. 22.12 (или по приведенной выше таблице) находим величину σ_1 , а по ней согласно (22.44) и среднеквадратичное значение внешней помехи, при которой теряется устойчивость системы:

$$\frac{\sigma_f}{b_f} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\beta I_3}}. \quad (22.45)$$

Это позволяет перестроить найденные на рис. 22.13 границы устойчивости в новые координаты соответственно

$$k, \frac{\sigma_f}{b_f} \text{ и } T_1, \frac{\sigma_f}{b_f}$$

(рис. 22.14, а и б). При этом надо иметь в виду, что величина I_3 , согласно (22.40), зависит от параметра T_1 , вследствие чего вычисление по формуле

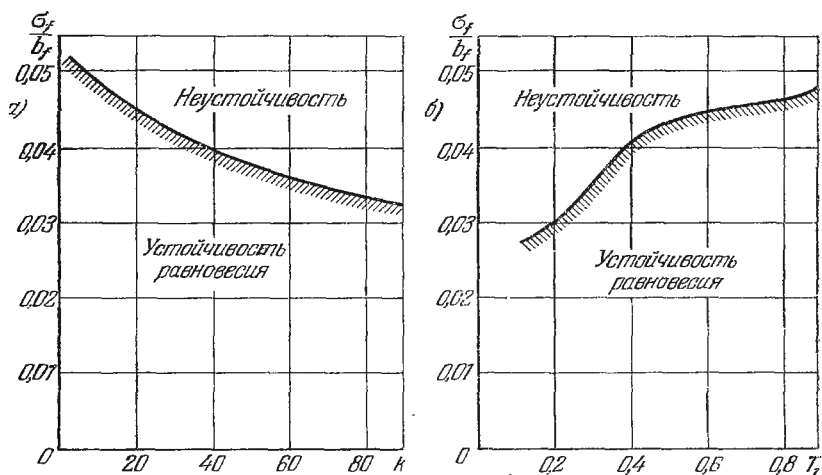


Рис. 22.14.

(22.45) при построении графика рис. 22.14, б необходимо производить с учетом изменения I_3 при изменении T_1 .

Как видим, с увеличением параметра k опасный уровень помех снижается, а при увеличении параметра T_1 он растет. Это вполне естественно, поскольку T_1 является, согласно рис. 22.10, коэффициентом интенсивности введения производной, улучшающим стабилизацию системы.

По линейному уравнению, вытекающему из (22.38) и (22.41),

$$[p_3 (T_2 p + 1) + (k_2 k_{oc} p^2 + k k_0 T_1 p + k k_0) k_n] \tilde{x} = 0,$$

используя линейную теорию автоматического регулирования, можно исследовать также и все другие динамические качества данной нелинейной системы по полезному сигналу в присутствии помех, учитывая, однако, при этом все время, что величина коэффициента k_n зависит от уровня помех σ_f , от общей структуры и от некоторых параметров системы.

НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 23.1. Общие положения

Ранее, в главе 12, была рассмотрена уже задача оптимизации систем автоматического регулирования в линейной постановке. Однако в большинстве случаев практики, когда на управление накладываются ограничения по величине, по скорости или другие, оптимальный закон регулирования становится нелинейным, если даже сам регулируемый объект описывается линейными уравнениями. Тогда система в целом после оптимизации становится нелинейной.

Итак, здесь будет рассматриваться синтез такого закона регулирования, который оптимизирует процесс управления в системе по заданному критерию, причем этот закон регулирования оказывается нелинейным:

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (23.1)$$

Оптимизации может подвергаться также и временная программа управления.

Наиболее простой является задача оптимизации системы регулирования по быстродействию, т. е. по минимуму времени переходного процесса при заданных начальных отклонениях и при отсутствии внешнего воздействия. Усложнение задачи возникает при усложнении критерия оптимизации в виде минимума функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n, u) dt \quad (23.2)$$

или же при усложнении ограничений, задаваемых в виде неравенств

$$0 \leq |g(x_1, x_2, \dots, x_n, u)| \leq 1, \quad (23.3)$$

а также при повышении порядка уравнений системы и при наличии внешних воздействий. Внешние воздействия и начальные условия могут быть заданы в детерминированной форме или же вероятностными характеристиками.

Существуют различные методы оптимизации процессов управления и регулирования. Ниже будет в простейшем виде изложено использование принципа максимума Л. С. Понтрягина [96], а затем последовательная оптимизация на базе нелинейного программирования, разработанная В. М. Пономаревым [105]. Другие важные направления развиты в работах Н. Н. Красовского [63] и др., ранее уже рассматривались работы А. М. Летова [77] и принцип динамического программирования Р. Беллмана [5]; см. также книги [60, 95, 133].

§ 23.2. Синтез оптимальной системы с использованием принципа максимума

Принцип максимума, используемый в теории оптимальных систем, разработан школой Л. С. Понтрягина [96].

Допустим, что уравнения динамики системы автоматического регулирования заданы в следующей общей форме (нелинейной):

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (23.4)$$

(без переменных во времени коэффициентов и без внешнего воздействия), где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — переменные, относящиеся к заданной части системы, включающей в себя регулируемый объект и не изменяемую в процессе синтеза часть регулятора; $u_1, u_2, \dots, u_r$ — переменные, выражающие воздействия проектируемой части регулятора на заданную часть системы и называемые коротко *управлениями*. Неизменяемой частью регулятора может быть, например, его силовая часть (привод регулирующего органа); тогда $u_1, \dots, u_r$ будут воздействиями измерительно-преобразовательной части регулятора на его силовую часть (рис. 23.1).

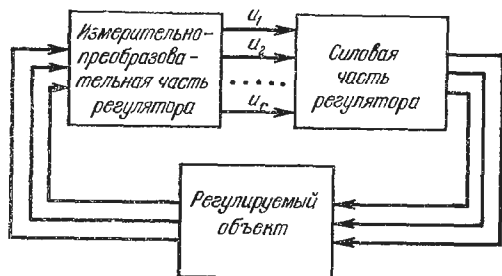


Рис. 23.1.

В заданные уравнения системы (23.4) не входят уравнения проектируемой преобразовательной части регулятора, которые должны быть найдены в процессе синтеза в виде зависимости (закон регулирования)

$$u_j = u_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (j=1, 2, \dots, r). \quad (23.5)$$

Во всякой реальной системе величины управлений u_j будут ограниченными, например,

$$|u_j| \leq 1$$

или любой другой определенной областью допустимых значений.

Критерием оптимальности системы пусть будет минимум некоторого функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r) dt. \quad (23.6)$$

Для удобства решения задачи вводится дополнительная искусственная переменная $x_0(t)$, определяемая уравнением

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r), \quad (23.7)$$

а также еще вспомогательные переменные $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$, определяемые линейными однородными уравнениями

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{k=0}^n \frac{\partial f_k(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r)}{\partial x_i} \psi_k \quad (i=0, 1, \dots, n). \quad (23.8)$$

Если ввести теперь вспомогательную функцию $\bar{H}$ в виде

$$\begin{aligned} \bar{H}(\psi_0, \dots, \psi_n; x_0, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r) = \\ = \sum_{k=0}^n \psi_k f_k(\psi_0, \dots, \psi_n; x_0, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r), \end{aligned} \quad (23.9)$$

то все уравнения (23.4), (23.7) и (23.8) можно объединить в одну систему, типа известной из механики системы уравнений Гамильтона, а именно:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \psi_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (23.10)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (23.11)$$

Принцип максимума гласит, что для оптимальности системы, т. е. для получения минимума функционала I (23.6), необходимо существование таких ненулевых непрерывных функций $\psi_0(t), \dots, \psi_n(t)$, что при любом t , находящемся в заданном интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, величина $\bar{H}$, как функция переменных $u_1, \dots, u_r$, в заданной области их допустимых значений достигает максимума

$$H = \bar{M}(\psi_0, \dots, \psi_n; x_0, \dots, x_n), \quad (23.12)$$

причем ψ_0 и $\bar{M}$ постоянны во времени и

$$\psi_0 \leq 0, \quad \bar{M} = 0. \quad (23.13)$$

Для простейшего случая оптимальности — оптимальности по быстродействию — имеем $f_0 \equiv 1$, а функция $\bar{H}$ принимает вид

$$H = \psi_0 + H,$$

где

$$H = \sum_{k=1}^n \psi_k f_k(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r). \quad (23.14)$$

В этом случае прежние искусственные величины с нулевыми индексами не нужны. Гамильтонова система уравнений принимает вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (23.15)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (23.16)$$

Формулировка принципа максимума: для оптимальности системы по быстродействию необходимо существование таких ненулевых непрерывных функций $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$, что для всех t в заданном интервале $t_0 \leq t \leq t_1$ функция H переменных $u_1, \dots, u_r$ в заданной области их допустимых значений достигает максимума:

$$H = M(\psi_1, \dots, \psi_n; x_1, \dots, x_n), \quad (23.17)$$

причем величина M постоянна во времени и

$$M \geq 0. \quad (23.18)$$

Согласно приведенным формулировкам принцип максимума дает только необходимые условия оптимальности. Вопрос же о существовании ее и о случаях достаточности этих условий очень труден. Поэтому в практических приложениях заранее интуитивно предполагают достаточность по физическому смыслу исследуемой системы.

Применение принципа максимума проиллюстрируем сначала на двух простейших примерах, когда решение задачи доводится до конца в аналитической форме [96].

Пример 1. Система задана уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u. \quad (23.19)$$

Требуется найти уравнение преобразовательной части системы $u = u(x)$, чтобы система была оптимальной по быстродействию при переходе ее из произвольного начального состояния в равновесное состояние $(x = 0, \frac{dx}{dt} = 0)$. При этом на управление u наложено ограничение

$$|u| \leq 1.$$

Обозначив $x_1 = x$, $x_2 = \frac{dx}{dt}$, приведем уравнение (23.19) к исходному виду (23.4):

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u. \quad (23.20)$$

Функция H согласно (23.14) и (23.4) здесь имеет вид

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u. \quad (23.21)$$

Чтобы определить максимум H по переменной u , надо найти ψ_2 . Для этого воспользуемся уравнениями (23.16), которые в данном случае будут

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1,$$

откуда $\psi_1 = c_1$, $\psi_2 = c_2 - c_1 t$.

Принцип максимума (23.17), (23.18) с учетом выражения (23.21) и ограничения $|u| \leq 1$ дает

$$u = \text{sign } \psi_2 = \text{sign } (c_2 - c_1 t),$$

так как положительный максимум функции H по переменной u будет согласно (23.21) при $u = +1$, когда $c_2 - c_1 t > 0$, и при $u = -1$, когда $c_2 - c_1 t < 0$. Поскольку линейная функция $c_2 - c_1 t$ не более одного раза меняет знак, то в оптимальном процессе регулирования будет не более одного переключения с $u = +1$ на $u = -1$ или наоборот.

Следовательно, оптимальная по быстродействию система будет релейной, но не обычной релейной, а с особым специальным законом переключения реле по знаку вспомогательной функции $\psi_2 = c_2 - c_1 t$. Чтобы представить себе это нагляднее, изобразим процесс на фазовой плоскости.

Исключив из уравнений (23.20) dt , получим при $u = +1$ дифференциальное уравнение

$$dx_1 = x_2 dx_2,$$

откуда фазовая траектория будет

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2} + c. \quad (23.22)$$

Аналогично при $u = -1$ получаем

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + c. \quad (23.23)$$

Это — параболы, симметричные относительно оси абсцисс x_1 .

Процесс должен заканчиваться в начале координат ($x_1 \equiv x = 0$, $x_2 \equiv \frac{dx}{dt} = 0$). Поэтому сначала изобразим фазовые траектории (параболы), вливающиеся в начало координат соответственно при $u = +1$ и при $u = -1$, как показано сплошными линиями на рис. 23.2.

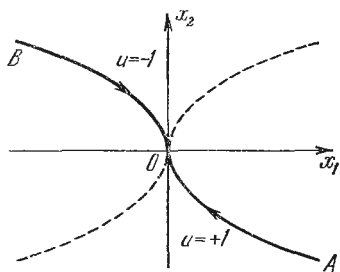


Рис. 23.2.

Нанесем теперь и все остальные параболы с различными значениями u в формулах (23.22) и (23.23) до точек их вливания в изображенные ранее две ветви параболы, идущие к началу координат. Это и сделано на рис. 23.3. Как видим, из произвольной точки $M_0(x_{10}, x_{20})$ процесс идет по некоторой параболе M_0D при управляющем сигнале $u = -1$ (в другой области было бы $u = +1$). В точке D происходит переключение реле на сигнал $u = +1$, после чего процесс идет по параболе DO и заканчивается в точке O за конечное время, которое согласно принципу максимума является минимальным из всех возможных для перехода данной системы из состояния $M_0(x_{10}, x_{20})$ в равновесное состояние $O(0, 0)$.

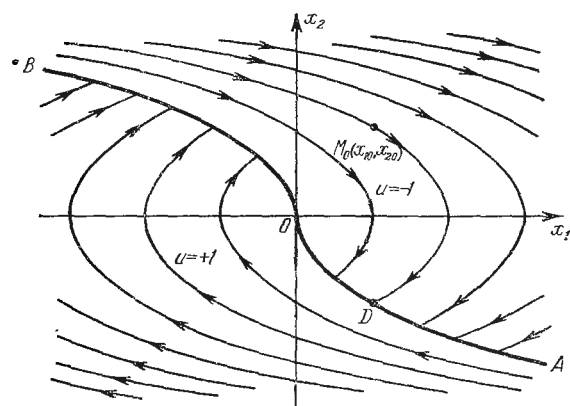


Рис. 23.3.

Точка переключения реле D может находиться в любом месте кривой AOB . Последняя называется поэтому *линией переключения*. На ней лежат заключительные отрезки фазовых траекторий, приходящие в начало координат.

Итак, искомое уравнение преобразовательной части системы (оптимальной по быстродействию) будет

$$u(x) = \begin{cases} +1 & \text{ниже линии } AOB \text{ и на дуге } AO, \\ -1 & \text{выше линии } AOB \text{ и на дуге } OB, \end{cases} \quad (23.24)$$

причем $x = x_1$ отсчитывается на оси абсцисс. Замечая, что $x_2 = \frac{dx}{dt}$, из формул (23.22), (23.23) и рис. 23.2 находим уравнение линии переключения:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_n = -(\text{sign } x) 2\sqrt{x}, \quad (23.25)$$

и следовательно, уравнение преобразовательной части системы будет

$$u(x) = \begin{cases} +1 & \text{при } \frac{dx}{dt} < \left(\frac{dx}{dt}\right)_n \text{ и при } \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_n < 0, \\ -1 & \text{при } \frac{dx}{dt} > \left(\frac{dx}{dt}\right)_n \text{ и при } \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_n > 0. \end{cases} \quad (23.26)$$

Итак, в системе должны быть либо два измерителя (для x и для $\frac{dx}{dt}$), либо один измеритель x и дифференцирующее устройство. Должно формироваться (автоматически вычисляться) переключающее значение $\left(\frac{dx}{dt}\right)_n$ согласно формуле (23.25), и на основе сравнения фактического текущего значения со значением $\left(\frac{dx}{dt}\right)_n$, зависящим от текущего x , должно производиться включение и переключение реле в соответствии с уравнением (23.26).

Это является специальным нелинейным законом регулирования для линейного объекта (23.19), приводящим к оптимальной по быстродействию системе. Таков результат решения простейшей задачи оптимизации.

Пример 2. Пусть задана система

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = u. \quad (23.27)$$

Требуется найти такое уравнение преобразовательной части системы $u = u(x)$, чтобы система была оптимальной по быстродействию, т. е. в кратчайшее время приходила бы в равновесное состояние $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$. При этом задана область допустимых значений управления

$$|u| \leq 1.$$

Перепишем заданное уравнение (23.27) в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + u. \quad (23.28)$$

Функция H согласно (23.14) и (23.4) здесь будет

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 (-x_1 + u). \quad (23.29)$$

Для вспомогательных переменных из (23.16) и (23.29) получаем уравнения

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \psi_2, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1,$$

откуда

$$\psi_2 = c_1 \sin(t - c_2).$$

Принцип максимума (23.17) и (23.18), с учетом выражения (23.29) и условия $|u| \leq 1$, дает

$$u = \text{sign } \psi_2 = \text{sign} [\sin(t - c_2)], \quad (23.30)$$

так как согласно (23.29) положительный максимум величины H по переменной u будет при $u = +1$, если $\psi_2 > 0$, и при $u = -1$, если $\psi_2 < 0$.

При $u = +1$ уравнения системы (23.28) будут

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 1.$$

Решения их имеют вид

$$x_1 = 1 - a \cos(t + \beta), \quad x_2 = a \sin(t + \beta),$$

где $a \geq 0$, $0 \leq \beta < 2\pi$. Следовательно, фазовые траектории при $u = +1$ будут окружностями

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = a^2. \quad (23.31)$$

Аналогично при $u = -1$

$$(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = a^2. \quad (23.32)$$

Очевидно, что влияющие в начало координат фазовые траектории будут иметь вид полуокружностей (23.31) и (23.32) с радиусами $a = 1$ (рис. 23.4). Это будут концевые участки траекторий. В них будут входить в произвольных точках B_1 и D_1 предыдущие участки фазовых траекторий снизу (где $u = +1$) в виде полуокружностей с центром, смещенным на единицу вправо ($D_2 B_1$), а сверху (где $u = -1$) — с центром, смещенным на единицу влево ($B_2 D_1$). Это будут именно полуокружности, так как знак u меняется согласно (23.30) через $t = \pi$. Следовательно, линия переключения составит из единичных полуокружностей, как показано на рис. 23.4 в виде ломаной кривой $B_2 B_1 O D_1 D_2 D_3$.

В отличие от примера 1, здесь процесс регулирования может идти не с одним переключением, а с несколькими, в зависимости от начальных условий.

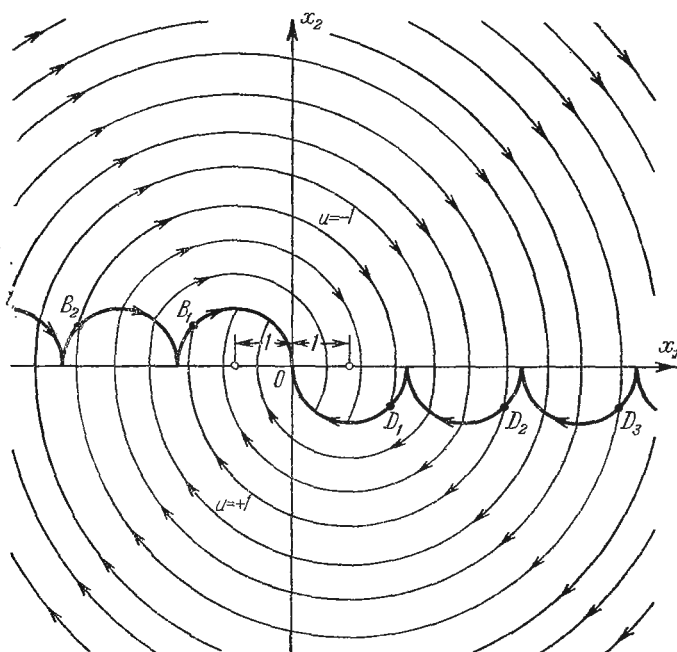


Рис. 23.4.

Итак, искомое уравнение преобразовательной части системы $u = u(x)$ будет

$$u(x) = \begin{cases} +1 & \text{ниже линии } B_2B_1OD_1D_2D_3 \text{ и на полуокружности } D_1O, \\ -1 & \text{выше линии } B_3B_1OD_1D_2D_3 \text{ и на полуокружности } B_1O. \end{cases} \quad (23.33)$$

Поскольку $x_1 = x$, $x_2 = \frac{dx}{dt}$, то указанная линия переключения представляет собой определенную зависимость

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_n = F(x), \quad (23.34)$$

вследствие чего уравнение преобразовательной части системы можно представить в прежнем виде (23.26), но с новым значением $\left(\frac{dx}{dt} \right)_n$. Устройство измерительно-преобразовательной части системы, согласно этому нелинейному закону регулирования, будет здесь аналогично прежнему (пример 1), но с другим алгоритмом вычислений.

Замечания. Сделаем некоторые общие замечания для оптимальных по быстродействию систем с линейной стационарной заданной частью без внешнего воздействия. В обоих примерах рассматривались системы второго порядка. Для них были получены линии переключений. Для систем высокого порядка будут получаться поверхности переключений в многомерном фазовом пространстве. При этом, если заданная часть системы n -го порядка

имеет только вещественные неположительные корни (включая нулевые), то процесс будет иметь не более $n - 1$ переключений, а если имеются комплексные (включая чисто мнимые) корни, то переключений может быть и больше, в зависимости от начальных условий.

Оптимальная по быстродействию система имеет релейный переключающий элемент, управляемый с помощью специального вычислительного логического устройства, алгоритм работы которого тем сложнее, чем выше порядок системы. При этом требуется непрерывно измерять все n фазовых координат или же, иначе, — регулируемую величину и $n - 1$ ее производных для введения в вычислительное устройство. Для систем высокого порядка это далеко не всегда реально. Поэтому практически прибегают к созданию не строго оптимальных систем, а систем, близких к оптимальным, но проще реализуемых. Некоторые конкретные рекомендации по таким системам см. в книге [61], стр. 474—477.

§ 23.3. Последовательная оптимизация на базе нелинейного программирования

Изложим этот метод, следуя В. М. Пономареву [405].

Рассмотрим более общий случай системы, описываемой нелинейными уравнениями динамики

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, \dots, x_n, t) + b_i(t) u_i + f_i(t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (23.35)$$

с переменными коэффициентами, с внешними воздействиями $f_i(t)$, которые могут иметь случайную природу при заданном распределении, и с начальными условиями

$$x_i = x_{i_n} \quad \text{при} \quad t = t_n, \quad (23.36)$$

которые также могут быть случайными с заданным распределением. Рассматривается конечное время процесса управления

$$t_n \leq t \leq t_k.$$

Нужно найти оптимальный нелинейный закон регулирования

$$u_i = u_i(x_1, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (23.37)$$

при котором осуществляется минимум функционала (критерий оптимальности)

$$I = M [H(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n, t_k)], \quad (23.38)$$

где M обозначает математическое ожидание, причем должны еще удовлетворяться необходимые ограничения на некоторые переменные и характеристики, обусловленные практической реализацией системы.

Представим нелинейные функции φ_i , u_i , H в виде степенных рядов степени l . Заданные функции φ_i будут

$$\begin{aligned} \varphi_i = & a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + a_{i(n+1)}x_1^2 + a_{i(n+2)}x_1x_2 + \dots \\ & \dots + a_{iq}x_1 \dots x_l + \dots + a_{ir}x_l^l \quad (i = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (23.39)$$

где величина индексов q и r определяется порядковым местом этих членов в ряде.

Аналогично и искомый нелинейный закон регулирования представляется в виде

$$\begin{aligned} u_i = & k_{i1}x_1 + \dots + k_{in}x_n + k_{i(n+1)}x_1^2 + k_{i(n+2)}x_1x_2 + \dots \\ & \dots + k_{iq}x_1 \dots x_l + \dots + k_{ir}x_l^l \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (23.40)$$

Тогда задача оптимизации сводится к отысканию значений коэффициентов k_{ij} .

Если подставить выражения (23.39) и (23.40) в исходные уравнения системы (23.35), то неизвестные коэффициенты k_{ij} войдут как параметры в правые части уравнений системы. Поскольку решения дифференциальных уравнений являются непрерывными функциями от параметров, то неизвестные x_i могут быть представлены в виде

$$x_i = x_i(k_{ij}, t) \quad (i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, r). \quad (23.41)$$

Подставляя (23.41) в (23.40), получаем

$$u_i = u_i(k_{ij}, t) \quad (i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, r). \quad (23.42)$$

Аналитические выражения для функций $x_i(k_{ij}, t)$ можно получить, например, решая уравнения системы методом последовательных приближений.

Подставляя выражения (23.41) и (23.42) в формулу (23.38), получим критерий оптимальности в виде

$$I = I(k_{ij}) \quad (i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, r). \quad (23.43)$$

Поскольку ограничения приводятся к аналогичному виду, то задача оптимизации нелинейного закона регулирования в общем случае сводится к задаче нелинейного программирования, т. е. к задаче отыскания минимума нелинейной функции $n \times r$ переменных при нелинейных ограничениях.

Метод последовательной оптимизации предусматривает замену полученной задачи нелинейного программирования последовательностью задач квадратичного программирования. Три возможных способа построения такой последовательности предложены в главе II книги [105]. Алгоритмы для решения задач квадратичного программирования отработаны достаточно хорошо. Один из наиболее удобных алгоритмов предложен Билом.

При реализации метода последовательной оптимизации можно не отыскивать аналитические выражения для функций $x_i(k_{ij}, t)$, так как в процессе численного решения используются только производные от критерия оптимальности и ограничений по искомым коэффициентам k_{ij} . Способы получения этих производных рассмотрены в гл. II книги [105].

Приведем один пример решения задачи оптимизации указанным методом.

П р и м е р. Допустим, что имеется линейный объект второго порядка с нелинейным инерционным исполнительным органом регулятора. Этот исполнительный орган описывается апериодическим звеном первого порядка с насыщением скоростной характеристики. При этом динамика объекта описывается уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + f(t), \quad (23.44)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_1(t)x_1 + b_1(t), \quad (23.45)$$

а регулятора —

$$\frac{du}{dt} = c_1 u + c_2 F(\sigma), \quad (23.46)$$

где

$$F(\sigma) = \sigma + k_3 \sigma^3, \quad \sigma = k_1 x_1 + k_2 x_2. \quad (23.47)$$

Вводятся ограничения на управление:

$$|u| \leq v_1, \quad \left| \frac{du}{dt} \right| \leq v_2. \quad (23.48)$$

Такая задача является типичной, например, для летательных аппаратов при ограничении угла отклонения руля и скорости его движения.

Задано: $c_1 = -10 \text{ сек}^{-1}$, $c_2 = 25 \text{ сек}^{-1}$, $v_1 = 0,3 \text{ рад}$, $v_2 = 1 \text{ рад/сек}$. Переменные коэффициенты $a_1(t)$ и $b_1(t)$ заданы в виде графиков (рис. 23.5). Возмущающее воздействие $f(t)$ является случайным и описывается каноническим разложением

$$f(t) = w_1 f_1(t) + w_2 f_2(t), \quad (23.49)$$

где случайные величины w_1 и w_2 имеют следующие математические ожидания и дисперсии:

$$M[w_1] = M[w_2] = 0, \quad D[w_1] = D[w_2] = 0,6,$$

а так называемые координатные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ заданы графически (рис. 23.6).

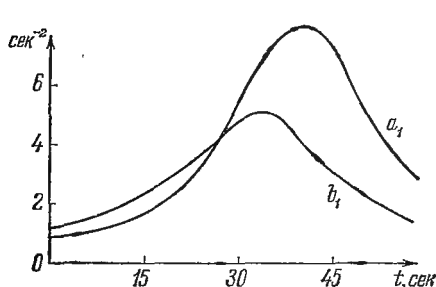


Рис. 23.5.

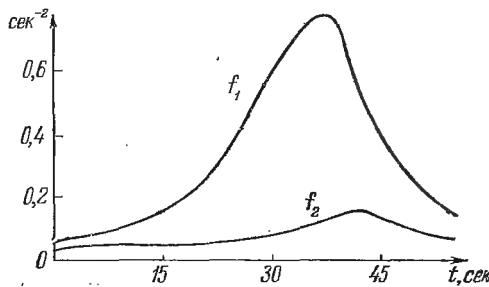


Рис. 23.6.

Дополнительно к этому вводятся еще ограничения на фазовые координаты движения объекта по траектории

$$D[x_1] \leq 0,005, \quad D[x_2] \leq 0,01 \text{ сек}^2,$$

а также на коэффициенты k_1 и k_2 в виде

$$0 \leq k_1 \leq 15, \quad 0 \leq k_2 \leq 10 \text{ сек}.$$

Ставится задача отыскания значений коэффициентов нелинейного закона управления k_1, k_2, k_3 , оптимизирующих систему по критерию точности (минимальная ошибка):

$$I_T = M \left[\int_{t_H}^{t_K} (m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2) dt \right], \quad (23.50)$$

и вторая задача — отыскания значений тех же коэффициентов, оптимизирующих систему по энергетическому критерию (минимум затраты энергии на управление):

$$I_E = M \left[\int_{t_H}^{t_K} m_3 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dt \right]. \quad (23.51)$$

Результаты решения первой задачи оптимизации описанным выше алгоритмическим методом, проведенного на ЦВМ, даны в табл. 23.1.

В этой таблице показано не только как меняются значения самих коэффициентов k_1, k_2, k_3 на каждом шаге последовательной оптимизации, но и то, как меняется, постепенно уменьшаясь, дисперсия ошибки (отклонения объекта) $D[x_1]$ в конце управляемого движения ($t = t_K$), а также и величина минимизируемого функционала I_T .

Таблица 23.1

Параметр	Шаг оптимизации					
	1	2	3	4	5	6
k_1	2	3,20	4,50	5,66	6,01	6,75
$k_2, \text{сек}$	1	0,52	0,64	0,69	0,76	0,81
k_3	0	5	10	15	20	50
$I_T, \frac{\text{рад}^2}{\text{сек}}$	5,75	1,66	0,80	0,60	0,50	0,46
$D[x_1]_{t=t_k}, \text{рад}^2$	$0,4 \cdot 10^{-3}$	$0,8 \cdot 10^{-4}$	$0,3 \cdot 10^{-4}$	$0,2 \cdot 10^{-4}$	$0,17 \cdot 10^{-4}$	$0,16 \cdot 10^{-4}$

Решение второй задачи оптимизации — по энергетическому критерию (23.51) — приводит к следующим результатам (табл. 23.2).

Таблица 23.2

Параметр	Шаг оптимизации			
	1	2	3	4
k_1	2	1,86	1,89	1,52
$k_2, \text{сек}$	1	1,52	2,00	2,18
k_3	0	30	60	260
$I_E, \frac{\text{рад}^2}{\text{сек}}$	0,293	0,252	0,238	0,232
$D[x_1]_{\text{max}}, \text{рад}^2$	$0,36 \cdot 10^{-3}$	$0,35 \cdot 10^{-3}$	$0,30 \cdot 10^{-3}$	$0,34 \cdot 10^{-3}$

Из таблицы видно, что коэффициенты k_1, k_2, k_3 нелинейного оптимального закона в этом случае существенно отличаются от первого в основном за счет увеличения коэффициента k_3 при кубическом члене выражения нелинейной функции (23.47) и уменьшения коэффициента k_1 . Видно также, что точность управления при минимизации затраты энергии ухудшается.

В заключение отметим, что описанным здесь методом последовательной оптимизации на базе нелинейного программирования с использованием ЦВМ могут решаться задачи синтеза оптимальных систем большой сложности, в том числе многомерных, с уравнениями высокого порядка и с произвольными видами внешних воздействий и налагаемых практикой ограничений при различных критериях оптимальности.

ЦИФРОВЫЕ И АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

ГЛАВА 24

СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ С ЦИФРОВЫМИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМИ МАШИНАМИ

§ 24.1. Общие понятия

Использование цифровых вычислительных машин (ЦВМ) для управления автоматизированными объектами имеет большие перспективы. Это объясняется значительными вычислительными и логическими возможностями ЦВМ, что позволяет реализовывать сложные алгоритмы управления.

Включение цифровой вычислительной машины в систему автоматического регулирования требует рассмотрения двух групп вопросов.

К первой группе относятся вопросы, связанные с проектированием и реализацией самой ЦВМ, а также ее входных и выходных устройств (преобразователей), задачей которых является преобразование непрерывных физических величин к цифровому виду и обратно.

Ко второй группе относятся вопросы, связанные с изучением влияния дискретного характера выходных сигналов ЦВМ на динамические свойства системы автоматического регулирования. Дальнейшее изложение будет касаться именно этой группы вопросов.

Как правило, целесообразно вводить ЦВМ в систему регулирования в тех случаях, когда требуется сложная обработка поступающей информации. Так, например, в системах управления движущимися объектами необходимо производить сложные вычисления, связанные с операциями преобразования координат, решение прямоугольных и сферических треугольников, счисление пути и т. п. В системах управления сложными производственными объектами, например доменными печами, автоматизированными линиями и т. п., приходится производить большой объем логических операций.

Ввиду сравнительно большой сложности ЦВМ включение ее в состав автоматизированной системы оправдывается тогда, когда на ЦВМ возлагается решение ряда задач с обслуживанием нескольких зависимых или независимых каналов управления.

Общий случай системы регулирования с ЦВМ изображен на рис. 24.1. Здесь $g_1, g_2, g_3, \dots, g_n$ представляют собой задающие воздействия, в функции которых ЦВМ вырабатывает регулирующие воздействия, прикладываемые к системе регулирования; $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ являются регулируемыми величинами, а $f_1, f_2, f_3, \dots, f_m$ — возмущающими воздействиями.

По своему принципу действия ЦВМ является вычислительным устройством дискретного действия. Поэтому и система регулирования с ЦВМ представляет собой дискретную систему.

Ввиду того, что рассмотрение системы со многими переменными (рис. 24.1) представляет собой весьма громоздкую задачу, ограничимся случаем, когда ЦВМ вводится в одиночный контур регулирования с одной регулируемой

величиной y и одним задающим воздействием g . Во многих случаях задача исследования системы с ЦВМ может быть сведена к рассмотрению таких одиночных контуров (рис. 24.2).

Принцип работы ЦВМ заключается в том, что возложенные на нее математические действия она производит в дискретные моменты времени $t = 0, T, 2T, 3T$ и т. д., где T — период повторения ЦВМ. В интервалах между решениями на выходе ЦВМ сохраняется то решение, которое было получено в начале рассматриваемого интервала. Поэтому непрерывная функция $f(t)$ заменяется на выходе ЦВМ ступенчатобразной функцией $f[nT]$ в соответствии с рис. 24.3.

Эта функция и прикладывается к непрерывной части системы регулирования (рис. 24.2).

В интервалах между решениями на выходе ЦВМ возможна также экстраполяция предыдущих решений по линейной, квадратичной и т. д. зависимостям. Сохранение предыдущего решения, указанное выше, соответствует использованию экстраполятора нулевого порядка. Этот случай и будет рассматривать в дальнейшем.

Процесс превращения непрерывной функции в ступенчатую (рис. 24.3) соответствует *квантованию по времени*. Вследствие цифрового представления непрерывной величины в цифровой вычислительной машине имеет место также процесс *квантования по уровню*. Последнее объясняется тем, что цифровое представление допускает только вполне определенные фиксированные уровни сигналов, отличающиеся друг от друга на единицу младшего разряда.

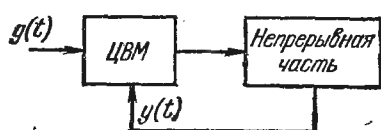


Рис. 24.2.

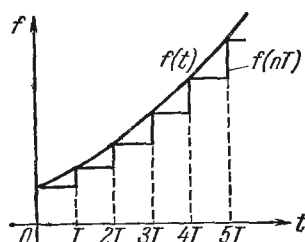


Рис. 24.3.

Квантование по времени делает всю систему регулирования дискретной, а квантование по уровню — нелинейной. В дальнейшем изложении будем вначале предполагать, что влиянием квантования по уровню можно пренебречь. Это делает всю систему линейной и дает возможность использовать для ее расчета аппарат, развитый для исследования импульсных систем (глава 15). Влияние квантования по уровню будет рассмотрено отдельно в § 24.4.

Дискретные передаточные функции. Непрерывная часть системы, на входе которой действует ступенчатая функция $f[nT]$, изображенная на рис. 24.3, носит название *фильтра с фиксацией* или *фильтра с запоминанием*.

Для исследования подобных систем может использоваться аппарат z -преобразования и его модификации. Разница будет заключаться только в получении исходной дискретной передаточной функции разомкнутой системы $W(z)$, т. е. дискретной передаточной функции фильтра с фиксацией.

Дальнейшие исследования могут производиться в соответствии с изложенным выше для импульсных схем.

Дискретный элемент, каким является ЦВМ, генерирует импульсы, длительность которых равна периоду повторения T . В связи с этим можно воспользоваться формулой (15.139), если положить в ней $\tau = 0$:

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z\{h_0(t)\} = \frac{z-1}{z} F_0(z), \quad (24.1)$$

где $h_0(t)$ — переходная функция непрерывной части (рис. 24.2), а $F_0(z)$ является z -преобразованием переходной функции $h_0(t)$.

Таким образом, отыскание передаточной функции разомкнутой дискретной системы с запоминанием сводится к отысканию переходной функции разомкнутой непрерывной части, переходу от нее к z -преобразованию, что может быть сделано по таблицам, и умножению полученного результата на $\frac{z-1}{z}$.

Формула (24.1) может быть представлена также в другом виде. Переходная функция $h_0(t)$ является преобразованием Лапласа от передаточной функции непрерывной части $W_0(p)$, деленной на p :

$$h_0(t) = L^{-1} \left[\frac{W_0(p)}{p} \right]. \quad (24.2)$$

Поэтому формулу (24.1) можно символически записать в виде

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left[\frac{W_0(p)}{p} \right], \quad (24.3)$$

где Z означает z -преобразование от изображения Лапласа, находящегося в квадратных скобках.

Пусть передаточная функция непрерывной части статической системы регулирования в разомкнутом состоянии может быть представлена в виде

$$W_0(p) = \frac{K(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) \dots (1+\tau_m p)}{(1+T_1 p)(1+T_2 p) \dots (1+T_n p)}. \quad (24.4)$$

Разложим ее на простые дроби:

$$W_0(p) = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\alpha_i + p} = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{1+T_i p},$$

где $\alpha_i = \frac{1}{T_i}$, а N_i и $R_i = N_i T_i$ — коэффициенты, определяемые в соответствии с теоремой разложения (см. § 7.4).

Переходная функция для последнего выражения представляет собой сумму экспонент

$$h_0(t) = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\alpha_i} (1 - e^{-\alpha_i t}).$$

Из табл. 15.1 следует, что дискретная передаточная функция $W(z)$ может быть представлена в виде

$$W(z) = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\alpha_i} \frac{1-d_i}{z-d_i} = \sum_{i=1}^n \frac{R_i(1-d_i)}{z-d_i} \quad (24.5)$$

где $d_i = e^{-\alpha_i T}$.

Для астатических систем первого порядка с передаточной функцией непрерывной части

$$W_0(p) = \frac{K(1+\tau_1 p) \dots (1+\tau_m p)}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p) \dots (1+T_n p)} \quad (24.6)$$

аналогичными рассуждениями можно показать, что дискретная передаточная функция $W(z)$ может вычисляться по выражению

$$W(z) = \frac{KT}{z-1} + \sum_{i=1}^n \frac{R_i(1-d_i)}{z-d_i}, \quad (24.7)$$

а для астатических систем с астатизмом второго порядка, имеющих передаточную функцию непрерывной части

$$W_0(p) = \frac{K(1+\tau_1 p) \dots (1+\tau_m p)}{p^2(1+T_1 p) \dots (1+T_n p)}, \quad (24.8)$$

— по выражению

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{KT^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} + \frac{K_\Omega T}{z-1} \sum_{i=1}^n \frac{R_i(1-d_i)}{z-d_i} = \\ &= \frac{KT^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} + \frac{KT_0 T}{z-1} + K \sum_{i=1}^n \frac{N_i(1-d_i)}{z-d_i}, \end{aligned} \quad (24.9)$$

где $K_\Omega = KT_0 > 0$ — условная добротность по скорости, вычисляемая по формуле

$$K_\Omega = KT_0 = K \left(\sum_{j=1}^m \tau_j - \sum_{i=1}^n T_i \right), \quad (24.10)$$

а R_i и N_i — коэффициенты разложения.

Учет запаздывания. В контуре системы регулирования с ЦВМ может содержаться элемент, вносящий временное запаздывание (глава 14). Это запаздывание может относиться как к непрерывной части, так и к самой ЦВМ. В последнем случае запаздывание определяется программой работы машины и не может превышать периода повторения, т. е. $0 \leq \tau \leq T$.

Учет запаздывания вне зависимости от того, относится ли оно к непрерывной части или к ЦВМ, осуществляется при определении дискретной передаточной функции разомкнутой системы $W(z)$. В этом случае z -преобразование от переходной функции непрерывной части должно осуществляться в соответствии с выражением (15.138):

$$W(z) = \frac{z-1}{z^2} W_1(z, \varepsilon), \quad (24.11)$$

где $\xi = \frac{\tau}{T}$ — относительное запаздывание, $\varepsilon = 1 - \xi$, $W_1(z, \varepsilon)$ — смещенное z -преобразование для переходной функции $h_0(t)$, определяемое по табл. 15.1.

Исследование устойчивости и качества регулирования. После нахождения дискретной передаточной функции разомкнутой системы $W(z)$ дальнейшее исследование производится в соответствии с главой 15. Для этой цели может быть найдена дискретная передаточная функция замкнутой системы (15.143):

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)},$$

и дискретная передаточная функция по ошибке (15.144):

$$\Phi_x(z) = 1 - \Phi(z) = \frac{1}{1+W(z)}.$$

Условие применимости формул (15.143) и (15.144) сводится здесь к тому, чтобы начальное значение переходной функции непрерывной части равнялось нулю, т. е. $h_0(0) = 0$. Это будет выполняться в том случае, когда степень числителя передаточной функции непрерывной части $W_0(p)$ меньше степени знаменателя.

Как и в импульсных системах, условием устойчивости замкнутой системы будет $|z_i| < 1$, где z_i — корни характеристического уравнения (15.158):

$$1 + W(z) = 0.$$

Точность системы может определяться по коэффициентам ошибок (15.171), а быстродействие и запас устойчивости — построением переходного процесса или частотными методами (см. главу 15).

На основании изложенного можно представить структурную схему системы регулирования с ЦВМ следующим образом. Вне зависимости от сложности решаемых математических задач можно считать, что ЦВМ определяет разность между необходимым значением регулируемой величины и действительным значением, т. е. ошибку $x = g - y$. В функции этой ошибки ЦВМ должна прикладывать к системе регулирования управляющее воздействие. Поэтому для исследования динамики следует пользоваться структурной схемой (рис. 24.4), в которой ЦВМ условно введена последовательно в цепь вычисления ошибки. В общем случае в контуре регулирования может присутствовать элемент чистого временного запаздывания, выделенный в отдельное звено с передаточной функцией $e^{-\tau p}$.

Эффекты запоминания на период интегрирования весовой функции (рис. 24.3), определяемые формулами (24.1) и (24.3), учитываются также отдельным звеном с передаточной функцией

$$\frac{1 - e^{-pT}}{p} = \frac{z - 1}{zp}, \quad (24.12)$$

где $z = e^{pT}$.

Если кроме определения ошибки $x = g - y$ ЦВМ производит интегриродифференциальные операции, то в контуре будет также присутствовать дискретная передаточная функция $D(z)$, соответствующая некоторому дискретному фильтру, разностное уравнение которого может быть получено из $D(z)$ на основании (15.96) и (15.98).

Ключи, изображенные на структурной схеме (рис. 24.4), генерируют импульсные функции в соответствии с периодом повторения ЦВМ. Проходя через запоминающее устройство (24.12), последовательность импульсных функций образует ступенчатую функцию (рис. 24.3).

Рассмотрим теперь простейшие примеры.

Пример 1. Пусть непрерывная часть системы регулирования соответствует астатизму первого порядка и представляет собой идеальное интегрирующее звено с передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{K}{p}.$$

В соответствии с (24.7) получаем дискретную передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(z) = \frac{KT}{z-1}. \quad (24.13)$$

Определим условие устойчивости замкнутой системы. Характеристическое уравнение системы $1 + W(z) = 0$ приобретает вид

$$z - 1 + KT = 0.$$

Для выполнения условия $|z_1| < 1$ необходимо, чтобы удовлетворялось неравенство,

$$KT < 2. \quad (24.14)$$

Это и будет условием устойчивости системы.

Если необходимо иметь запас устойчивости, то можно воспользоваться для его оценки, например, понятием показателя колебательности. Найдем дискретную частотную передаточную функцию, положив $z = e^{j\omega T}$. В результате получаем

$$W(z) = \frac{KT}{e^{j\omega T} - 1} = -\frac{KT}{2} - j\frac{KT}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2}.$$

Нетрудно видеть, что амплитудно-фазовая характеристика представляет собой прямую, параллельную оси мнимых (рис. 24.5). Условие получения заданного показателя колебательности

$$KT < 2 \frac{M}{M+1}. \quad (24.15)$$

Это условие дает допустимое соотношение между общим коэффициентом усиления K , который в рассматриваемом случае, как нетрудно показать, равен добротности по скорости K_Ω , и периодом повторения ЦВМ.

Построим переходный процесс при подаче на вход ступенчатого воз-

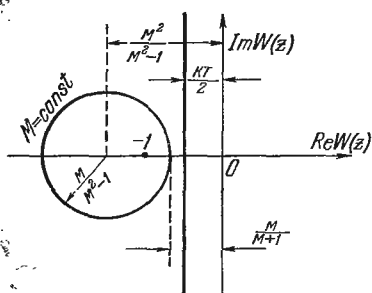


Рис. 24.5.

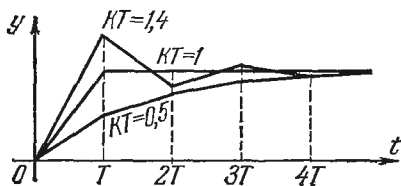


Рис. 24.6.

действия $g(t) = 1(t)$. Дискретная передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)} = \frac{KT}{z - 1 + KT}. \quad (24.16)$$

Изображение единичной ступенчатой функции будет (табл. 15.1)

$$G(z) = Z[1(t)] = \frac{z}{z-1}. \quad (24.17)$$

Изображение выходной величины

$$Y(z) = \Phi(z) G(z) = \frac{KT}{z-1+KT} \cdot \frac{z}{z-1}. \quad (24.18)$$

Примем следующие значения произведения добротности по скорости на период повторения:

- 1) $KT = 1,4$, что соответствует $M = 1,5$;
- 2) $KT = 1$, что соответствует $M = 1$ для максимального значения KT ;
- 3) $KT = 0,5$, что соответствует $M = 1$.

Раскладывая (24.18) в ряд Лорана, получаем значения выходной величины $y[nT]$ в дискретные моменты времени, соответствующие $n = 0, 1, 2, \dots$. Процессы изображены на рис. 24.6. Значения выходной величины в дискретные моменты времени соединены между собой прямыми линиями, соответствующими переходным характеристикам интегрирующего звена, которым является непрерывная часть системы.

Нетрудно заметить, что оптимальный процесс будет при $M = 1$ (случай 2). Тогда переходный процесс длится конечное время, равное одному периоду повторения.

Пример 2. Рассмотрим систему с астатизмом второго порядка. Пусть передаточная функция непрерывной части имеет вид

$$W_0(p) = \frac{K(1+\tau p)}{p^2} = \frac{K}{p^2} + \frac{K\tau}{p}.$$

В соответствии с (24.9) получаем

$$W(z) = \frac{KT^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} + \frac{K\tau T}{z-1}. \quad (24.19)$$

Воспользуемся для расчета методом логарифмических частотных характеристик. Для этой цели применим подстановку (15.162) и перейдем к w -преобразованию

$$W^*(w) = \frac{KT^2}{4} \frac{\left(1 + 2\frac{\tau}{T}w\right)(1-w)}{w^2}. \quad (24.20)$$

Для перехода к частотной передаточной функции сделаем подстановку $w = j\frac{T}{2}\lambda$, где λ представляет собой абсолютную псевдочастоту. В результате получим частотную передаточную функцию

$$W^*(j\lambda) = \frac{K(1+j\tau\lambda)\left(1-j\frac{T}{2}\lambda\right)}{(j\lambda)^2}.$$

Модуль этой величины

$$|W^*(j\lambda)| = \frac{K \sqrt{1+\lambda^2\tau^2} \sqrt{1+\frac{T^2\lambda^2}{4}}}{\lambda^2}$$

и фаза

$$\psi = -180^\circ + \arctg \tau\lambda - \arctg \frac{T\lambda}{2}.$$

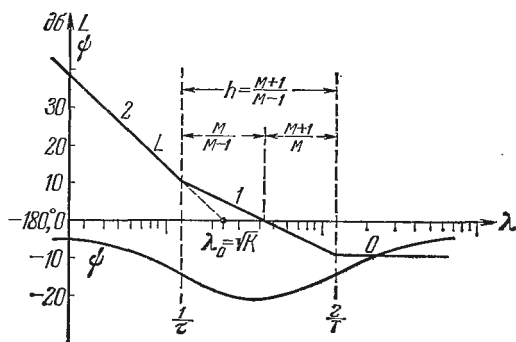


Рис. 24.7.

По этим выражениям на рис. 24.7 построены асимптотическая л. а. х. и л. ф. х. Нетрудно видеть, что этот случай по расположению фазовой характеристики сводится к случаю л. а. х. типа 2—1—2, изображенной на рис. 12.13. Используя полученные в главе 12 формулы, получаем требуемую протяженность участка с наклоном 20 дБ/дек в оптимальном случае:

$$h = \frac{2\tau}{T} = \frac{M+1}{M-1}. \quad (24.21)$$

Базовая частота л. а. х. $\lambda_0 = \sqrt{K}$.

Далее, имеем связь между постоянной времени τ и базовой частотой:

$$\tau = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}},$$

откуда находим общий коэффициент усиления

$$K = \lambda_{01}^2 = \frac{1}{\tau^2} \frac{M}{M-1} = \frac{4}{T_{\text{д}}^2} \frac{M(M-1)}{(M+1)^2}. \quad (24.22)$$

Эту формулу можно записать также в следующем виде:

$$\frac{KT^2}{4} \leq \frac{M(M-1)}{(M+1)^2}. \quad (24.23)$$

Формулы (24.21) и (24.22) позволяют выбрать значения общего коэффициента усиления непрерывной части K и постоянной времени τ при заданном значении периода повторения T или определить значение периода повторения при заданном значении общего коэффициента усиления K . Заметим, что в рассматриваемой системе коэффициенты ошибок c_0 и c_1 равны нулю, а общий коэффициент усиления равен добротности системы по ускорению:

$$K = \frac{2}{c_2}.$$

Формула (24.23) дает возможность определить допустимое соотношение между добротностью системы по ускорению K и периодом дискретности T .

Построение переходного процесса можно произвести аналогично примеру 1 § 24.1.

§ 24.2. О синтезе систем регулирования с ЦВМ

Синтез систем регулирования с ЦВМ наиболее просто производить на основе той методики, которая была изложена в § 12.6 для непрерывных систем. Покажем, как можно перенести ее на дискретные системы регулирования.

Как и в случае непрерывных систем, будем определять качество переходного процесса устойчивых дискретных систем, точнее их запас устойчивости, по показателю колебательности, соответствующему максимуму амплитудной частотной характеристики замкнутой системы:

$$| \Phi(z) | = \frac{W(z)}{1+W(z)}. \quad (24.24)$$

Соотношение (24.24) полностью аналогично соответствующему соотношению для непрерывных систем. Поэтому получение требуемого показателя колебательности может быть обеспечено выполнением условия для л. а. х. разомкнутой системы подобно тому, как это было сделано в § 12.6 для непрерывных систем.

Для упрощения выкладок ограничимся рассмотрением систем с астатизмом не выше второго порядка, хотя методика остается применимой и в случае более высокого порядка астатизма. Пусть передаточная функция непрерывной части разомкнутой системы имеет вид

$$W_0(p) = \frac{K(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) \dots (1+\tau_m p)}{p^2(1+T_1 p)(1+T_2 p) \dots (1+T_n p)}. \quad (24.25)$$

При построении л. а. х. следящей системы с учетом ЦВМ введем следующие предположения.

1. Величина, обратная периоду дискретности T , больше половины частоты среза $\omega_{\text{ср}}$ л. а. х. непрерывной части системы, т. е. $\omega_{\text{ср}} T < 2$. При расчете следящих систем с ЦВМ это неравенство приходится выполнять практически во всех случаях в связи с требованиями по устойчивости и запасу устойчивости.

2. Все постоянные времени $T_1, \dots, T_n$ можно разделить на две группы. К первой группе $T_1, \dots, T_q$ отнесем те из них, которым соответствуют

сопрягающие частоты, меньшие частоты среза $\omega_{\text{ср}}$ (большие постоянные времени). Ко второй группе $T_{q+1}, \dots, T_n$ отнесем те постоянные времени, которым соответствуют сопрягающие частоты большие, чем частота среза $\omega_{\text{ср}}$ (малые постоянные времени), причем для каждой постоянной времени второй группы должно выполняться неравенство $T_i < T/2$.

3. Постоянным временем $\tau_1, \dots, \tau_m$ соответствуют сопрягающие частоты меньшие, чем частота среза. Это не относится к тем постоянным времени числителя передаточной функции разомкнутой непрерывной части, которые были введены для компенсации некоторых ее полюсов и поэтому после сокращения соответствующих множителей не вошли в окончательное выражение (24.25).

4. Переход оси нуля децибел асимптотической л. а. х. непрерывной части происходит при отрицательном наклоне 20 дб/дек.

Л. а. х. системы с ЦВМ в области низких частот. Рассмотрим построение л. а. х. для (24.25) в области низких частот, т. е. левее частоты среза. Передаточная функция непрерывной части для этой области может быть представлена в виде

$$W_0(p) = \frac{K(1+\tau_1 p) \dots (1+\tau_m p)}{p^2(1+T_1 p) \dots (1+T_q p)}. \quad (24.26)$$

Очевидно, что вследствие условия 4 имеем равенство $m = q + 1$.

Разложим (24.26) на простые дроби:

$$W_0(p) = \frac{K}{p^2} + \frac{KT_0}{p} + K \sum_{i=1}^q \frac{N_i}{1+T_i p}, \quad (24.27)$$

где N_i — коэффициенты разложения, $KT_0 = K_0$ представляет собой условную добротность по скорости, а

$$T_0 = \sum_{k=1}^m \tau_k - \sum_{i=1}^q T_i. \quad (24.28)$$

На основании (24.9) дискретная передаточная функция, соответствующая (24.26), будет

$$W(z) = \frac{KT^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} + \frac{KT_0 T}{z-1} + K \sum_{i=1}^q \frac{N_i(1-d_i)}{z-d_i}, \quad (24.29)$$

где

$$d_i = e^{-\frac{T}{T_i}}.$$

Перейдем к дискретной частотной передаточной функции посредством использования w -преобразования (15.163) и подстановки (15.164). В результате получим

$$W^*(j\lambda) = \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[\frac{K}{(j\lambda)^2} + \frac{KT_0}{j\lambda} + K \sum_{i=1}^q \frac{N_i}{1 + j\lambda \frac{T}{2} \operatorname{cth} \frac{T}{2T_i}} \right], \quad (24.30)$$

где абсолютная псевдочастота

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \quad (24.31)$$

Ранее было сделано допущение, что $T_i > T/2$. Поэтому можно считать

$$\operatorname{cth} \frac{T}{2T_i} = \frac{1}{\operatorname{th} \frac{T}{2T_i}} \approx 2 \frac{T_i}{T},$$

откуда окончательно

$$W^*(j\lambda) = \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[\frac{K}{(j\lambda)^2} + \frac{KT_0}{j\lambda} + K \sum_{i=1}^q \frac{N_i}{1 + j\lambda T_i} \right]. \quad (24.32)$$

Сравнение последнего выражения с (24.27) показывает, что в низкочастотной области частотная передаточная функция системы с ЦВМ может быть получена из передаточной функции непрерывной части подстановкой $p = j\lambda$ и умножением на дополнительный множитель $(1 - j\lambda T/2)$. Псевдочастота λ в этой области практически совпадает с частотой входного воздействия ω , что вытекает из (24.31). Так как было принято, что $2/T > \omega_{\text{ср}}$, то влияние дополнительного множителя $(1 - j\lambda T/2)$ при построении асимптотической л. а. х. можно не учитывать. Поэтому в низкочастотной области асимптотическая л. а. х. системы с ЦВМ практически сливается с л. а. х. непрерывной части, причем можно положить $\lambda = \omega$. Это дает большие удобства в формировании низкочастотной части л. а. х. проектируемой системы и позволяет полностью использовать ту методику, которая была изложена выше для непрерывных систем.

Л. а. х. системы с ЦВМ в области высоких частот. В соответствии с принятыми условиями передаточная функция непрерывной части для этой области может быть представлена в виде

$$W_{\text{в}}(p) = \frac{\omega_{\text{ср}}}{p(1 + T_{q+1}p) \dots (1 + T_n p)}, \quad (24.33)$$

где частота среза асимптотической л. а. х.

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{K\tau_1\tau_2 \dots \tau_m}{T_1 T_2 \dots T_q}.$$

Разложим (24.33) на простые дроби:

$$W_{\text{в}}(p) = \frac{\omega_{\text{ср}}}{p} - \omega_{\text{ср}} \sum_{i=q+1}^n \frac{N_i}{1 + T_i p}. \quad (24.34)$$

Аналогично предыдущему найдем частотную передаточную функцию переходом к псевдочастоте:

$$W_{\text{в}}^*(j\lambda) = \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[\frac{\omega_{\text{ср}}}{j\lambda} - \omega_{\text{ср}} \sum_{i=q+1}^n \frac{N_i}{1 + j\lambda \frac{T}{2} \operatorname{cth} \frac{T}{2T_i}} \right]. \quad (24.35)$$

Так как $T_i < T/2$, то можно положить

$$\operatorname{cth} \frac{T}{2T_i} \approx 1.$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=q+1}^n N_i = \sum_{i=q+1}^n T_i = T_{\Sigma},$$

получаем в результате

$$W_{\text{в}}^*(j\lambda) = \frac{\omega_{\text{ср}} \left[1 + j\lambda \left(\frac{T}{2} - T_{\Sigma} \right) \right] \left(1 - j\lambda \frac{T}{2} \right)}{j\lambda \left(1 + j\lambda \frac{T}{2} \right)}. \quad (24.36)$$

Это выражение и может использоваться для построения л. а. х., причем модуль (24.36)

$$|W_{\text{в}}^*(j\lambda)| = \frac{\omega_{\text{ср}} \sqrt{1 + \lambda^2 \left(\frac{T}{2} - T_{\Sigma} \right)^2}}{\lambda}. \quad (24.37)$$

Начало л. а. х. в высокочастотной области сливается с концом л. а. х. низкочастотной области в точке $\lambda = \omega_{\text{ср}}$.

При построении фазовой характеристики следует учитывать появление множителя $(1 - j\lambda T/2)$, соответствующего неминимально-фазовому звену. Для построения фазовой характеристики можно воспользоваться результирующим выражением для дискретной частотной передаточной функции, которое на основании изложенного будет

$$W^*(j\lambda) = \frac{K(1+j\lambda\tau_1) \dots (1+j\lambda\tau_m) \left(1-j\lambda\frac{T}{2}\right) \left[1+j\lambda\left(\frac{T}{2}-T_{\Sigma}\right)\right]}{(j\lambda)^2(1+j\lambda T_1) \dots (1+j\lambda T_q) \left(1+j\lambda\frac{T}{2}\right)}. \quad (24.38)$$

Результирующий фазовый сдвиг

$$\psi = -180^\circ + \sum_{j=1}^m \operatorname{arctg} \lambda \tau_j - \sum_{i=1}^q \operatorname{arctg} \lambda T_i - 2 \operatorname{arctg} \lambda \frac{T}{2} + \operatorname{arctg} \lambda \left(\frac{T}{2} - T_{\Sigma}\right). \quad (24.39)$$

В районе частоты среза при $\lambda < 2/T$ можно считать с достаточной точностью

$$\psi \simeq -180^\circ + \sum_{j=1}^m \operatorname{arctg} \lambda \tau_j - \sum_{i=1}^q \operatorname{arctg} \lambda T_i - \operatorname{arctg} \lambda \left(\frac{T}{2} + T_{\Sigma}\right). \quad (24.40)$$

В результате при построении высокочастотного «хвоста» приходится учитывать сумму малых постоянных времени T_{Σ} и дополнительный множитель $(1 - j\lambda T/2)$. Последний приводит к подъему л. а. х. на высоких частотах и дает дополнительный фазовый сдвиг в отрицательную сторону, равный $\operatorname{arctg} \lambda T/2$. Методика расчета следящих систем с ЦВМ и здесь совпадает с методикой расчета непрерывных систем, изложенной выше. Только формула (12.96) должна быть переписана в виде

$$\frac{T}{2} + \sum_{i=q+1}^n T_i \leq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1}. \quad (24.41)$$

Аналогичным образом для «несимметричных» л. а. х. типа 1—2—3... (рис. 12.18) систем с астатизмом первого порядка можно показать, что вид л. а. х. в низкочастотной области сохраняется, а требуемый запас устойчивости получится при

$$\frac{T}{2} + \sum_{i=1}^n T_i \leq \frac{1}{K} \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2} \quad (M \leq 1, 3). \quad (24.42)$$

Последнее выражение является достаточным, если имеется хотя бы одна постоянная времени, по величине большая чем $T/2$. Если для всех постоянных времени выполняется условие $T_i < T/2$, то для предотвращения захода высокочастотного хвоста л. а. х. в запретную зону (рис. 12.16) необходимо выполнить дополнительное условие

$$\frac{T}{2} \leq \frac{1}{K} \frac{M}{M+1} = \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1}. \quad (24.43)$$

При построении л. а. х. для систем с ЦВМ можно не вводить специального обозначения для псевдочастоты λ , а употреблять обычное обозначение ω ,

считая, что в области рабочих частот (левее частоты среза) это есть частота входного воздействия, а в высокочастотной области она переходит в псевдо-частоту.

Сделаем теперь два замечания. Первое относится к случаю наличия в передаточной функции непрерывной части (24.25) сомножителей, [соответствующих колебательным звеньям с передаточной функцией

$$W_q(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{q}p + \frac{p^2}{q^2}}.$$

Если выполняется условие $qT < 2$, то дискретная частотная передаточная функция для подобного сомножителя совпадает с частотной передаточной функцией непрерывного звена и она может быть получена подстановкой

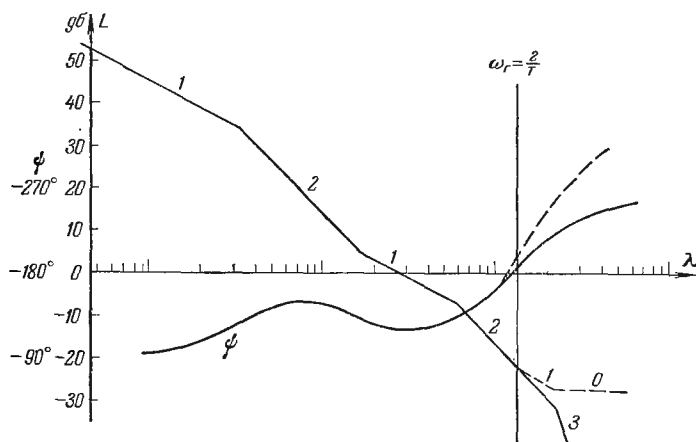


Рис. 24.8.

$p = j\lambda$ и умножением на $(1 - j\lambda T/2)$. При $qT > 2$ построение л. а. х. несколько усложняется вследствие явления транспонирования частот. Однако и здесь не возникает никаких принципиальных трудностей [10].

Второе замечание касается последней части условия 2, которое было сформулировано выше при построении л. а. х. для передаточной функции (24.25). Если для всех постоянных времени $T_{q+1} \dots T_n$ условие $T_i < 0,5T$ не выполняется, то построение л. а. х. делается следующим образом. Строится л. а. х., соответствующая передаточной функции непрерывной части (рисунок 24.8). Затем проводится вертикальная линия, соответствующая граничной частоте $\omega_r = \frac{2}{T}$. Л. а. х., расположенная левее граничной частоты, соответствует низкочастотной части, и она может быть принята в качестве л. а. х. дискретной системы, так как в этой области абсолютная псевдо-частота совпадает с обычной частотой $\lambda \approx \omega$.

Далее находится формула, соответствующая высокочастотной части л. а. х. непрерывной системы, аналогичная формуле (24.33). Пусть, например, пересечение граничной частоты происходит при наклоне асимптоты $40 \text{ } \delta\phi/\text{дек}$ так, как это показано на рис. 24.8. Тогда уравнение высокочастотной части будет

$$W_B(p) = \frac{k}{p^2(1 + T_1 p) \dots (1 + T_n p)}, \quad (24.44)$$

где $\omega_B = \sqrt{k}$ — частота пересечения оси частот асимптотой, имеющей отрицательный наклон $40 \text{ } \delta\phi/\text{дек}$.

Раскладывая выражение (24.44) на простые дроби, переходя к $W_B(z)$, а затем к $W_B^*(j\lambda)$, получим аналогично формуле (24.36) для высокочастотной части

$$W_B^*(j\lambda) = \frac{k \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[1 + j\lambda \left(\frac{T}{2} - T_\Sigma\right) - (j\lambda)^2 \left(\frac{T}{2} T_\Sigma - T_\sigma^2\right)\right]}{(j\lambda)^2 \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)}, \quad (24.45)$$

где

$$T_\Sigma = T_1 + T_2 + \dots + T_n,$$

$$T_\sigma^2 = T_1^2 + \dots + T_n^2 + T_1 T_2 + T_1 T_3 + \dots + T_1 T_n + T_2 T_3 + \dots$$

Если выполняется условие $T_\sigma^2 \ll \frac{T}{2} T_\Sigma$, то формула (24.45) упрощается:

$$W_B^*(j\lambda) \approx \frac{k \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) (1 - j\lambda T_\Sigma)}{(j\lambda)^2}. \quad (24.46)$$

В соответствии с выражением для $W_B^*(j\lambda)$ строится высокочастотная часть л. а. х., которая показана на рис. 24.8 пунктиром.

Построение фазовой характеристики делается аналогично изложенному выше.

Таким же способом строится высокочастотная часть л. а. х. при пересечении граничной частоты асимптотой 60 *дб/дек*, 80 *дб/дек* и т. д. Во всех случаях формирование высокочастотной части делается по сумме малых постоянных времени, которым соответствуют сопрягающие частоты, находящиеся правее граничной частоты $\omega_r = 2/T$.

Пример. Произведем расчет следящей системы с астатизмом второго порядка при следующих исходных данных:

- 1) максимальная входная скорость $\Omega_{\max} = 10$ *град/сек*;
- 2) максимальное входное ускорение $\varepsilon_{\max} = 5$ *град/сек²*;
- 3) максимальная допустимая ошибка $\theta_{\max} = 2$ *угл. мин.*;
- 4) непрерывная часть содержит постоянные времени $T_1 = 0,01$ *сек*, $T_2 = 0,002$ *сек* и $T_3 = 0,001$ *сек*;
- 5) допустимый показатель колебательности $M = 1,5$ и $M = 1,2$.

Требуется определить параметры непрерывной части системы и допустимый период повторения ЦВМ.

Решим задачу вначале для случая $T_1 = T_2 = T_3 = 0$ и $M = 1,5$.

Передаточная функция непрерывной части разомкнутой системы, структурно устойчивой в замкнутом состоянии, должна иметь вид

$$W_0(p) = \frac{K(1 + \tau_1 p)}{p^2},$$

где τ_1 — постоянная времени, вносимая корректирующим звеном дифференцирующего типа.

Так как высокочастотная часть после частоты среза в рассматриваемом идеализированном случае представляет собой прямую с наклоном 20 *дб/дек*, то вся частотная передаточная функция системы с ЦВМ может быть получена подстановкой $p = j\omega$, где ω — псевдочастота, и введением дополнительного множителя $(1 - j\omega T/2)$:

$$W_0(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega\tau_1) \left(1 - j\omega \frac{T}{2}\right)}{(j\omega)^2}.$$

Л. а. х. для нее построена на рис. 24.9, а.

На этом же рисунке построена запретная зона для л. а. х. на основании условий по точности и в соответствии с рис. 12.11. Базовая частота (12.76)

$$\omega_{0к} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\max}}{\theta_{\max}}} = \sqrt{\frac{5.60}{2}} = 12,2 \text{ сек}^{-1}.$$

Требуемое значение общего коэффициента усиления при совпадении первой асимптоты л. а. х. с границей запретной зоны (рис. 12.24)

$$K = \omega_0^2 = \omega_{0к}^2 = 150 \text{ сек}^{-2}.$$

В соответствии с расчетом, проделанным выше, для л. а. х., изображенной на рис. 12.14 и рис. 24.7, получаем требуемое значение постоянной времени

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{12,2} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,142 \text{ сек}.$$

Частота среза л. а. х.

$$\omega_{ср} = K\tau_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{M}{M-1}} = 12,2 \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 21,2 \text{ сек}^{-1}.$$

В соответствии с формулой (24.41) получаем далее

$$\frac{T}{2} \leq \frac{1}{\omega_{ср}} \frac{M}{M+1} = \frac{1}{21,2} \frac{1,5}{1,5+1} = 0,0284 \text{ сек},$$

откуда допустимый период дискретности $T \leq 0,0568 \text{ сек}$. В случае учета постоянных времени T_1 , T_2 и T_3 имеем

$$\frac{T}{2} \leq \frac{1}{\omega_{ср}} \frac{M}{M+1} - (T_1 + T_2 + T_3) = 0,0284 - 0,013 = 0,0154 \text{ сек}$$

и допустимый период дискретности $T \leq 0,0308 \text{ сек}$.

Аналогичные расчеты для случая $M = 1,2$ дают $\tau_1 = 0,2 \text{ сек}$, $\omega_{ср} = 30 \text{ сек}^{-1}$ и $T \leq 0,0368 \text{ сек}$ (при $T_1 = T_2 = T_3 = 0$) и $T \leq 0,026 \text{ сек}$ (при $T_1 \neq 0$, $T_2 \neq 0$ и $T_3 \neq 0$).

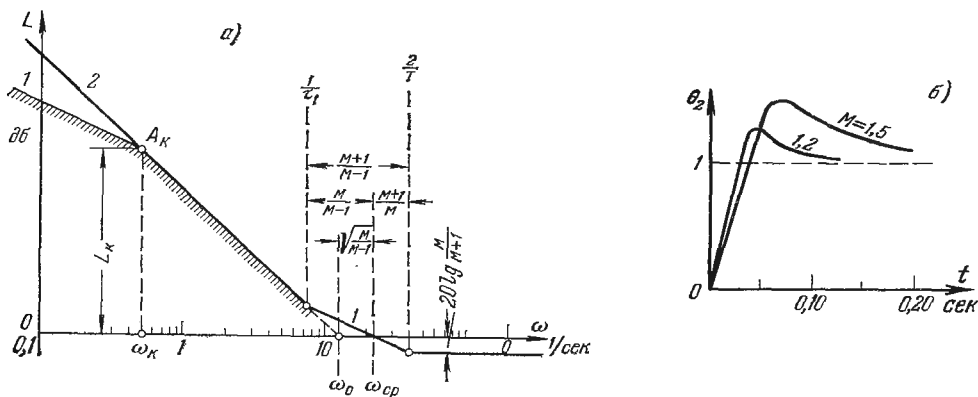


Рис. 24.9.

На рис. 24.9, б для иллюстрации построены переходные процессы при воздействии на входе в виде единичной ступенчатой функции. Переходные процессы построены посредством разложения в ряд Лорана z-преобразования выходной величины.

Таким образом, синтез следящих систем методом л. а. х. на основе частотных критериев качества (по точности и запасу устойчивости) оказывается применимым и для систем, содержащих в своем контуре ЦВМ. При этом все расчеты сохраняют свою простоту и наглядность.

Для расчета удобно применять абсолютную псевдочастоту, которая в области низких частот (левее частоты среза) совпадает с обычной угловой

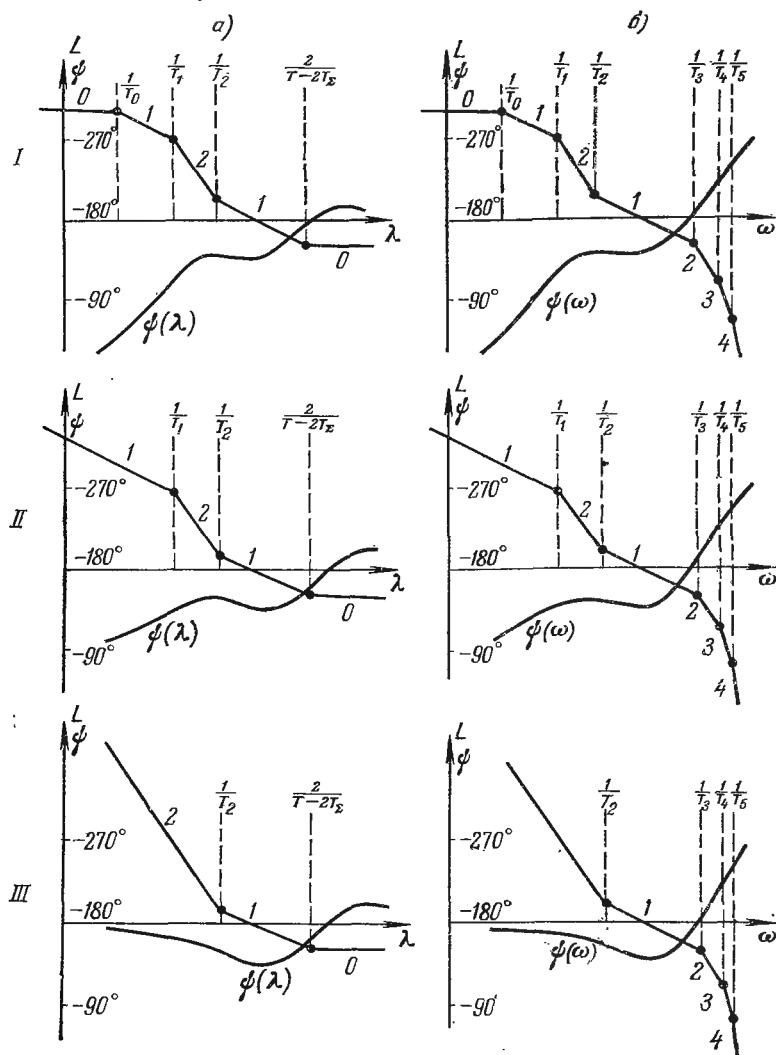


Рис. 24.10.

частотой ω . При этом в области высоких частот л. а. х. приходится строить по сумме малых постоянных времени. Влияние квантования по времени, вносимое ЦВМ, легко учитывается при построении только л. а. х., без необходимости рассмотрения фазовой характеристики.

Для облегчения процесса синтеза можно ввести понятие типовых л. а. х. систем регулирования с ЦВМ. На рис. 24.10, а приведены типовые л. а. х. для статической системы и астатической первого и второго порядков без учета временного запаздывания. На рис. 24.10, б изображены

соответствующие им л. а. х. непрерывной части, а в табл. 24.1 приведены передаточные функции.

Таблица 24.1

Типовые передаточные функции

Тип л. а. х.	Степень астатизма	Дискретная частотная передаточная функция	Передаточная функция непрерывной части
I	0	$\frac{K (1+j\lambda T_2) \left(1-j\lambda \frac{T}{2}\right)}{(1+j\lambda T_0) (1+j\lambda T_1) \left(1+j\lambda \frac{T}{2}\right)} \times$ $\times \left[1+j\lambda \left(\frac{T}{2}-T_\Sigma\right)\right]$	$K (1+T_2 p) \times$ $\times \{(1+T_0 p) (1+T_1 p) \times$ $\times (1+T_3 p) \dots (1+T_i p) \dots\}^{-1}$
II	1	$\frac{K(1+j\lambda T_2) \left(1-j\lambda \frac{T}{2}\right)}{j\lambda(1+j\lambda T_1) \left(1+j\lambda \frac{T}{2}\right)} \times$ $\times \left[1+j\lambda \left(\frac{T}{2}-T_\Sigma\right)\right]$	$K(1+T_2 p) \times$ $\times \{p(1+T_1 p) (1+T_3 p) \times$ $\times (1+T_4 p) \dots (1+T_i p) \dots\}^{-1}$
III	2	$\frac{K (1+j\lambda T_2) \left(1-j\lambda \frac{T}{2}\right)}{(j\lambda)^2 \left(1+j\lambda \frac{T}{2}\right)} \times$ $\times \left[1+j\lambda \left(\frac{T}{2}-T_\Sigma\right)\right]$	$K(1+T_2 p) \times$ $\times \{p^2(1+T_3 p) (1+T_4 p) \dots$ $\dots (1+T_i p) \dots\}^{-1}$
$T_\Sigma = \sum_{i=3}^n T_i = T_3 + T_4 + \dots + T_n$			

Синтез непрерывных корректирующих средств. При использовании для коррекции системы непрерывных средств возможно применение корректирующих средств трех основных видов: последовательных, параллельных и обратных связей (рис. 10.1). Наиболее просто производится расчет корректирующих средств последовательного типа. В этом случае дискретная передаточная функция разомкнутой системы должна равняться желаемой передаточной функции

$$W_{\text{ж}}(z) = W_{\text{пк}} W_0(z). \quad (24.47)$$

Здесь $W_{\text{пк}} W_0(z)$ представляет собой дискретную передаточную функцию последовательно включенных корректирующего звена с передаточной функцией $W_{\text{пк}}(p)$ и непрерывной части с передаточной функцией $W_0(p)$. Напомним, что $W_{\text{пк}} W_0(z) \neq W_{\text{пк}}(z) W_0(z)$. Поэтому расчет последовательных корректирующих средств в дискретных системах не является столь простой задачей, как в непрерывных системах.

Однако выше было показано, что л. а. х. дискретных систем, построенные в функции абсолютной псевдочастоты $\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$ для частот $\lambda < 2/T$ практически сливаются с л. а. х. непрерывной части. Поэтому можно воспользоваться известными приемами расчета последовательных корректирующих средств, если в качестве желаемых л. а. х. использовать характеристики, соответствующие передаточным функциям непрерывной части.

Требуемый вид последовательного корректирующего звена определяется в этом случае по виду л. а. х., полученной вычитанием ординат л. а. х. нескорректированной системы из ординат желаемой (типовой) л. а. х.

Рассмотрим иллюстративный пример [10].

Пример. Произведем расчет системы с астатизмом первого порядка по следующим исходным данным: максимальная скорость слежения $\Omega_{\max} = 20$ град/сек; максимальное ускорение слежения $\varepsilon_{\max} = 10$ град/сек²; максимальная допустимая ошибка $\theta_{\max} = 4$ угл. мин.; допустимый показатель колебательности $M = 1,5$; шаг выдачи данных ЦВМ (период дискретности) $T = 0,02$ сек; передаточная функция непрерывной части имеет вид

$$W_0(p) = \frac{K}{p(1+T_I p)(1+T_{II} p)(1+T_{III} p)},$$

где $T_I = 0,05$ сек, $T_{II} = 0,003$ сек, $T_{III} = 0,001$ сек.

Определим вид и параметры последовательного корректирующего звена, которое должно быть включено в непрерывную часть системы, а также необходимое значение общего коэффициента усиления K .

Левее частоты среза л. а. х. дискретной системы совпадает с л. а. х. ее непрерывной части, а псевдочастота λ — с реальной частотой ω . Поэтому формирование желаемой л. а. х. левее частоты среза произведем обычными приемами.

Построим запретную зону для л. а. х. из условий точности (рис. 24.11). Контрольная частота

$$\omega_K = \frac{\varepsilon_{\max}}{\Omega_{\max}} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ сек}^{-1}.$$

Модуль передаточной функции разомкнутой системы при $\omega = \omega_K$

$$\begin{aligned} |W_0(j\omega_K)| &= \frac{\Omega_{\max}^2}{\varepsilon_{\max} \theta_{\max}} = \\ &= \frac{20^2 \cdot 60}{10 \cdot 4} = 600 = 55,6 \text{ дб.} \end{aligned}$$

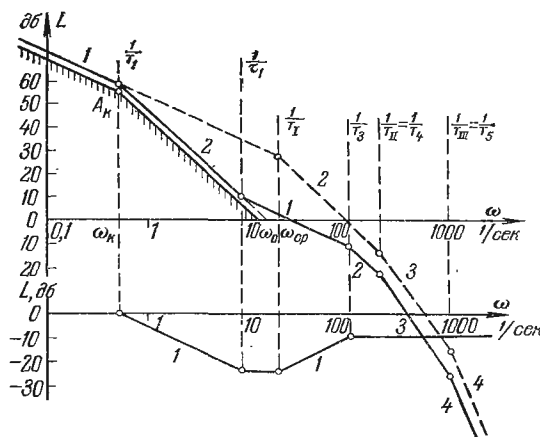


Рис. 24.11.

По этим данным на рис. 24.11 построены контрольная точка A_K и запретная зона, сформированная из прямых с наклоном 20 и 40 дб/дек (наклоны 1 и 2).

Желаемая л. а. х. в низкочастотной области формируется так, чтобы она проходила выше точки A_K на 3 дб (в линейном масштабе — $\sqrt{2}$). Она состоит из отрезков прямых с наклонами 1—2—1. В низкочастотной области частотная передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_0(j\omega) = \frac{K(1+j\omega\tau_1)}{j\omega(1+j\omega T_1)}.$$

Параметры желаемой л. а. х. и передаточной функции разомкнутой системы в низкочастотной области определим в следующем порядке.

Базовая частота л. а. х.

$$\omega_0 = \sqrt{\sqrt{2} \frac{\varepsilon_{\max}}{\theta_{\max}}} = \sqrt{1,41 \frac{10 \cdot 60}{4}} = 14,5 \text{ сек}^{-1}.$$

Постоянная времени корректирующего звена, формирующая первый излом л. а. х.,

$$T_1 = \frac{1}{\omega_k} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ сек.}$$

Для получения заданного показателя колебательности должно выдерживаться условие (формула 12.86)

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}}.$$

Отсюда получаем значение второй постоянной времени корректирующего звена:

$$\tau_1 = \frac{1}{14,5} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,12 \text{ сек.}$$

Далее определяем необходимое значение общего коэффициента усиления:

$$K = \sqrt{2} \frac{\Omega_{\max}}{\theta_{\max}} = 1,41 \frac{20 \cdot 60}{4} = 420 \text{ сек}^{-1}$$

и частоту среза л. а. х.:

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{K\tau_1}{T_1} = \frac{420 \cdot 0,12}{2} = 25,2 \text{ сек}^{-1}.$$

Для обеспечения заданного показателя колебательности в высокочастотной области должно удовлетворяться неравенство (24.41):

$$\frac{T}{2} + \sum_{i=3}^n T_i \leq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1},$$

где $\sum_{i=3}^n T_i = T_{\Sigma}$ — сумма постоянных времени меньших, чем $T/2$.

Отсюда получаем допустимое значение для суммы постоянных времени:

$$T_{\Sigma} \leq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1} - \frac{T}{2} = \frac{1}{25,2} \frac{1,5}{1,5+1} - \frac{0,02}{2} = 0,014 \text{ сек.}$$

На рис. 24.11 пунктиром построена л. а. х. непрерывной части нескорректированной системы, сплошной линией — желаемая (скорректированная) л. а. х. непрерывной части. В низкочастотной области (до частоты среза $\omega_{\text{ср}}$) она совпадает с л. а. х. дискретной системы (см. рис. 24.10, а; на рис. 24.11 л. а. х. дискретной системы не изображена). В области высоких частот вид желаемой л. а. х. непрерывной части, вообще говоря, может быть произвольным. Важно только, чтобы сумма постоянных времени T_{Σ} не превышала допустимого значения.

Наиболее простые корректирующие звенья получаются в тех случаях, когда сопрягающие частоты л. а. х. нескорректированной системы и желаемой л. а. х. совпадают между собой. В рассматриваемом примере

$$T_{\Sigma} = T_3 + T_4 + T_5.$$

Целесообразно принять

$$T_4 = T_{\text{II}} = 0,003 \text{ сек}, \quad T_5 = T_{\text{III}} = 0,001 \text{ сек.}$$

Тогда

$$T_3 = T_{\Sigma} - T_4 - T_5 = 0,014 - 0,003 - 0,001 = 0,01 \text{ сек.}$$

Вычитая из ординат желаемой л. а. х. ординаты характеристики нескорректированной системы, получим искомую л. а. х. последовательного кор-

ректирующего звена. Она соответствует интегро-дифференцирующему звену с передаточной функцией

$$W_{\text{ПК}}(p) = \frac{(1 + T_{2\text{К}}p)(1 + T_{3\text{К}}p)}{(1 + T_{1\text{К}}p)(1 + T_{4\text{К}}p)},$$

где

$$\begin{aligned} T_{1\text{К}} &= T_1 = 2 \text{ сек}, & T_{2\text{К}} &= \tau_1 = 0,12 \text{ сек}, \\ T_{3\text{К}} &= T_1 = 0,05 \text{ сек}, & T_{4\text{К}} &= T_3 = 0,01 \text{ сек}. \end{aligned}$$

Из приведенного примера видно, что при синтезе непрерывных последовательных корректирующих устройств метод логарифмических частотных характеристик не теряет своей простоты и наглядности.

Можно показать [131], что при наличии временного запаздывания допустимый период повторения ЦВМ должен быть снижен в соответствии с формулой

$$T \approx \frac{T^*}{1 + 2(k + \xi)}, \quad (24.48)$$

где T^* — допустимый период повторения, полученный в результате синтеза системы без учета запаздывания. Время запаздывания $\tau = (k + \xi) T$, где $k = 1, 2, 3, \dots$ и $0 < \xi < 1$.

Если время запаздывания τ соответствует целому числу периодов, то формула (24.48) становится точной:

$$T = \frac{T^*}{1 + 2k}. \quad (24.49)$$

§ 24.3. Дискретная коррекция

В общем случае передаточная функция ЦВМ (рис. 24.4) может быть сделана не равной единице: $D(z) \neq 1$. Пусть она представляет собой дробно-рациональное выражение вида

$$D(z) = \frac{X_1(z)}{X(z)} = \frac{b_k + b_{k-1}z + \dots + b_0z^k}{a_k + a_{k-1}z + \dots + a_0z^k}. \quad (24.50)$$

Здесь $X(z)$ и $X_1(z)$ — изображения решетчатых функций на входе и выходе ЦВМ.

Степень числителя (24.50) не может быть выше степени знаменателя. В формуле (24.50) взят предельный случай, когда они равны.

После деления числителя и знаменателя на z^k передаточная функция получится в другом виде:

$$D(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_kz^{-k}}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_kz^{-k}}. \quad (24.51)$$

Отсюда можно найти разностное уравнение, соответствующее алгоритму работы ЦВМ:

$$\begin{aligned} a_0x_1[n] + a_1x_1[n-1] + \dots + a_kx_1[n-k] = \\ = b_0x[n] + b_1x[n-1] + \dots + b_kx[n-k], \end{aligned} \quad (24.52)$$

где $x[n]$ и $x_1[n]$ — решетчатые функции на входе и выходе ЦВМ.

Резльтирующая передаточная функция разомкнутой системы будет

$$W(z) = D(z) W^0(z), \quad (24.53)$$

где $W^0(z)$ — передаточная функция разомкнутой системы при $D(z) = 1$, определенная в соответствии с § 24.1.

Дискретная коррекция может быть также реализована в системах управления без ЦВМ. В этом случае дискретные корректирующие средства реализуются на дискретных фильтрах, построенных на различных ячейках памяти.

Расчет дискретных корректирующих средств, т. е. определение желаемого вида передаточной функции $D(z)$, может производиться следующим образом. Пусть известна желаемая дискретная передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\text{ж}}(z) = \frac{\Phi_{\text{ж}}(z)}{1 - \Phi_{\text{ж}}(z)} = D(z) W^0(z), \quad (24.54)$$

где $\Phi_{\text{ж}}(z)$ — желаемая передаточная функция замкнутой системы, а $W^0(z)$ — передаточная функция исходной нескорректированной системы. Тогда исконая передаточная функция ЦВМ (или дискретного фильтра) будет

$$D(z) = \frac{W_{\text{ж}}(z)}{W^0(z)} = \frac{\Phi_{\text{ж}}(z)}{1 - \Phi_{\text{ж}}(z)} \cdot \frac{1}{W^0(z)}. \quad (24.55)$$

Формирование желаемой передаточной функции $\Phi_{\text{ж}}(z)$ должно производиться с учетом некоторых ограничений. Необходимо, чтобы передаточная функция $\Phi_{\text{ж}}(z)$ содержала в качестве нулей все те нули $W^0(z)$, модуль которых равен или больше единицы. Необходимо также, чтобы выражение $1 - \Phi_{\text{ж}}(z)$ содержало в качестве нулей все те полюсы $W^0(z)$, модуль которых равен или больше единицы.

Невыполнение этих условий вызывает нарушение требований к грубости системы и вызывает ее неустойчивость, так как приводит к неустойчивым линейным программам ЦВМ, которые должны реализовать получающуюся по формуле (24.55) передаточную функцию $D(z)$.

Кроме того, получающаяся дробно-рациональная передаточная функция $D(z)$ не должна иметь степень числителя выше, чем степень знаменателя, так как это приводит к необходимости знания будущего значения входного сигнала, что не может быть реализовано.

Вместо формулы (24.55) может применяться соотношение, связывающее дискретные частотные передаточные функции

$$W_{\text{пк}}^*(j\lambda) = \frac{W_{\text{ж}}^*(j\lambda)}{W^*(j\lambda)} \quad (24.56)$$

или соответствующие им логарифмические частотные характеристики

$$L_{\text{пк}}(\lambda) = L_{\text{ж}}(\lambda) - L(\lambda). \quad (24.57)$$

После определения $W_{\text{пк}}^*(j\lambda)$ подстановкой $j\lambda = 2\omega T^{-1}$ можно получить передаточную функцию $W_{\text{пк}}^*(\omega)$, а затем путем перехода от ω -преобразования к z -преобразованию — передаточную функцию $W_{\text{пк}}(z) = D(z)$.

Сформулированные выше ограничения по отношению к выражению (24.56) имеют следующий вид. Необходимо, чтобы передаточная функция $W_{\text{ж}}^*(j\lambda)$ содержала в качестве своих нулей и полюсов по переменной $x = j\lambda$ все те нули и полюсы передаточной функции $W^*(j\lambda)$, которые лежат в правой полуплоскости. Кроме того, необходимо, чтобы получающаяся дробно-рациональная функция $W_{\text{пк}}^*(j\lambda)$ имела степень числителя не больше, чем степень знаменателя.

Поясним сказанное примером. Пусть в цифровой системе с экстраполятором нулевого порядка передаточная функция непрерывной части

$$W_0(p) = \frac{K}{p^2}$$

соответствует интегрирующему звену второго порядка. Тогда без коррекции

имеем

$$W^0(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K}{p^3} \right\} = \frac{KT^2(z+1)}{2(z-1)^2}.$$

Далее можно получить частотную передаточную функцию

$$W^*(j\lambda) = \frac{K \left(1 - j\lambda \frac{T}{2} \right)}{(j\lambda)^2}.$$

Соответствующая ей л. а. х. L построена на рис. 24.12. Если принять в качестве желаемой л. а. х. L_1 , то желаемая частотная передаточная функция

$$W_1^*(j\lambda) = \frac{K(1+j\lambda T_2) \left(1 - j\lambda \frac{T}{2} \right)}{(j\lambda)^2} \quad (24.58)$$

Она совпадает с типовой передаточной функцией (табл. 24.1), если положить $T_i = 0$, где $i = 1, 2, \dots, n$.

Дискретная частотная передаточная функция требуемого корректирующего звена последовательного типа

$$W_{\text{пк}}^*(j\lambda) = \frac{W_1^*(j\lambda)}{W^*(j\lambda)} = 1 + j\lambda T_2. \quad (24.59)$$

Переход к передаточной функции ЦВМ дает

$$W_{\text{пк}}(z) = D(z) = \frac{\left(1 + \frac{2T_2}{T} \right) z + \left(1 - \frac{2T_2}{T} \right)}{z + 1}. \quad (24.60)$$

Последнее выражение определяет неустойчивую программу, так как полюс передаточной функции $z_1 = -1$ соответствует колебательной границе устойчивости.

Заметим, что получившаяся частотная передаточная функция корректирующего устройства (24.59) не может быть реализована, вообще говоря, и в непрерывном варианте. Эта функция соответствует бесконечному подъему усиления при росте частоты до бесконечности. При реализации в дискретном варианте эта функция приводит к неустойчивой программе ЦВМ.

Для исключения этого явления примем желаемую л. а. х. L_2 в другом виде (рис. 24.12). Желаемая передаточная функция

$$W_2^*(j\lambda) = \frac{K(1+j\lambda T_2) \left(1 - j\lambda \frac{T}{2} \right)}{(j\lambda)^2 \left(1 + j\lambda \frac{T}{2} \right)}. \quad (24.61)$$

Передаточная функция корректирующего устройства в этом случае имеет вид

$$W_{\text{пк}}^*(j\lambda) = \frac{W_2^*(j\lambda)}{W^*(j\lambda)} = \frac{1 + j\lambda T_2}{1 + j\lambda \frac{T}{2}}. \quad (24.62)$$

Переход к передаточной функции ЦВМ дает

$$D(z) = \frac{\left(1 + \frac{2T_2}{T} \right) z + 1 - \frac{2T_2}{T}}{2z}. \quad (24.63)$$

Этой передаточной функции соответствует устойчивая программа ЦВМ.

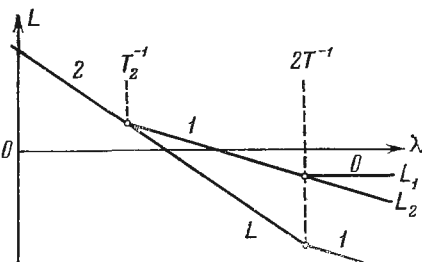


Рис. 24.12.

Для рассмотренного примера произведем числовой расчет. Пусть по условиям точности $K = 100 \text{ сек}^{-2}$, а показатель колебательности $M = 1,5$. Дальнейший расчет произведем в соответствии с формулами § 12.6. Базовая частота л. а. х.

$$\lambda_0 = \sqrt{K} = \sqrt{100} = 10 \text{ сек}^{-1}.$$

Требуемое значение постоянной времени равно

$$T_2 = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,173 \text{ сек}.$$

Допустимое значение суммы малых постоянных времени для передаточной функции (24.61) равно периоду дискретности:

$$\frac{T}{2} + \frac{T}{2} = T \leq \frac{1}{\lambda_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1} = \frac{1}{10} \cdot \frac{\sqrt{1,5(1,5-1)}}{1,5+1} = 0,0346 \text{ сек}.$$

Примем период дискретности $T = 0,0346 \text{ сек}$. Передаточная функция ЦВМ (24.63) имеет вид

$$D(z) = \frac{\left(1 + \frac{2 \cdot 0,173}{0,0346}\right) z + 1 - \frac{2 \cdot 0,173}{0,0346}}{2z} = 5,5(1 - 0,82z^{-1}).$$

В табл. 24.2 приведены некоторые простейшие дискретные корректирующие средства, которые могут реализоваться на ЦВМ или дискретных фильтрах. В табл. 24.2 даны также их параметры и значения модуля частотной передаточной функции G_0 на нулевой псевдочастоте и G_∞ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Комбинированное регулирование. В цифровых системах возможно использование комбинированного регулирования по задающему или возмущающему воздействиям. При выполнении заданных условий по точности

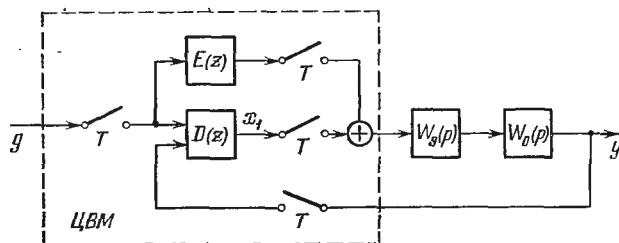


Рис. 24.13.

комбинированное регулирование позволяет снизить требования к основному каналу.

Комбинированное регулирование особенно удобно применять в тех случаях, когда задающее воздействие вычисляется в управляющей ЦВМ. В этом случае на ЦВМ может быть также возложена задача вычисления производных этого воздействия, что позволяет просто реализовать схемы комбинированного регулирования, аналогичные рассмотренным в § 9.2. Подобное положение возникает, например, при слежении телескопов за планетами, при управлении по числимым координатам и т. п.

Структурная схема системы комбинированного регулирования для случая использования дополнительного канала с передаточной функцией $E(z)$ по задающему воздействию изображена на рис. 24.13.

Наименование звена	Передаточная функция непрерывного аналога $W_0(p)$	Дискретная передаточная функция $D(z)$	Частотная передаточная функция $W^*(j\lambda)$ и параметры
1	2	3	4
Дифференцирующее	$1 + T_1 p$	$\frac{1}{1-a} \cdot \frac{z-a}{z}, 0 < a < 1$	$\frac{1+j\lambda\tau}{1+j\lambda\frac{T}{2}}, \tau = \frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{T}{2}, G_0=1, G_\infty = \frac{1+a}{1-a}$
Пассивное дифференцирующее с компенсацией подавления усиления	$\frac{1+T_1 p}{1+T_2 p}, T_1 > T_2$	$\frac{1-b}{1-a} \cdot \frac{z-a}{z-b}, 0 < a < 1, 0 < b < 1, a > b$	$\frac{1+j\lambda\tau_1}{1+j\lambda\tau_2}, \tau_1 = \frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{T}{2}, \tau_2 = \frac{1+b}{1-b} \cdot \frac{T}{2}, G_0=1, G_\infty = \frac{(1+a)(1-b)}{(1-a)(1+b)}$
Интегрирующее	$\frac{k}{p} = \frac{1}{T_1 p}$	$\frac{a}{z-1}$	$\frac{a}{T} \cdot \frac{1-j\lambda\frac{T}{2}}{j\lambda}, G_0 \rightarrow \infty, G_\infty = \frac{a}{2}$
		$\frac{a(z+1)}{z-1}$	$\frac{2a}{T} \cdot \frac{1}{j\lambda}, G_0 \rightarrow \infty, G_\infty = 0$
Изодромное	$1 + \frac{1}{T_1 p} = \frac{1+T_1 p}{T_1 p}$	$1 + \frac{a}{z-1}$	$\frac{a}{T} \frac{1+j\lambda\tau}{j\lambda}, \tau = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right) T, G_0 \rightarrow \infty, G_\infty = \left 1 - \frac{a}{2}\right $
Пассивное интегрирующее	$\frac{1+T_2 p}{1+T_1 p}, T_1 > T_2$	$\frac{(1+a)z+1-a}{(1+b)z+1-b}, a > 1, b > 1, a < b$	$\frac{1+j\lambda\tau_2}{1+j\lambda\tau_1}, \tau_1 = \frac{bT}{2}, \tau_2 = \frac{aT}{2}, G_0=1, G_\infty = \frac{a}{b}$
Интегро-дифференцирующее	$1 + \frac{1}{T_1 p} + \tau p$	$1 + \frac{a(z+1)}{z-1} + \frac{b(z-1)}{z}, 0 < a < 1$	$\frac{2a}{T} \cdot \frac{1+j\lambda\frac{1+a}{a} \cdot \frac{T}{2} + (j\lambda)^2 \cdot \frac{1+2b}{a} \cdot \frac{T^2}{4}}{j\lambda \left(1+j\lambda\frac{T}{2}\right)}, G_0 \rightarrow \infty, G_\infty = 1+2b$

Эквивалентная передаточная функция замкнутой системы с учетом дополнительного канала

$$\Phi_0(z) = \frac{W^0(z) [D(z) + E(z)]}{1 + D(z) W^0(z)} = \frac{W(z) \left[1 + \frac{E(z)}{D(z)} \right]}{1 + W(z)} = \frac{W_0(z)}{1 + W_0(z)}, \quad (24.64)$$

где $W(z) = D(z) W^0(z)$ — передаточная функция разомкнутой системы, $W_0(z)$ — эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы.

Эквивалентная передаточная функция по ошибке

$$\Phi_{0x}(z) = 1 - \Phi_0(z) = \frac{1 - E(z) W^0(z)}{1 + W(z)}. \quad (24.65)$$

Эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы

$$W_0(z) = \frac{\Phi_0(z)}{1 - \Phi_0(z)} = \frac{W^0(z) [D(z) + E(z)]}{1 - E(z) W^0(z)}. \quad (24.66)$$

Из формулы (24.65), если положить $\Phi_{0x}(z) = 0$, можно получить условие полной инвариантности

$$E(z) = \frac{1}{W^0(z)} = \frac{E_1(z)}{E_2(z)}. \quad (24.67)$$

Для большинства реальных систем степень числителя $W^0(z)$ оказывается меньше степени знаменателя на единицу. Поэтому степень полинома $E_1(z)$ будет на единицу больше степени полинома $E_2(z)$ и формула (24.67) может быть приведена к виду

$$E(z) = cz + \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_k z^{-k}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_k z^{-k}}. \quad (24.68)$$

Слагаемое $cz = ce^{pT}$ означает, что при формировании сигнала по каналу с передаточной функцией $E(z)$ необходимо использовать упрежденное на один такт значение задающего воздействия. Это связано с необходимостью применения прямых разностей, которые в дискретном плане должны здесь заменить процесс дифференцирования (см. § 15.1). При этом возможны следующие ситуации.

1. Если ЦВМ вычисляет значение задающей величины по некоторым заложенным в нее данным и использует при этом прогнозирование (например, при вычислении текущих координат небесных тел, спутников, ракет и др.), то вычисление будущего значения интересующей величины может быть легко сделано со сдвигом на практически любое число тактов. В этом случае реализация формулы (24.68) в принципе возможна. Однако практические трудности в реализации слишком сложных алгоритмов и ограничения в элементах не дают возможности получить полную инвариантность.

2. Если ЦВМ вычисляет задающую величину не по принципу прогнозирования, а в результате обработки поступающей текущей информации, то точная реализация формулы (24.68) оказывается невозможной. Тогда приходится ограничиться приближенной реализацией формулы (24.67) либо вводить в прямой канал дополнительное запаздывание на один такт. В первом случае условие полной инвариантности (24.67) нарушается, во втором — вводится постоянное временное запаздывание на один такт в обратную связь воздействия, что также нарушает условие инвариантности.

Таким образом, при использовании комбинированного регулирования приходится ориентироваться не на полную инвариантность, а на некоторое, во многих случаях весьма существенное, повышение точности.

Поскольку точность систем регулирования определяется низкочастотной частью л. а. х., а низкочастотная часть л. а. х. дискретных систем

практически сливается с л. а. х. непрерывной части системы, то расчет дискретных систем комбинированного регулирования осуществляется аналогично непрерывному случаю [40].

Важнейшим следствием использования комбинированного регулирования является возможность снижения требований к ЦВМ в части ограничения периода дискретности. Это связано с понижением требований к каналу регулирования по отклонению при введении дополнительного канала с передаточной функцией $E(z)$.

Пониженные требования к точности воспроизведения в канале регулирования по отклонению позволяют перейти к желаемым л. а. х. с меньшим значением частоты среза. Это дает возможность увеличить период дискретности T при сохранении необходимого запаса устойчивости.

§ 24.4. Периодические режимы, обусловленные квантованием по уровню

Более полная по сравнению с рис. 24.4 структурная схема системы регулирования с ЦВМ изображена на рис. 24.14. Здесь добавлены преобразователи непрерывной величины в дискретную ($H-D$) и дискретной в непрерывную ($D-H$). Преобразователи представляют собой нелинейные элементы.

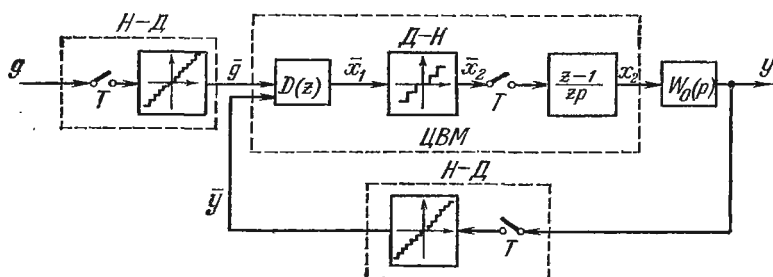


Рис. 24.14.

В преобразователях $H-D$ число разрядов обычно велико (10—20). В преобразователях $D-H$ число разрядов бывает меньше и может даже составлять единицу.

На рис. 24.15 изображены статические характеристики преобразователей. На рис. 24.15, а показана статическая характеристика входного преобразователя для задающего воздействия. По оси абсцисс отложено непрерывное значение g , а по оси ординат — цифровое представление $\bar{g}$. Величина единицы младшего разряда обозначена δ_1 . Коэффициент передачи для линеаризованной характеристики

$$k_1 = \frac{1}{\delta_1}. \quad (24.69)$$

Число отличных от нуля уровней рассматриваемой характеристики, если α_1 — число двоичных разрядов (без учета знакового разряда), будет

$$\mu_1 = 2^{\alpha_1} - 1. \quad (24.70)$$

На рис. 24.15, б изображена статическая характеристика входного преобразователя для регулируемой величины. Символом y обозначено непрерывное ее значение, а $\bar{y}$ — цифровое представление.

Крутизна линеаризованной характеристики

$$k_2 = \frac{1}{\delta_2}, \quad (24.71)$$

где δ_2 — цена младшего разряда. Число отличных от нуля уровней характеристики, если α_2 — число двоичных разрядов преобразователя, будет

$$\mu_2 = 2^{\alpha_2} - 1. \quad (24.72)$$

Обычно $\delta_1 = \delta_2$, $k_1 = k_2$ и $\mu_1 = \mu_2$.

Объединенная статическая характеристика входного преобразователя для канала ошибки показана на рис. 24.15, а. По оси абсцисс отложена

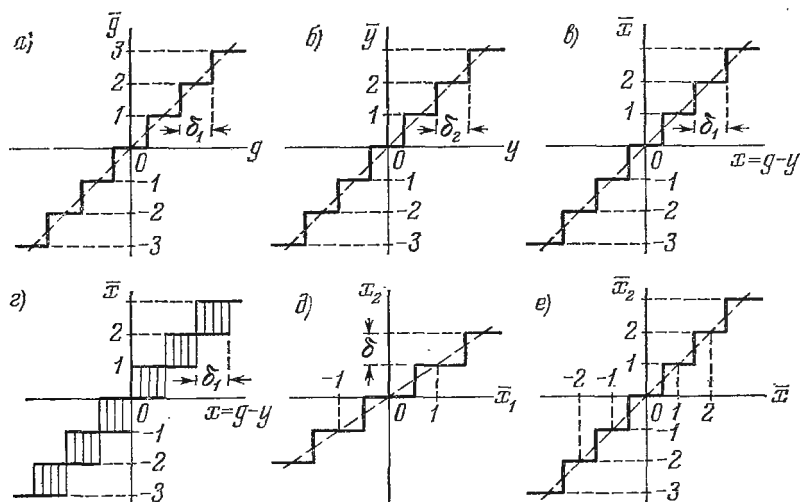


Рис. 24.15.

ошибка $x = g - y$, а по оси ординат — ее цифровое представление $\bar{x}$. Характеристика справедлива для случая, когда задающее воздействие $g = m\delta_1 = \text{const}$, где m — целое число, либо $y = m\delta_1 = \text{const}$. Первый случай рассматривается обычно при исследовании периодических режимов, вызванных квантованием по уровню.

В общем случае статическая зависимость $\bar{x} = f(x)$ определяет область расположения характеристик, которая показана на рис. 24.15, г. Характеристика, изображенная на рис. 24.15, е, представляет собой, по сути, некоторую среднюю характеристику этой области.

На рис. 24.15, д изображена статическая характеристика выходного преобразователя. По оси абсцисс отложена выходная величина ЦВМ в виде цифры $\bar{x}_1$, а по оси ординат x_2 — выходная величина преобразователя D — H совместно с экстраполятором. Обычно эта величина представляет собой электрическое напряжение или ток. Единица младшего разряда для выходной величины x_2 обозначена δ .

Крутизна линейризованной характеристики будет здесь $k = \delta$. Если $D(z) \equiv 1$ или $\lim_{z \rightarrow 1} D(z) = 1$ (в установившемся режиме), то общий линейризованный коэффициент передачи ЦВМ совместно с входным и выходным преобразователями будет

$$k_H = k_1 k_2 = \frac{\delta}{\delta_1}. \quad (24.73)$$

Для этого случая на рис. 24.15, е изображена результирующая статическая характеристика ЦВМ совместно с преобразователями в относительном (цифровом) виде, т. е. $\bar{x}_2 = f(\bar{x}_1)$.

Если число двоичных разрядов выходного преобразователя α , то общее число отличных от нуля уровней статической характеристики будет

$$\mu = 2^\alpha - 1. \quad (24.74)$$

На рис. 24.16 изображены статические характеристики при $\alpha = 1, 2$ и 3 для случая, когда максимальное значение выходной величины одно и то же.

Наличие рассмотренных нелинейностей в ЦВМ может вызвать периодические режимы в системе регулирования. В случае их устойчивости получаются автоколебания. Однако термин «автоколебания» здесь несколько

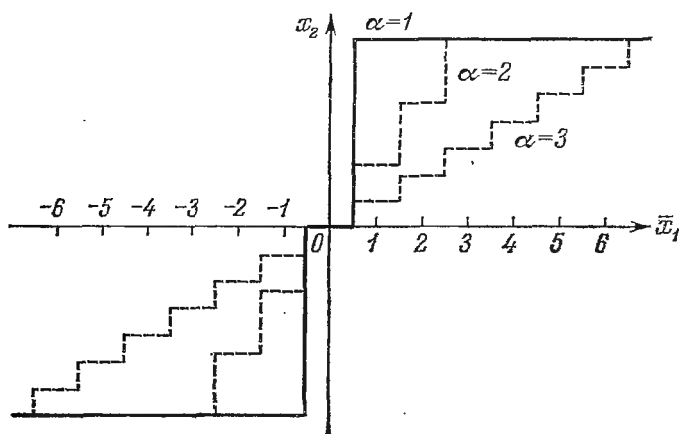


Рис. 24.16.

условен, так как частота периодических режимов жестко связана с частотой выдачи данных ЦВМ.

При исследовании периодических режимов, вызванных квантованием по уровню [137], можно воспользоваться методом гармонической линеаризации, изложенным в главе 18.

Однако следует сделать предварительные замечания. Если $D(z) \equiv 1$, то статические характеристики входного и выходного преобразователей могут быть объединены в одну (рис. 24.15, е). Тогда получается система с одним нелинейным звеном, которая может быть исследована достаточно просто.

Если $D(z) \neq 1$ в том смысле, что в ЦВМ вводится некоторая корректирующая программа (см. § 24.3), то получаются, вообще говоря, два нелинейных звена, разделенных линейными фильтрами. Исследование подобных систем оказывается более сложным.

Однако при наличии корректирующей программы $D(z) \neq 1$ можно выделить частный случай, когда при поступлении на вход ЦВМ целого числа x на выходе ее будет также неокругляемое целое число x_1 . В этом случае выходная величина ЦВМ будет точно попадать на линеаризованную характеристику (рис. 24.15, д), что эквивалентно исчезновению влияния одной нелинейности в пределах отсутствия насыщения выходного преобразователя.

Примером такой корректирующей программы ЦВМ может служить приведенная в табл. 24.2 передаточная функция

$$D(z) = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{z-a}{z} = A - Bz^{-1}.$$

Если A и B — целые числа, а $A - B = 1$, то сформулированное выше условие будет выполняться.

В дальнейшем изложении будет рассматриваться только случай, когда две нелинейности сводятся к одной, отнесенной ко входу ЦВМ.

Рассмотрим условия существования периодических режимов в системе регулирования с ЦВМ. Согласно методу гармонической линеаризации приближенное уравнение периодического режима можно представить в виде

$$1 + q^* W = 0. \quad (24.75)$$

где q^* — коэффициент гармонической линеаризации нелинейного элемента (входного устройства ЦВМ) по первой гармонике при учете квантования по времени в нормированном (безразмерном) виде, $W = DW^0$ — дискретная частотная передаточная функция линейной части системы в разомкнутом состоянии.

В уравнении (24.75) предполагается, что коэффициент передачи входного устройства присоединен к линейной части и рассматривается нелинейность единичного вида (см. рис. 24.15, е).

В отличие от коэффициентов гармонической линеаризации непрерывных систем (см. главу 18), коэффициент q^* зависит не только от амплитуды на входе нелинейного элемента a_1 , но и от фазы входного воздействия φ_1 и частоты воздействия $\bar{\omega} = \omega T = \frac{\pi}{N}$, где $N = T_1/2T$ — относительный полупериод. Таким образом, $q^* = q^*(a_1, \varphi_1, N)$. В результате уравнение периодического режима (24.75) приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} 1 + q^*(a_1, \varphi_1, N) W\left(j \frac{\pi}{N}\right) &= 0 \\ \text{или} \quad W\left(j \frac{\pi}{N}\right) &= -\frac{1}{q^*(a_1, \varphi_1, N)} = -Z^*(a_1, \varphi_1, N). \end{aligned} \right\} \quad (24.76)$$

Частота периодического режима Ω находится в целочисленном соотношении с частотой выдачи данных ЦВМ $2\pi/T$. Таким образом, все возможные частоты периодических режимов заранее известны.

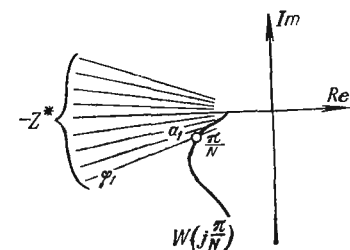


Рис. 24.17.

Определение периодических режимов можно производить несколькими способами.

Возможно совместное рассмотрение годографа дискретной частотной передаточной функции линейной части $W(j\pi/N)$ и графиков $-Z^*(a_1, \varphi_1, N)$, что показано на рис. 24.17. Точка пересечения при $\pi/N = \Omega T$ (для данного N) указывает амплитуду a_1 и фазу φ_1 периодического режима. Можно пользоваться и обратными характеристиками.

Возможно использование кривых Михайлова. Для этого целесообразно представить коэффициент гармонической линеаризации в виде

$$q^*(a_1, \varphi_1, N) = q(a_1, \varphi_1, N) + jq'(a_1, \varphi_1, N). \quad (24.77)$$

Уравнение характеристической кривой будет

$$D^*\left(j \frac{\pi}{N}, a_1, \varphi_1\right) = Q\left(j \frac{\pi}{N}\right) + R\left(j \frac{\pi}{N}\right) [q(a_1, \varphi_1, N) + jq'(a_1, \varphi_1, N)]. \quad (24.78)$$

Выделим в выражении (24.78) вещественную и мнимую части:

$$D^*\left(j \frac{\pi}{N}, a_1, \varphi_1\right) = X^* + jY^*, \quad (24.79)$$

где коэффициенты X^* и Y^* зависят от a_1 , φ_1 и N .

Условию существования периодических режимов соответствуют

$$\left. \begin{aligned} X^*(a_1, \varphi_1, N) &= 0, \\ Y^*(a_1, \varphi_1, N) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24.80)$$

Поскольку возможные частоты периодических режимов находятся в целочисленном отношении с частотой выдачи данных ЦВМ, то уравнения (24.80) позволяют отыскивать амплитуду a_1 и фазу φ_1 .

Рассмотрим порядок определения коэффициентов гармонической линеаризации для нелинейной зависимости $x_2 = f(x_1)$.

Пусть ко входу нелинейного элемента с симметричной характеристикой приложено гармоническое воздействие, заданное своими дискретными значениями:

$$x_1[n] = a_1 \cos\left(\frac{\pi}{N}n + \varphi_1\right) = \frac{a_1}{2} \left[e^{j\frac{\pi}{N}n} + e^{-j\frac{\pi}{N}n} \right]. \quad (24.81)$$

Тогда на его выходе получим сигнал

$$x_2[n] = f(x_1[n]) = \frac{1}{2} \sum_{k=-l}^l \dot{b}_k e^{jk\frac{\pi}{N}n}, \quad (24.82)$$

где $k = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm l$, причем $l = N$, если N нечетно, и $l = N - 1$, если N четно.

Коэффициенты этого тригонометрического полинома выражаются формулой Бесселя [114] (см. также § 15.2)

$$\dot{b}_k = b_k e^{j\psi_k} = \frac{2}{N} \sum_{v=0}^{N-1} f(x_1[v]) e^{-j\frac{k\pi}{N}v}. \quad (24.83)$$

Если N нечетно, то при $k = N$

$$\dot{b}_N = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} f(x_1[v]) e^{-j\pi v}. \quad (24.84)$$

Далее, как это следует из метода гармонической линеаризации, нужно ограничиться в (24.82) учетом лишь первой гармоники, т. е. использовать гипотезу фильтра. Для системы регулирования с ЦВМ определение периодических режимов при $N = 1$ и $N = 2$ может быть произведено точно. Из (24.82) следует:

для $N = 1$

$$x_2[n] = b_1 \cos(\pi n), \quad (24.85)$$

где $b_1 = f(a_1 \cos \varphi_1)$;

для $N = 2$

$$x_2[n] = b_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}n + \psi_1\right). \quad (24.86)$$

Комплексная амплитуда

$$\dot{b}_1 = b_1 e^{j\psi_1} = f(a_1 \cos \varphi_1) - f(a_1 \cos \varphi_1) e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

При $N \geq 3$ определим приближенное значение $x_2[n]$, учитывая только первую гармонику:

$$x_2[n] \approx b_1 \cos\left(\frac{\pi}{N}n + \psi_1\right). \quad (24.87)$$

Комплексная амплитуда

$$\dot{b}_1 = b_1 e^{j\psi_1} = \frac{2}{N} \sum_{v=1}^{N-1} f(x_1[n]) e^{j\frac{\pi}{N}v}.$$

Отношение $x_2[n]$ к $x_1[n]$ в комплексной форме дает выражение для коэффициента гармонической линейизации:

$$\begin{aligned} q^*(a_1, \varphi_1, N) &= \frac{b_1}{a_1} = \frac{1}{a_1 e^{j\psi_1}} \cdot \frac{2}{N} \sum_{v=1}^{N-1} f\left[a_1 \cos\left(\frac{\pi}{N}v + \varphi_1\right)\right] e^{-j\frac{\pi}{N}v} = \\ &= \frac{2}{a_1 N} \sum_{v=1}^{N-1} f\left[a_1 \cos\left(\frac{\pi}{N}v + \varphi_1\right)\right] e^{-j\left(\frac{\pi}{N}v + \varphi_1\right)}. \end{aligned} \quad (24.88)$$

Сложная зависимость коэффициентов гармонической линейизации не только от амплитуды a_1 , но и от сдвига фаз φ_1 , а также относительного полупериода N приводит к значительной трудоемкости определения периодических режимов в системе регулирования с ЦВМ. Дополнительные осложнения возникают при попытке определить устойчивость периодических режимов. Однако при постановке задачи синтеза обычно не ставится вопрос об отыскании периодических режимов. Наоборот, может быть поставлена задача так синтезировать систему регулирования с ЦВМ, чтобы исключить возможность возникновения периодических режимов в согласованном положении системы регулирования при $|x_{уст}| < 0,5 \delta_1$, где δ_1 — цена младшего разряда входного преобразователя.

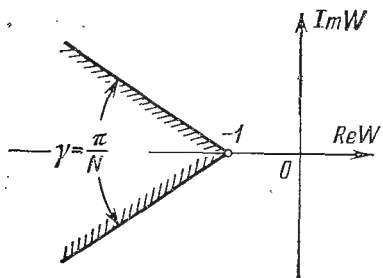


Рис. 24.18.

Рассмотрим, каким образом необходимо учитывать квантование по уровню, если синтез системы регулирования вести на базе типовых желаемых л. а. х. При этом наибольший интерес представляет случай одноразрядного выходного преобразователя, которому соответствует максимальное отклонение характеристики преобразователя от линейной зависимости.

Если ограничиться случаем невозможности возникновения периодических режимов (рис. 24.17), то вместо годографа величины $-Z^*(a_1, \varphi_1, N)$ необходимо построить огибающую области, где расположены все возможные кривые $-Z^*$ при различных значениях $N = \text{const}$, $\varphi_1 = \text{const}$ и $a_1 = \text{var}$.

В результате построения можно показать [131], что запретной областью для годографа величины $W(j\frac{\pi}{N})$ с некоторым запасом является сектор (рис. 24.18) с углом раствора $\gamma = \pi/N$, вне зависимости от принятого числа разрядов рассматриваемой нелинейной характеристики.

Периодические режимы в системе будут невозможны, если амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы, построенная по функции $W(j\frac{\pi}{N})$, на фиксированных относительных частотах $\bar{\omega} = \pi/N$ (абсолютная частота $\omega = \pi/NT$) не будет заходить в запретную область.

При достаточно больших значениях относительного полупериода N , т. е. при малых частотах, $q^*(a_1, \varphi_1, N) \rightarrow q(a_1)$ и годограф нелинейной части стремится к годографу соответствующей нелинейности в непрерывной системе регулирования.

Для отыскания условий невозможности появления периодических режимов в согласованном положении [131] обратимся к типовым л. а. х. (рис. 24.10). Эти л. а. х. построены на рис. 24.19. Там же нанесены запретные области для фазовых характеристик аналогично тому, как это было сделано на рис. 8.30. Запретные зоны построены симметрично относительно фазового сдвига

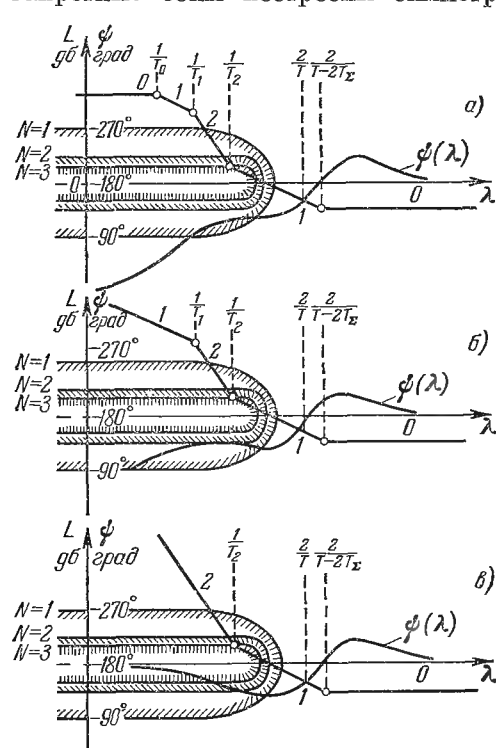


Рис. 24.19.

$\psi = -180^\circ$. Высота запретных зон в угловой мере связана с частотой искомых периодических решений $\Omega = \pi/NT$. При $N = 1$ высота запретной зоны равна 180° , при $N = 2$ равна 90° , при $N = 3$ равна 60° и т.д.

Для исключения периодических режимов фазовая характеристика $\psi(\lambda)$ на фиксированных частотах

$$\lambda_\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\Omega T}{2} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2N} \quad (24.89)$$

не должна заходить в запретные зоны, построенные для этого же значения

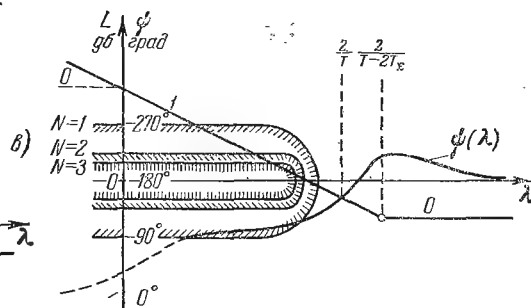


Рис. 24.20.

$N = \text{const.}$ Если фазовая характеристика на фиксированной частоте (24.89) будет находиться в запретной зоне, соответствующей тому же значению N , то возможно существование периодического режима с частотой $\Omega = \pi/NT$.

Рассмотрим вначале л. а. х. «несимметричного» вида (рис. 24.20), которой соответствует передаточная функция непрерывной части

$$W_0(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p) \dots (1+T_np)} \quad (24.90)$$

Соответствующая дискретная частотная передаточная функция имеет вид

$$W^*(j\lambda) = \frac{K \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[1 + j\lambda \left(\frac{T}{2} - T_\Sigma\right)\right]}{j\lambda \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)}, \quad (24.91)$$

где $T_\Sigma = \sum_{i=1}^n T_i$.

Сопоставление фазовой характеристики $\psi(\lambda)$ и запретных зон (рис. 24.20) показывает, что периодические режимы при рассматриваемых типах нелинейностей невозможны, если общий коэффициент усиления разомкнутой цепи

с учетом коэффициента усиления нелинейной части выбран на основании формул (24.42) и (24.43):

$$K \leq \frac{1}{\frac{T}{2} + T_{\Sigma}} \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2}, \quad (24.92)$$

$$K \leq \frac{2}{T} \cdot \frac{M}{M+1}, \quad (24.93)$$

где M — допустимое значение показателя колебательности.

Получим теперь условие отсутствия периодических режимов для типовых л. а. х., изображенных на рис. 24.19. Рассмотрим наиболее тяжелый случай системы с астатизмом второго порядка (рис. 24.19, в). Для доказательства определим условие, при котором фазовая характеристика не будет заходить в соответствующие запретные зоны на фиксированных частотах (24.89). Запишем это условие следующим образом:

$$-\pi + \frac{\pi}{2N} \leq \psi(\lambda), \quad (24.94)$$

где

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2N} = \lambda_{\Omega}.$$

Формулу (24.94) можно представить в следующем виде:

$$-\pi + \frac{\pi}{2N} \leq -\pi + \operatorname{arctg} \lambda_{\Omega} \cdot T_2 - 2 \operatorname{arctg} \lambda_{\Omega} \cdot \frac{T}{2} + \operatorname{arctg} \lambda_{\Omega} \cdot \left(\frac{T}{2} - T_{\Sigma} \right). \quad (24.95)$$

Для частот, лежащих левее частоты среза ($N = 3, 4, 5, \dots$), формулу (24.95) с достаточной точностью можно привести к виду

$$\frac{\pi}{2N} \leq \operatorname{arctg} \frac{2T_2}{T} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2N} - \frac{\pi}{N} \quad (24.96)$$

или

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{N} \leq \operatorname{arctg} \frac{2T_2}{T} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2N}. \quad (24.97)$$

Учитывая, что $N \geq 3$, и используя (24.24), получим из (24.97) простое условие отсутствия периодических режимов:

$$\frac{3}{2} \leq \frac{T_2}{T} \approx \frac{M+1}{2(M-1)}. \quad (24.98)$$

Последнее неравенство выполняется при $M \leq 2$.

Рассмотрим теперь случаи $N = 1$ и $N = 2$. При $N = 1$ частота периодического режима $\Omega = \pi/T$, а абсолютная псевдочастота $\lambda_{\Omega} \rightarrow \infty$. Однако на частоте $\lambda \rightarrow \infty$ запретная область для фазовой характеристики отсутствует (рис. 24.19), что говорит о невозможности существования периодического режима.

При $N = 2$ частота периодического режима $\Omega = \pi/2T$, а абсолютная псевдочастота $\lambda_{\Omega} = 2/T$. Запретная зона на частоте $\lambda = 2/T$ также отсутствует (рис. 24.19), что говорит о невозможности существования периодических режимов и на этой частоте.

Фазовые характеристики для типовых л. а. х. (рис. 24.19, а и б) в области низких частот отстоят от запретной области дальше, чем у рассмотренной выше л. а. х., соответствующей астатизму второго порядка. Поэтому полученное выше условие невозможности появления периодических режимов будет справедливым и для л. а. х. этих типов.

Симметричные периодические режимы. Несмотря на то, что в согласованном положении можно добиться отсутствия периодических режимов,

в системах с ЦВМ периодические режимы, вызванные квантованием по уровню, будут существовать практически всегда. Это объясняется тем, что при наличии ненулевой установившейся ошибки начальная точка статической

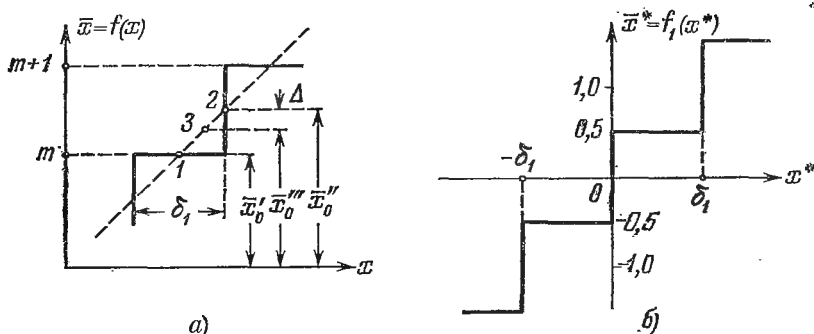


Рис. 24.21.

характеристики входного преобразователя смещается из начала координат в другую точку (рис. 24.21, а)

Если начало отсчета сместилось в точку 1, то это не дает отличия в получаемой характеристике от исходного случая равенства нулю входного и выходного сигналов. Если начало отсчета сместится в точку 2, то результирующая статическая характеристика будет иметь вид, изображенный на рис. 24.21, б.

Требуемое дробное значение выходной величины преобразователя $\bar{x}_0''$ может быть получено только в результате периодического переключения от уровня $m + 1$ к уровню m и обратно.

Это будет симметричный периодический режим, относительный полупериод которого может быть различным: $N = 1, 2, 3, \dots$

Системы с ЦВМ стараются делать так, чтобы амплитуда симметричного периодического режима не превышала единицы младшего разряда [67]. Тогда в подобном режиме входная величина ЦВМ (сигнал ошибки) будет представлять собой периодическую решетчатую функцию, изображенную на рис. 24.22. Для этого случая нелинейная зависимость для входного преобразователя может быть записана в виде (см. рис. 24.21, б).

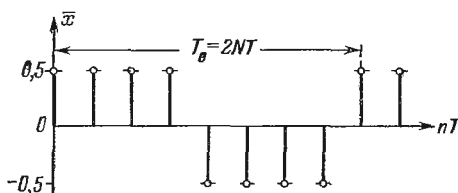


Рис. 24.22.

$$\bar{x}^* = \frac{1}{2} \text{sign } x^*, \quad (24.99)$$

где x^* — переменная составляющая ошибки, вызванная периодическим режимом, а $\bar{x}^*$ — ее цифровое представление.

Для определения коэффициента гармонической линеаризации необходимо положить $x^*[n] = a_1 \cos\left(\frac{\pi n}{N} + \varphi_1\right)$, где $-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$. Далее, используя формулу (24.84) и для приведения к безразмерному виду вводя в соответствии с (24.69) нормирующий множитель $k_1 = \delta_1^{-1}$, получим для случая $N = 1$ из (24.88)

$$-Z^* = -\frac{1}{q^*} = -\frac{2a_1}{\delta_1} e^{j\varphi_1}. \quad (24.100)$$

Амплитудно-фазовые характеристики величины — Z^* изображены на рис. 24.23, а. Они представляют собой прямые, расположенные во втором и третьем квадрантах.

Для случая $N = 2$ аналогичным образом можно получить

$$-Z^* = \begin{cases} -\frac{a_1 \sqrt{2}}{\delta_1} e^{j(\varphi_1 - \frac{\pi}{2})} & (0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}), \\ -\frac{a_1 \sqrt{2}}{\delta_1} e^{j(\varphi_1 + \frac{\pi}{2})} & (0 > \varphi_1 > -\frac{\pi}{2}). \end{cases} \quad (24.101)$$

Амплитудно-фазовые характеристики представляют собой прямые линии, расположенные в секторе $-180^\circ \pm 45^\circ$ (рис. 24.23, б).

При $N = 3$ модуль $|Z^*| = 1,5 \frac{a_1}{\delta_1}$. Характеристики расположены в секторе $-180^\circ \pm 30^\circ$ (рис. 24.23, в).

Для $N > 3$

$$|Z^*| \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a_1}{\delta_1}, \quad (24.102)$$

причем характеристики расположены в секторе $-180^\circ \pm N^{-1} \cdot 90^\circ$ (рис. 24.23, г). При $N \rightarrow \infty$, что соответствует непрерывному случаю, сектор расположения а. ф. х. стягивается в линию, совпадающую с отрицательной вещественной полуосью.

Рис. 24.23.

Уравнение периодического режима имеет вид (24.76). Его мож-

но решить графически (рис. 24.17) или аналитически. В последнем случае необходимо приравнять $-Z^* = W$. В результате при наличии точки

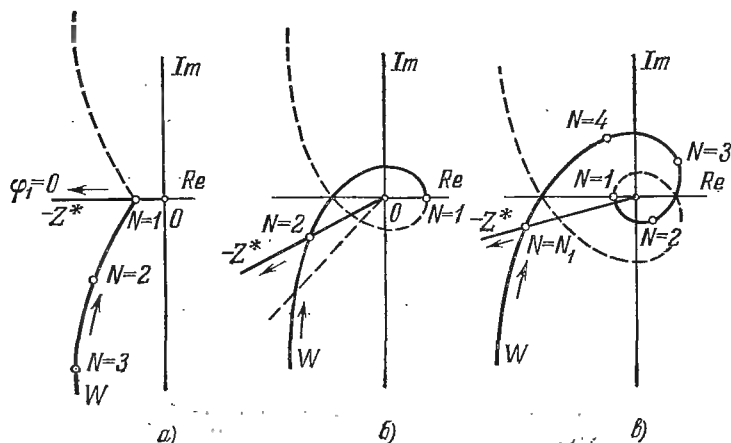


Рис. 24.24.

пересечения, как это показано, например, на рис. 24.24, а, для $N = 1$ амплитуда ошибки или, что все равно, амплитуда регулируемой величины

объекта (рис. 24.14)

$$a_1 = -\frac{\delta_1}{2} |W(e^{j\pi})| = -\frac{\delta_1}{2} |W(-1)| = -\frac{\delta_1}{2} |W^*(j\infty)|. \quad (24.103)$$

Под знаком модуля в (24.103) находится значение частотной передаточной функции при $\omega = \pi/T$ или при $\lambda \rightarrow \infty$.

При колебаниях с относительным полупериодом $N = 2$, если имеется точка пересечения двух годографов, как, например, показано на рис. 24.24, б,

$$a_1 = \frac{\delta_1}{\sqrt{2}} |W(e^{j\frac{\pi}{2}})| = \frac{\delta_1}{\sqrt{2}} |W^*(j\frac{2}{T})|. \quad (24.104)$$

Аналогичным образом для колебаний при $N = N_1 \gg 1$ (рис. 24.24, в)

$$a_1 \approx \frac{2\delta_1}{\pi} |W(e^{j\frac{\pi}{N}})| = \frac{2\delta_1}{\pi} |W^*(j\lambda_N)|, \quad (24.105)$$

где

$$\lambda_N = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2N}. \quad (24.106)$$

Следует заметить, что в системе обычно могут существовать симметричные периодические режимы с различными значениями полупериода N . При этом для каждого конкретного значения N периодический режим в случае управляемого объекта без самовыравнивания (астатического) оказывается нейтрально-устойчивым относительно среднего значения регулируемой величины. В результате этого ни один из симметричных периодических режимов с фиксированным значением N не может существовать длительное время. Медленные движения объекта, вызванные наличием возмущений, приводят к непрерывным переходам периодических режимов от одного значения $N = N_1$ к другому $N = N_2 \neq N_1$.

Из всех возможных периодических режимов обычно наиболее тяжелым для системы с точки зрения влияния ограниченной линейности канала является режим при $N = N_{\min}$. Это связано с тем, что при использовании дискретных корректирующих программ ЦВМ, т. е. при $D(z) \neq 1$, более вероятно применение алгоритмов, эквивалентных дифференцирующим контурам, которые вызывают подъем высоких частот.

Выходная величина ЦВМ в режиме симметричных периодических колебаний может быть получена, если входную решетчатую функцию (рис. 24.22) пропустить через фильтр с передаточной функцией $D(z)$. Это делается на основании формул (15.175), (15.178) и (15.180), которые позволяют вычислить параметры периодического режима на выходе дискретного фильтра при известных параметрах периодического режима на входе.

Покажем, как это делается для случая $N = 1$, когда число гармоник оказывается равным единице. В соответствии с (15.175) амплитуда сигнала на выходе ЦВМ (рис. 24.14)

$$\bar{x}_{1\max} = \bar{x}_{\max} |D(e^{j\pi})| = \bar{x}_{\max} |D(-1)|, \quad (24.107)$$

где $\bar{x}$ и $\bar{x}_1$ — цифровые представления входного и выходного сигналов ЦВМ.

Пусть, например, в ЦВМ используется алгоритм (табл. 24.2)

$$D(z) = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{z-a}{z} = 10 - 9z^{-1}.$$

Тогда для режима, изображенного на рис. 24.22, при $\bar{x}_{\max} = 0,5$ имеем для $N = 1$

$$\bar{x}_{1\max} = 0,5 |D(-1)| = 0,5 (10 + 9) = 9,5,$$

т. е. амплитуда колебаний на выходе ЦВМ превышает амплитуду колебаний на входе в 19 раз.

При $N > 1$ расчет должен быть произведен для каждой гармоники и найдена их сумма, либо использованы формулы (15.178) или (15.180).

Покажем теперь, что в системах с типовыми л. а. х. (рис. 24.10 и табл. 24.2) для симметричных периодических режимов амплитуда ошибки при $N = 1$ не превосходит половины цены младшего разряда входного преобразователя. Пусть на входе нелинейного элемента (рис. 24.21, б) действует сигнал $x^*[n] = a_1 \cos(\pi n + \varphi_1)$. Запишем амплитуду входного сигнала в виде $a_1 = (m + \Delta_1) \delta_1$, где m — целое, а $\Delta_1 > 0$ — дробное число. Начальная фаза пусть находится в пределах

$$-\arccos \frac{m}{m + \Delta_1} < \varphi_1 < \arccos \frac{m}{m + \Delta_1}. \quad (24.108)$$

Если начальная фаза удовлетворяет последнему неравенству, то на выходе нелинейного элемента будет последовательность (24.85):

$$\bar{x}_1^*[n] = b_1 \cos \pi n = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cos \pi n. \quad (24.109)$$

Нормированный коэффициент гармонической линейаризации

$$q^* = \frac{\delta_1 b_1}{a_1} e^{-j\varphi_1} = \frac{m + \frac{1}{2}}{m + \Delta_1} e^{-j\varphi_1}. \quad (24.110)$$

В точке пересечения двух годографов (рис. 24.24, а) имеем $-Z^* = W(e^{j\pi}) = W^*(j\infty)$. Так как $|W^*(j\infty)| \leq \frac{M}{M+1}$, то получаем

$$\frac{m + \Delta_1}{m + \frac{1}{2}} \leq \frac{M}{M+1}, \quad (24.111)$$

откуда

$$\Delta_1 \leq \frac{\frac{M}{2} - m}{M+1}. \quad (24.112)$$

Так как $\Delta_1 > 0$, то при $M < 2$ из последнего равенства следует, что $m = 0$, а дробная часть относительной амплитуды колебаний

$$\Delta_1 \leq \frac{M}{2(M+1)} < \frac{1}{2}. \quad (24.113)$$

Квазипериодические режимы. Если установившееся значение сигнала на выходе входного преобразователя должно соответствовать точке 3 на рис. 24.21, а, то в системе будет существовать несимметричный периодический режим.

Установившееся значение на выходе преобразователя можно представить в виде

$$\bar{x}_0 = \bar{x}_0^0 + \bar{x}_0^* = m + \left(\frac{1}{2} - \Delta\right), \quad (24.114)$$

где m — целое число, а $\bar{x}_0^*$ — дробная часть, причем $|\bar{x}_0^*| \leq 1$ и $\Delta \leq \frac{1}{2}$. Так как на самом деле на выходе может существовать сигнал $m + 1$ или m , то требуемое значение $\bar{x}_0$ получается как среднее значение в периодическом режиме. Как среднее в колебательном режиме получается и значение дробной части

$$\bar{x}_0^* = \frac{1}{2} - \Delta = \frac{1}{2} + \frac{(N_1 - N_2)}{2N} \cdot \frac{1}{2}, \quad (24.115)$$

где N_1 — число тактов, когда на выходе существует величина $m+1$, N_2 — число тактов, когда на выходе существует величина m , а $2N$ — число тактов полного периода колебаний.

Из (24.115), учитывая, что $N_1 + N_2 = 2N$, можно найти следующую зависимость:

$$N_{cp} = \frac{N_1}{1-2|\Delta|}. \quad (24.116)$$

Знак модуля введен в (24.116) для обобщения на случай произвольного знака Δ . Вместо N в формуле (24.116) записан средний полупериод N_{cp} по следующим соображениям. Числа N_1 , N_2 и N могут быть в каждом реальном цикле колебаний только целыми, а Δ — произвольное число. Поэтому зависимость (24.115) может, как правило, кроме специально подобранных значений Δ , выполняться только в среднем. Так, например, для случая, когда $N_1 = 1$, некоторые подобные режимы изображены на рис. 24.25.

В формулах (24.115) и (24.116) числа N_1 , N_2 и N могут быть целыми, вообще говоря, для любых значений Δ , если под N_1 и N_2 понимать число тактов не в одном цикле колебаний, а в течение многих циклов. Однако при этом все эти числа могут стремиться к бесконечности или во всяком случае быть очень большими. Период колебаний $T_0 = 2NT$ в этом случае не соответствует реально наблюдаемым колебаниям в системе, у которых будет существовать некоторая преобладающая гармоника. Целью введения усредненного периода и является выявление частоты преобладающей гармоники.

Средний полупериод N_{cp} может быть как целым, так и дробным числом. Средние значения чисел N_1 и N_2 могут быть также целыми и дробными. Такой режим движения будем называть *квазипериодическим*.

Проблема расчета квазипериодических режимов является весьма сложной. Поэтому ограничимся распространенным случаем, когда $N_1 = 1$ не в среднем, а в течение всего режима. Тогда формулы (24.115) и (24.116) приобретают вид

$$\bar{x}_0^* = \frac{1}{2} - \Delta = \frac{1}{2} + \frac{1-N_2}{2N} \cdot \frac{1}{2}, \quad (24.117)$$

$$N_{cp} = \frac{1}{1-2|\Delta|}. \quad (24.118)$$

Рассмотрим вначале случай, когда $N_{cp} = N$ — целое число. Для дробных частей x^* и $\bar{x}^*$ по-прежнему имеют место зависимости вида (24.81) и (24.82), а также рис. 24.21, б. Однако комплексное значение амплитуды первой гармоники $\dot{b}_1$ на выходе входного преобразователя определяется при $N > 1$ более общим выражением:

$$\dot{b}_1 = b_1 e^{j\psi_1} = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{2N-1} f_1(x^*[n]) e^{-j\frac{\pi}{N}v}. \quad (24.119)$$

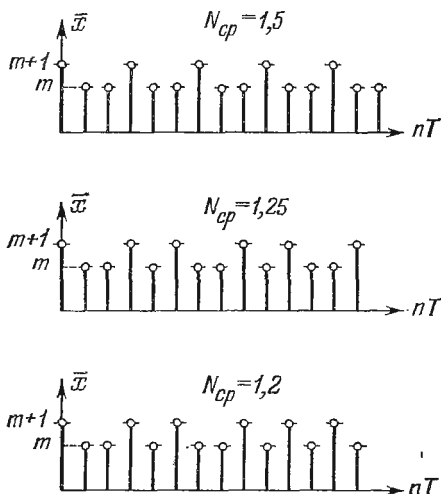


Рис. 24.25.

Это выражение можно упростить, если учесть, что $f_1 = \frac{1}{2} + \Delta$ при $v=0$ и $f_1 = -\left(\frac{1}{2} - \Delta\right)$ при всех остальных значениях v . Тогда

$$\begin{aligned} \dot{b}_1 &= \frac{1}{N} \left[\frac{1}{2} + \Delta - \left(\frac{1}{2} - \Delta \right) \sum_{v=1}^{2N-1} e^{-j\frac{\pi}{N}v} \right] = \\ &= \frac{1}{N} \left[1 - \left(\frac{1}{2} - \Delta \right) \sum_{v=0}^{2N-1} e^{-j\frac{\pi}{N}v} \right] = \frac{1}{N}, \end{aligned} \quad (24.120)$$

так как сумма членов вида $e^{-j\frac{\pi}{N}v}$ при $v = 0, 1, \dots, 2N-1$ равна нулю. Из (24.120) получается нормированный коэффициент гармонической линеаризации

$$q^* = \frac{\dot{b}_1 \delta_1}{a_1} = \frac{\delta_1}{N a_1} e^{-j\varphi_1}. \quad (24.121)$$

Расчет параметров периодического режима, когда $N_{cp} = N$ — целое число, не представляет труда. По значению ошибки в установившемся режиме

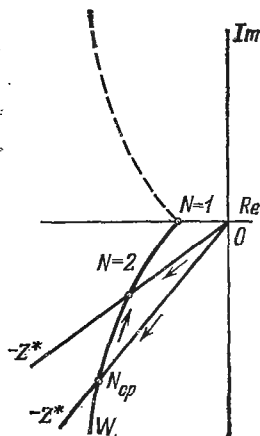


Рис. 24.26.

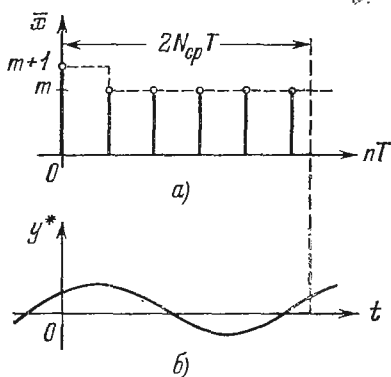


Рис. 24.27.

определяется относительный полупериод колебаний N (24.118). Затем из (24.76) находится амплитуда колебаний на выходе системы:

$$a_1 = \frac{\delta_1}{N} \left| W \left(j \frac{\pi}{N} \right) \right| = \frac{\delta_1}{N} |W^*(j\lambda_N)|, \quad (24.122)$$

где λ_N определяется формулой (24.106). На рис. 24.26 показано графическое построение для $N=2$. Если N_{cp} представляет собой дробное число, то колебания носят квазипериодический характер. Их приближенный расчет может быть сделан следующими методами.

1) Введем предположение, что при переходе от одного периодического режима с целым значением $N = N_0$ к другому с новым целым значением $N = N_0 + 1$ амплитуда первой гармоники и частота усредненного периодического режима изменяются непрерывно и плавно. В части частоты колебаний это полностью подтверждается формулой (24.116). Тогда для расчета амплитуды первой гармоники колебаний можно воспользоваться тем же графическим построением (рис. 24.26) и формулами (24.116) и (24.122) при замене в последней N на N_{cp} и ω на $\bar{\omega}_0 = \pi N_{cp}^{-1}$.

2) Второй метод заключается в том, что для усредненного значения $\bar{x}[n]$, изображенного на рис. 24.27, а с учетом действия экстраполятора (пунктирная линия), находится обычными приемами разложения в ряд Фурье амплитуда первой гармоники

$$c_1 = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2N_{\text{cp}}} . \quad (24.123)$$

Далее может быть определена амплитуда колебаний на выходе системы пересчетом c_1 на вход (умножением на δ_1) и умножением на модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы:

$$a_1 = \delta_1 c_1 |W(e^{j\omega_0 T})| = \frac{2\delta_1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2N_{\text{cp}}} |W(e^{j\omega_0 T})| = \frac{2\delta_1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2N_{\text{cp}}} |W^*(j\lambda_0)| . \quad (24.124)$$

Здесь

$$\omega_0 = \frac{\pi}{N_{\text{cp}} T} , \quad \lambda_0 = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_0 T}{2} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2N_{\text{cp}}} \quad (24.125)$$

— круговая частота и псевдо частота периодического режима (частота преобладающей гармоники).

3) Возможно использование способа расчета, когда рассматривается некоторый дополнительный усредненный режим движения $y^*(t)$ на выходе непрерывной части (рис. 24.27, б), полученный припасовыванием на интервалах времени $0 \div T$ и $T \div T_0 = 2N_{\text{cp}} T$. Далее в случае необходимости можно выделить в этом режиме первую гармонику. В отличие от предыдущих двух методов, здесь расчет может производиться и в тех случаях, когда время существования на выходе экстраполятора $(m+1)\delta$ не подчиняется условию $N_1 = 1$, а может содержать произвольное число тактов.

Пример. Пусть передаточная функция непрерывной части

$$W_0(p) = \frac{k_0}{p} . \quad (24.126)$$

Дискретная частотная передаточная функция разомкнутой системы

$$W^*(j\lambda) = \frac{K \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)}{j\lambda} , \quad (24.127)$$

где $K = k_0 k_{\text{ц}}$ — общий коэффициент усиления разомкнутой цепи с присоединенным коэффициентом передачи ЦВМ (24.73).

Режим симметричных колебаний при $\bar{x}_0^* = 0,5\delta_1$ построен на рис. 24.28, а. Амплитуда может быть найдена методом припасовывания:

$$A = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{k_0 T}{2} = \frac{\delta_1}{2} \cdot \frac{KT}{2} . \quad (24.128)$$

Так как из условий устойчивости $KT < 2$, то $A < 0,5\delta_1$. Относительный полупериод $N = 1$. Первая гармоника этого колебательного режима имеет амплитуду

$$a_1 = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{\delta_1}{2} \cdot \frac{KT}{2} = \frac{2\delta_1 KT}{\pi^2} . \quad (24.129)$$

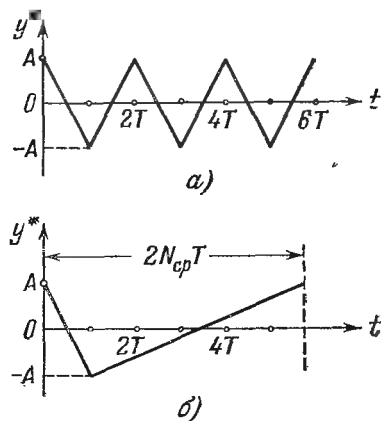


Рис. 24.28.

Первая гармоника может быть также найдена из (24.103) для $\omega_0 T = \pi$ и $\lambda \rightarrow \infty$:

$$a_1 = \frac{\delta_1}{2} |W^*(j\infty)| = -\frac{\delta_1 KT}{4}, \quad (24.130)$$

что близко совпадает с (24.129).

Рассмотрим теперь несимметричные колебания. Зависимость N_{cp} от установившегося значения ошибки $\bar{x}_0$ в соответствии с (24.114) и (24.118) представлена на рис. 24.29. Точками отмечены целочисленные значения N_{cp} .

Воспользуемся первым изложенным методом. В соответствии с (24.122)

$$a_1 = \frac{\delta_1}{N_{cp}} \cdot \frac{K \sqrt{1 + 0,25\lambda_0^2 T^2}}{\lambda_0} = \frac{\delta_1 KT}{\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{2N_{cp}}}{\sin \frac{\pi}{2N_{cp}}}. \quad (24.131)$$

При $N_{cp} > 2$ формула (24.131) дает

$$a_1 \approx \frac{\delta_1 KT}{\pi}. \quad (24.132)$$

При использовании второго метода в соответствии с (24.124)

$$a_1 = \frac{2\delta_1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2N_{cp}} |W^*(j\lambda_0)| = \frac{\delta_1 KT}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2N_{cp}}}{\frac{\pi}{2N_{cp}}}. \quad (24.133)$$

При $N > 2$ формула (24.133) переходит в (24.132).

Для того чтобы воспользоваться третьим методом, рассмотрим «средний» цикл колебаний. Он построен методом припасовывания для выходной величины на рис. 24.28, б.

Амплитуда колебаний

$$A = \frac{\delta_1}{2} \cdot \frac{KT(2N_{cp} - 1)}{2N_{cp}}. \quad (24.134)$$

Амплитуда первой гармоники при разложении в ряд Фурье

$$a_1 = \frac{8AN_{cp}^2}{\pi^2(2N_{cp} - 1)} \sin \frac{\pi}{2N_{cp}} = \frac{\delta_1 KT}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2N_{cp}}}{\frac{\pi}{2N_{cp}}} \quad (24.135)$$

полностью совпадает со значением (24.134).

Все полученные выражения для амплитуды первой гармоники показывают сравнительное постоянство ее для различных значений N_{cp} .

§ 25.1. Системы экстремального регулирования

Условием экстремума дифференцируемой функции нескольких переменных $F(y_1, y_2, \dots, y_n)$ является равенство нулю в точке экстремума частных производных этой функции:

$$\frac{dF}{dy_1} = 0, \quad \frac{dF}{dy_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{dF}{dy_n} = 0. \quad (25.1)$$

Градиентом функции F называется векторная величина

$$\text{grad } F = \overline{K}_1 \frac{dF}{dy_1} + \overline{K}_2 \frac{dF}{dy_2} + \dots + \overline{K}_n \frac{dF}{dy_n}, \quad (25.2)$$

В точке экстремума градиент равен нулю:

$$\text{grad } F = 0. \quad (25.3)$$

Задача поиска экстремума разбивается на две:

- 1) определение градиента;
- 2) организация движения в точке экстремума.

Способ синхронного детектирования. Способ основан на том, что к основным медленно меняющимся величинам $u_1, \dots, u_n$ добавляются малые гармонические (в общем случае периодические) составляющие:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_1^0 + A_1 \sin \omega_1 t, \\ y_2 &= y_2^0 + A_2 \sin \omega_2 t, \\ &\vdots \\ y_n &= y_n^{0\epsilon} + A_n \sin \omega_n t. \end{aligned} \right\} \quad (25.4)$$

Величина $F(y_1, \dots, y_n)$ поступает на синхронные детекторы (рис. 25.1), у которых в качестве опорных величин используются те же переменные составляющие (25.4). Идеальные синхронные детекторы умножают величину F на переключающую функцию, представляющую собой прямоугольную волну с периодом $T_i = 2\pi/\omega_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и высотой единица.

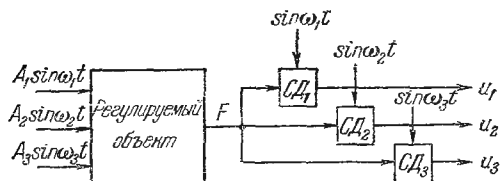


Рис. 25.1.

Переключающая функция приближенно может быть заменена синусоидой частоты ω_i с единичной амплитудой. Поэтому средние значения выходных величин синхронных детекторов $u_1, \dots, u_n$ приближенно могут быть представлены в виде $u_1 = \overline{F \sin \omega_1 t}$, $u_2 = \overline{F \sin \omega_2 t}$, $\dots$, $u_n = \overline{F \sin \omega_n t}$.

В квазистационарном режиме, когда составляющие y_1^0 меняются медленно по сравнению с поисковым движением $A_i \sin \omega_i t$, величины $u_1, \dots, u_n$ с точностью до малых высших порядков пропорциональны соответствующим частным производным $\frac{dF}{dy_1}, \dots, \frac{dF}{dy_n}$ в точке $y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0, \dots, y_n = y_n^0$ и, следовательно, определяют $\text{grad } F$ в этой точке.

Для доказательства этого разложим функцию F в окрестностях точки $y_1^0, \dots, y_n^0$ в степенной ряд:

$$F(y_1^0 + \Delta y_1, \dots, y_n^0 + \Delta y_n) = F(y_1^0, \dots, y_n^0) + \sum_{i=1}^n \frac{dF^0}{dy_i} \Delta y_i + \\ + \frac{1}{2!} \sum_{i,k=1}^n \frac{d^2 F^0}{dy_i dy_k} \Delta y_i \Delta y_k + \frac{1}{3!} \sum_{i,k,v=1}^n \frac{d^3 F^0}{dy_i dy_k dy_v} \Delta y_i \Delta y_k \Delta y_v + \dots \quad (25.5)$$

В последнем выражении значения частных производных соответствуют точке $y_1^0, \dots, y_n^0$, а $\Delta y_1 = A_1 \sin \omega_1 t, \dots, \Delta y_n = A_n \sin \omega_n t$.

Выходные величины синхронных детекторов можно представить в виде

$$u_q = \overline{F \sin \omega_q t} = \overline{F(y_1^0, \dots, y_n^0) \sin \omega_q t} + \sum_{i=1}^n A_i \overline{\frac{dF^0}{dy_i} \sin \omega_i t \sin \omega_q t} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n A_i A_k \overline{\frac{d^2 F^0}{dy_i dy_k} \sin \omega_i t \sin \omega_k t \sin \omega_q t} + \dots \quad (25.6)$$

Если величины $y_1^0, \dots, y_n^0$ постоянны или меняются настолько медленно, что их изменениями за небольшой период можно пренебречь, то, учитывая очевидные равенства:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\sin \omega_q t} &= 0, \\ \overline{\sin \omega_i t \sin \omega_q t} &= \frac{1}{2} \quad (i = q), \\ \overline{\sin \omega_i t \sin \omega_q t} &= 0 \quad (i \neq q), \end{aligned} \right\} \quad (25.7)$$

выражение (25.6) можно свести к виду

$$u_q = \frac{1}{2} A_q \frac{dF^0}{dy_q} + \Delta u_q. \quad (25.8)$$

Погрешность метода определяется членом Δu_q , которому соответствует выражение

$$\Delta u_q = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n A_i A_k \frac{d^2 F^0}{dy_i dy_k} \sin \omega_i t \sin \omega_k t \sin \omega_q t + \\ + \frac{1}{3!} \sum_{i, k, v=1}^n A_i A_k A_v \frac{d^3 F^0}{dy_i dy_k dy_v} \sin \omega_i t \sin \omega_k t \sin \omega_v t \sin \omega_q t + \dots \quad (25.9)$$

Величина Δu_q по отношению к амплитудам $A_1, \dots, A_n$ имеет порядок малости не ниже третьего, а по сравнению с u_q — не ниже второго. Если частоты выбраны по закону нечетных чисел $\omega_i = (2i + 1) \omega_0$, где $\omega_0 = \text{const}$, то удовлетворяются условия $\omega_i \neq \omega_k$ ($i \neq k$) и $\omega_i \pm \omega_k \neq \pm \omega_q$. Тогда

$$\sin \omega_i t \sin \omega_k t \sin \omega_q t = 0 \quad (25.10)$$

и величина Δu_q имеет порядок малости не ниже четвертого.

Таким образом, выходные величины синхронных детекторов с достаточной степенью точности можно считать пропорциональными составляющим градиента F в точке $y_1^0, \dots, y_n^0$:

$$u_q = \frac{1}{2} A_q \frac{dF^0}{dy_q}. \quad (25.11)$$

Способ производной по времени. Производная по времени функции $F(y_1, \dots, y_n)$ определяется выражением

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dy_1} \frac{dy_1}{dt} + \dots + \frac{dF}{dy_n} \frac{dy_n}{dt}. \quad (25.12)$$

Отсюда следует, что, задавая поочередно скорости изменения $\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n$ и измеряя производную по времени $\frac{dF}{dt}$, можно найти составляющие градиента (25.3). Некоторым недостатком этого метода является необходимость дифференцирования функции F по времени, что сопровождается поднятием уровня высокочастотных помех.

Способ запоминания экстремума. Этот способ заключается в том, что система совершает вынужденное или автоколебательное движение в районе экстремума. При достижении экстремального значения $F = F_*$ оно фиксируется на запоминающем устройстве. Градиент функции определяется затем по разности текущего и экстремального значений $F - F_*$.

Обратимся теперь к организации движения по направлению к экстремуму. Рассмотрим несколько возможных способов.

Способ Гаусса — Зайделя. Способ заключается в поочередном изменении координат $y_1, \dots, y_n$. Сначала фиксируются все координаты $y_2, \dots, y_n$, а координата y_1 изменяется так, чтобы обратилась в нуль соответствующая составляющая градиента $\frac{dF}{dy_1}$. Затем изменяется координата y_2

при фиксированных остальных координатах до обращения в нуль $\frac{dF}{dy_2}$ и т. д. После изменения координаты y_n обращаются опять к y_1 и далее повторяют весь цикл снова. Этот процесс продолжают до тех пор, пока не будет достигнута точка экстремума F_* .

Этот способ не обеспечивает быстрее достижения точки экстремума вследствие того, что координаты изменяются не все сразу, а поочередно.

Способ градиента. В этом способе осуществляется одновременное изменение всех координат так, чтобы обеспечить движение системы в направле-

нии, близком к мгновенному направлению вектора градиента (непрерывно или дискретно).

В простейшем случае непрерывного безынерционного управления для этого должны реализовываться зависимости

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= k \frac{dF}{dy_1}, \\ \dot{y}_2 &= k \frac{dF}{dy_2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{y}_n &= k \frac{dF}{dy_n}, \end{aligned} \right\} \quad (25.13)$$

где k — некоторый коэффициент пропорциональности. Заметим, что для получения правильного направления движения должно быть $k > 0$ для случая экстремума-максимума и $k < 0$ для экстремума-минимума.

Траектория движения изображающей точки $y_1, \dots, y_n$ в этом случае оказывается нормальной к поверхности $F(y_1, \dots, y_n) = \text{const}$.

Уравнения (25.13) соответствуют устойчивому движению экстремальной системы, так как из (25.12) следует

$$\frac{dF}{dt} = k \left[\left(\frac{dF}{dy_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{dF}{dy_n} \right)^2 \right]. \quad (25.14)$$

Следовательно, производная функции F по времени сохраняет свой знак (больше нуля при $k > 0$ и меньше нуля при $k < 0$) повсюду, кроме точки экстремума, где эта производная обращается в нуль, что соответствует монотонному сходящемуся процессу.

При шаговом движении реализуются зависимости

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_1 &= k \frac{dF}{dy_1}, \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta y_n &= k \frac{dF}{dy_n}, \end{aligned} \right\} \quad (25.15)$$

где $\Delta y_1, \dots, \Delta y_n$ — фиксированные шаги в направлении экстремума.

Для способа градиента характерно плавное движение по направлению к точке экстремума и малый размах колебаний около точки экстремума при шаговом движении.

Способ наискорейшего спуска. При способе наискорейшего спуска движение происходит по начальному направлению вектора градиента F до тех пор, пока производная функции F по этому направлению не обратится в нуль. Затем опять определяется направление градиента и происходит движение вдоль этого вектора до обращения в нуль производной от F по этому направлению. Процесс повторяется до достижения точки экстремума.

Этот способ характеризуется быстрым выходом системы в район экстремума, что делает его предпочтительным для начальной стадии движения. В районе экстремума можно использовать другие способы, например способ градиента.

На рис. 25.2 для случая двух регулируемых величин, что соответствует $F = F(y_1, y_2)$, изображены траектории движения для рассмотренных выше способов поиска экстремума [61]. Кривая 1 соответствует способу Гаусса — Зайделя, кривая 2 — способу градиента и кривая 3 — способу наискорейшего спуска.

Рассмотрим теперь пример экстремальной системы для наиболее простого случая, когда $F = F(y)$.

Пример. На рис. 25.3 изображена схема экстремального регулирования настройки колебательного контура. Полезный сигнал с частотой f поступает на параллельный резонансный контур, состоящий из катушки L и конденсаторов переменной емкости C_1 и C_2 . Конденсатор C_2 имеет сравнительно небольшую емкость. Ротор

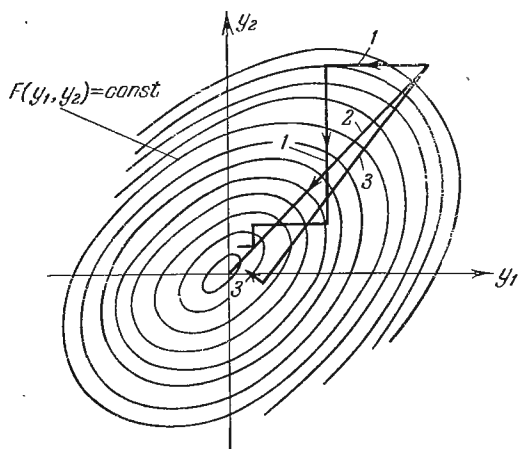


Рис. 25.2.

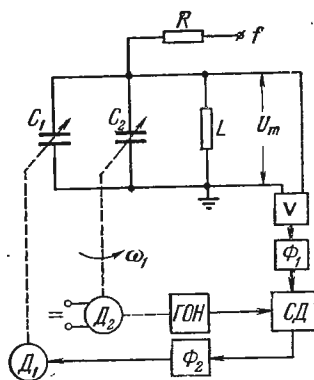


Рис. 25.3.

его вращается двигателем D_2 с постоянной скоростью, вызывая периодические изменения общей емкости контура, которая является регулируемой величиной.

Общая емкость колебательного контура

$$C = C_1 + C_2 = C_1 + C_{20} + A_1 \sin \omega_1 t,$$

где C_{20} — постоянная составляющая емкости конденсатора C_2 , а ω_1 — угловая скорость вращения его ротора.

Частота ω_1 выбирается так, чтобы она была во много раз меньше частоты полезного сигнала $\omega = 2\pi f$ и больше возможной частоты процесса регулирования.

Двигатель D_2 синхронно с вращением ротора конденсатора C_2 дает опорную величину в синхронный детектор CD , например, в виде опорного напряжения той же частоты от генератора $ГОН$.

Переменное напряжение на колебательном контуре после выпрямления и сглаживания фильтром Φ_1 поступает на вход синхронного детектора. На выходе синхронного детектора формируется сигнал, пропорциональный производной от амплитуды напряжения контура по емкости $\frac{dU_m}{dC}$. Этот сигнал после сглаживания фильтром Φ_2 поступает далее на усилитель и двигатель D_1 . Последний будет вращать ротор конденсатора C_1 , т. е. изменять регулируемую величину и производить подстройку контура до тех пор, пока производная $\frac{dU_m}{dC}$ не станет равной нулю. Всякое изменение частоты сигнала f будет вызывать автоматическую подстройку на максимум напряжения на контуре.

В этой системе поиски экстремума по способам Гаусса — Зайделя, градиента и наискорейшего спуска сливаются в один вследствие наличия только одной регулируемой величины (емкости контура).

Нетрудно видеть, что в рассмотренной экстремальной системе получается своеобразная следящая система, ошибкой в которой является производ-

ная $\frac{dU_m}{dC}$. В соответствии с этим структурная схема этой экстремальной системы может быть сведена к структурной схеме следящей системы (рис. 25.4).

Входной величиной является значение емкости C_0 , соответствующее экстремуму. Это значение связано с частотой полезного сигнала ω и индуктивностью приближенным соотношением (при пренебрежении влиянием активных сопротивлений)

$$C_0 \approx \frac{1}{\omega^2 L}.$$

В контур структурной схемы входят аperiодические звенья, соответствующие фильтрам Φ_1 и Φ_2 , и интегрирующее звено с замедлением (двигатель D_1). Результирующая передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)},$$

где T — электромеханическая постоянная времени двигателя, T_1 и T_2 — постоянные времени фильтров.

На рис. 25.4 показано также воздействие f от неподавленной переменной составляющей на выходе синхронного детектора и воздействие ΔC_0 , представляющее собой помеху во входном сигнале.

Как следует из рис. 25.4, исследование динамики рассматриваемой экстремальной системы сводится к исследованию следящей системы. Поэтому здесь применимы все методы, используемые в непрерывных автоматических системах.

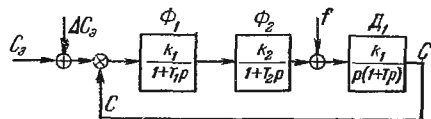


Рис. 25.4.

Помимо обычных показателей качества для экстремальных систем используется еще одна характеристика — потери на поиск.

В установившемся режиме регулируемая величина колеблется около значения, соответствующего экстремуму функции $F(y)$. Вследствие этого среднее значение этой функции отличается от экстремального. Среднее значение разности $F - F_0$, обусловленное колебаниями поиска в установившемся режиме работы системы, называется потерями на поиск.

Поскольку в точке экстремума первая производная $\frac{dF}{dy} = 0$, то разность между текущим и экстремальным значениями функции $F(y)$ можно представить в виде степенного ряда

$$F - F_0 = \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dy^2} (\Delta y)^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 F}{dy^3} (\Delta y)^3 + \dots \quad (25.16)$$

Здесь частные производные соответствуют точке экстремума, а Δy — отклонение от этой точки. Если в (25.16) можно ограничиться только первым членом ряда, т. е. использовать квадратичную форму, то потери на поиск можно представить в виде

$$\overline{F - F_0} = \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dy^2} \overline{\Delta y^2}, \quad (25.17)$$

где $\overline{\Delta y^2}$ — средний квадрат отклонения регулируемой величины от значения y_0 , соответствующего экстремуму.

При гармоническом поиске с амплитудой A_1 средний квадрат $\overline{\Delta y^2} = \frac{A_1^2}{2}$.

В общем случае наличия нескольких переменных $F(y_1, \dots, y_n)$ потери на поиск определяются суммой

$$\overline{F - F_0} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{d^2 F}{dy_i^2} \overline{\Delta y_i^2}. \quad (25.18)$$

Рассмотрим исследование динамики экстремальной системы при $F_i = F(y_1, \dots, y_n)$ для случая поиска экстремума по способу градиента. Структурная схема для этого случая изображена на рис. 25.5.

Вместо (25.13) здесь будут иметь место более сложные зависимости:

$$\dot{y}_i = W(p) \frac{dF}{dy_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (25.19)$$

или, в ином виде,

$$y_i = \frac{W(p)}{p} \frac{dF}{dy_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (25.20)$$

где $W(p)$ — передаточная функция, одинаковая для всех каналов.

Для малых отклонений от точки экстремума разность $F - F_0$ может быть представлена в виде квадратичной формы:

$$F - F_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \Delta y_i \Delta y_k, \quad (25.21)$$

где

$$a_{ik} = a_{ki} = \left(\frac{d^2 F}{dy_i dy_k} \right)_0 = \left(\frac{d^2 F}{dy_k dy_i} \right)_0. \quad (25.22)$$

В n -мерном пространстве координат $(\Delta y_1, \dots, \Delta y_n)$ поверхность

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \Delta y_i \Delta y_k = 1 \quad (25.23)$$

для экстремума-минимума представляет собой эллипсоид, называемый определяющим эллипсоидом. Поверхность

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \Delta y_i \Delta y_k = -1 \quad (25.24)$$

соответствует определяющему эллипсоиду экстремума-максимума.

В теории квадратичных форм показывается, что для малых отклонений уравнения (25.20) могут быть записаны в виде

$$\Delta y_i = \pm \frac{W(p)}{p} \frac{1}{c_i^2} \Delta y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (25.25)$$

где c_i — полуоси определяющего эллипсоида. Знак плюс соответствует минимуму и знак минус — максимуму.

Из (25.25) получаются характеристические уравнения для каналов:

$$\frac{W(p)}{p} \frac{1}{c_i^2} + 1 = 0. \quad (25.26)$$

Здесь знак введен в передаточную функцию $W(p)$, которая должна быть положительной для экстремума-максимума.

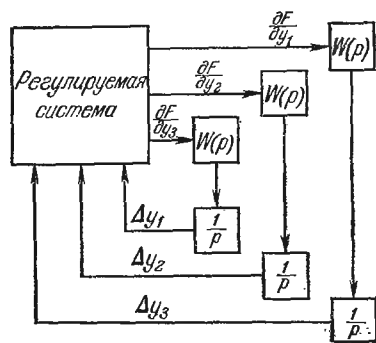


Рис. 25.5.

Таким образом, исследование динамики при $F = F(y_1, \dots, y_n)$ сводится к анализу n изолированных каналов, которым соответствуют характеристические уравнения (25.26).

Рассмотрим теперь систему с шаговым поиском. На рис. 25.6 изображена схема шагового поиска максимального значения функции $F(y)$. В регулируемом объекте эта функция должна превращаться в напряжение постоянного тока u_y по линейной или иной зависимости. Схема осуществляет поиск максимального значения u_y .

Изменение регулируемой величины y осуществляется серводвигателем D . Работа всей схемы происходит при помощи управления от временного программного устройства, которое в определенной последовательности

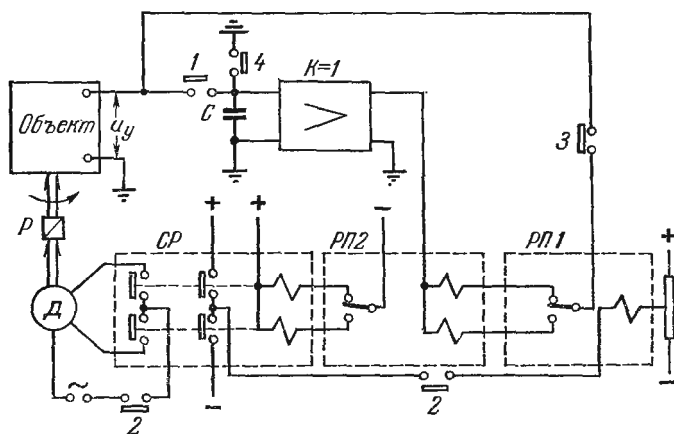


Рис. 25.6.

замыкает свои контакты. Эти контакты пронумерованы цифрами, помещенными рядом. В соответствии с последовательной работой программного устройства рассмотрим работу схемы.

1-е положение. Замыкается контакт 1, который на короткое время включает конденсатор C . Конденсатор заряжается до значения напряжения u_y . Далее при размыкании контакта 1 это напряжение запоминается на конденсаторе. К нему подключен усилитель с большим входным сопротивлением и коэффициентом усиления, равным единице. Выходное напряжение усилителя будет равно запомненному на конденсаторе напряжению u_y .

2-е положение. Замыкаются контакты 2. Один из них включает на короткое время силовое реле CP , которое подводит напряжение к реверсируемому серводвигателю D . В результате регулируемая величина изменится на определенное значение Δy , т. е. система сделает один «шаг». Второй контакт 2 также на короткое время подключает к напряжению источника постоянного тока обмотку поляризованного реле $РП1$. Это делается для того, чтобы поляризованное реле запомнило направление шага.

В начале работы схемы положение поляризованного реле $РП2$ может быть произвольным. Поэтому трехпозиционное силовое реле может включаться в произвольную сторону, и шаг для поиска экстремума делается также в произвольную сторону.

3-е положение. Замыкается на короткое время контакт 3, который включает обмотку реле $РП2$ на разность напряжений u_y до и после шага. Если напряжение u_y увеличилось после шага, реле $РП2$ остается включенным в прежнем положении. Если это напряжение уменьшилось, реле $РП2$ переключится в другое положение и подготовит включение силового реле в следующем цикле в другую сторону.

Это остается справедливым и в том случае, когда контакт реле $РП2$ включен не наверх, как показано на рис. 25.5, а вниз.

4-е п о л о ж е н и е. На короткое время замыкается контакт 4, который замыкает конденсатор C и «стирает» записанное (запомненное) на нем напряжение u_y . Тем самым схема подготавливается для следующего цикла работы, который протекает аналогично.

На рис. 25.7 изображена структурная схема рассмотренной экстремальной системы. Значение регулируемой величины, соответствующее точке экстремума, обозначено u_0 . В схему введен импульсный элемент $ИЭ$, соответствующий шаговому характеру работы схемы, и нелинейный элемент $НЭ$. Наличие нелинейного элемента вызвано тем обстоятельством, что величина шага системы постоянна и меняется только направление самого шага. Это и обеспечивается нелинейным элементом с идеальной релейной характеристикой.

Серводвигатель совместно с регулирующим органом, изменяющим значение регулируемой величины, представлен в виде некоторой непрерывной части $W_2(p)$. Непрерывным звеном является также сам объект регулирования $W_1(p)$.

Процессы в данной экстремальной системе могут изучаться при помощи моделирования структурной схемы (рис. 25.6). Могут использоваться также аналитические методы исследования нелинейных импульсных систем.

Как следует из структурной схемы, в системе весьма вероятны автоколебания около точки экстремума. Это объясняется тем, что звено с идеальной релейной характеристикой при малых входных сигналах имеет коэффициент передачи, стремящийся к бесконечности. Поэтому и этой схеме будут присущи потери на поиск в соответствии с формулой (25.17).

§ 25.2. Самонастраивающиеся системы

Самонастраивающиеся системы регулирования должны обеспечивать необходимое качество процессов регулирования при изменении свойств объекта регулирования и элементов регулятора, а также при изменении характеристик возмущающих сил.

В отличие от экстремальных (поисковых) систем здесь самонастройка часто осуществляется аналитическим путем без организации процесса поиска.

Самонастраивающиеся системы подобного типа называют беспойсковыми. Теория самонастраивающихся систем изложена в работах [30, 52, 85].

Системы с разомкнутыми цепями самонастройки. Эти системы используются в практике уже сравнительно большое время. Структурная схема подобной системы изображена на рис. 25.8. Здесь W_1 и W_2 обозначают передаточные функции части системы.

Пусть W_2 — передаточная функция объекта и регулятора, а W_1 — передаточная функция некоторого звена, которое будем называть корректирующим устройством.

Под влиянием внешних возмущений $f_1, \dots, f_n$ происходит изменение передаточной функции W_2 .

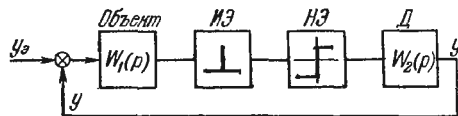


Рис. 25.7.

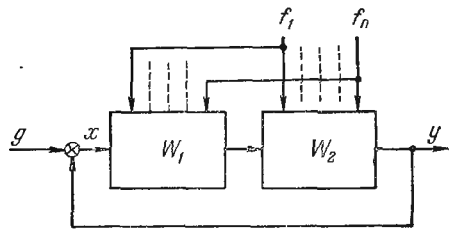


Рис. 25.8.

Для компенсации изменений эти же возмущения подводятся к корректирующему устройству с целью изменения его передаточной функции W_1 . Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2}. \quad (25.27)$$

Очевидно, что для получения постоянства (25.27) необходимо выполнить условие $W_1 W_2 = \text{const}$. Поэтому передаточная функция корректирующего устройства должна меняться по зависимости

$$W_1 = \frac{W_{10} W_{20}}{W_2}, \quad (25.28)$$

где W_{10} и W_{20} — передаточные функции для некоторого начального состояния системы.

Выполнение условия (25.28) сопряжено со значительными трудностями вследствие того, что нельзя точно и полностью учесть все возможные воздействия на объект регулирования. Кроме того, точная реализация зависимости (25.28) во многих случаях затруднительна вследствие технических трудностей. Поэтому во многих случаях реализуется приближенное выполнение этого условия.

В качестве примера рассмотрим систему автоматического построения вектора по двум составляющим (рис. 25.9). На статорные обмотки синусно-косинусного вращающегося

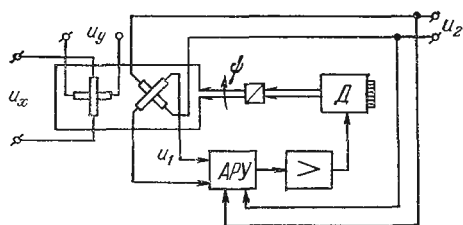


Рис. 25.9.

трансформатора СКВТ поступают напряжения переменного тока u_x и u_y , действующие значения которых пропорциональны проекциям вектора на оси x и y . В СКВТ образуется переменный магнитный поток, амплитуда которого пропорциональна модулю вектора: $\Phi_{\max} = k \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = k_1 \sqrt{x^2 + y^2}$, а ось его составляет с осью обмотки, на которую поступает напряжение u_x , угол $\psi = \arctg \frac{u_y}{u_x} = \arctg \frac{y}{x}$. Следящая система поворачивает ротор СКВТ до тех пор, пока напряжение на сигнальной обмотке ротора, включенной на вход усилителя, не станет равным нулю, точнее, минимальным. Тогда ось сигнальной обмотки будет перпендикулярна оси потока статора. Ось второй (квадратурной) обмотки ротора будет совпадать с осью потока. На второй обмотке будет напряжение, действующее значение которого пропорционально модулю искомого вектора:

$$u_2 = \frac{w_2}{w_1} \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{w_2}{w_1} \frac{k_1}{k} \sqrt{x^2 + y^2},$$

где w_1 и w_2 — числа витков статорных и роторных обмоток.

Угол между осью квадратурной обмотки ротора и осью обмотки статора, на которую подается напряжение u_x , является аргументом ψ вектора, который строится.

При построении вектора следящая система работает в различных условиях в зависимости от величины модуля строящегося вектора. Это объясняется тем, что крутизна чувствительного элемента, которым является сигнальная обмотка СКВТ, зависит от амплитуды магнитного потока $\Phi_{\max}$, т. е. от модуля вектора. Эта крутизна может быть определена из известного для СКВТ выражения для напряжения сигнальной обмотки:

$$u_1 = \frac{w_2}{w_1} \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \sin \Delta\psi = u_2 \sin \Delta\psi,$$

где $\Delta\psi$ — рассогласование между сигнальной обмоткой и осью, перпендикулярной потоку статора.

Для малых углов получаем крутизну чувствительного элемента:

$$k_{\text{чз}} = \frac{u_1}{\Delta\psi} = u_2 \left[\frac{e}{\rho a \delta} \right] = \frac{u_2}{57,3} \left[\frac{e}{\rho a \delta} \right].$$

При малых модулях строящегося вектора напряжение u_2 мало и мала крутизна чувствительного элемента. Поэтому построение будет производиться с большой ошибкой. При больших модулях вследствие увеличения крутизны чувствительного элемента может быть нарушена устойчивость, следящей системы.

В связи с этим в схему построения вектора (рис. 25.9) вводится специальное корректирующее устройство, осуществляющее автоматическое регулирование коэффициента усиления одного из каскадов усилителя АРУ. Работа схемы АРУ происходит в функции модуля строящегося вектора. Для этой цели может использоваться напряжение u_2 квадратурной обмотки ротора СКВТ.

АРУ осуществляется обычно на каком-либо нелинейном элементе (полупроводниковом диоде, ламповом или полупроводниковом триоде, пентоде, дросселе насыщения и т. д.). АРУ должно работать так, чтобы при увеличении напряжения u_2 и соответственно при увеличении крутизны чувствительного элемента $k_{\text{чз}}$ коэффициент усиления усилителя k_y уменьшался по гиперболической зависимости. Тогда их произведение будет оставаться постоянным ($k_{\text{чз}}k_y = \text{const}$), что обеспечит работу следящей системы при постоянном коэффициенте усиления разомкнутой цепи.

Системы с замкнутыми цепями самонастройки. Рассмотрим два принципа построения систем с замкнутыми цепями самонастройки.

На рис. 25.10 изображена схема системы со стабилизацией качества процесса регулирования посредством связей с эталонным фильтром. W_1 и W_2 представляют собой передаточные функции двух звеньев системы. Внешние условия воздействуют на передаточную функцию W_2 . В качестве эталона используется некоторое звено (фильтр), передаточная функция которого Φ_0 равна желаемой передаточной функции замкнутой системы. Выходная величина y системы регулирования сравнивается с выходной величиной y_0 эталона. Разность этих величин после прохождения усилителя с коэффициентом усиления k поступает на вход второго звена.

Результирующая передаточная функция замкнутой системы с дополнительной связью от эталонного фильтра будет

$$\Phi = \frac{W_1 W_2 + k W_2 \Phi_0}{1 + W_1 W_2 + k W_2}. \quad (25.29)$$

Если коэффициент усиления усилителя k велик, то можно положить $\Phi \approx \Phi_0$. Таким образом, при изменении внешних условий передаточная функция замкнутой системы оказывается близкой к эталонной.

Такие системы обладают сравнительно низкими качествами вследствие невозможности практически реализовать значительное увеличение коэффициента усиления k из-за потери устойчивости. Поэтому большее практическое значение имеет другая схема самонастройки, изображенная на рис. 25.11. Эта схема содержит вычислительное устройство дискретного или непрерывного типа, которое определяет отклонение характеристик замкнутой системы от желаемых или эталонных и в соответствии с имеющимся отклонением воздействует на различные параметры корректирующего устройства с передаточной функцией W_1 .

Один из возможных путей заключается в определении вычислительным устройством частотных характеристик системы. Для этой цели на вход

системы подаются малые колебания некоторых фиксированных частот, для которых определяется частотная передаточная функция системы. В некоторых случаях нет нужды специально подавать на вход колебания фиксированных частот, так как они могут присутствовать во входном сигнале. Задача тогда будет заключаться только в выделении этих колебаний из выходной величины посредством узкополосных фильтров.

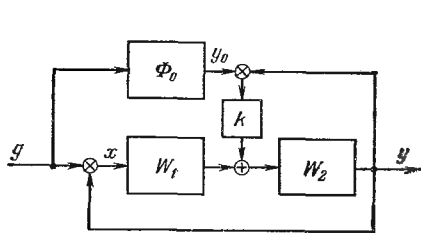


Рис. 25.10.

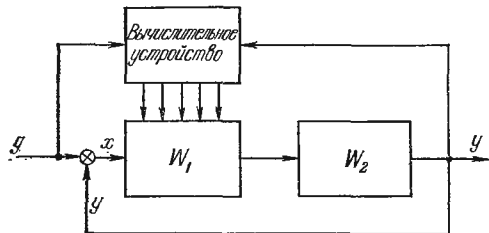


Рис. 25.11.

После нахождения частотной передаточной функции системы вычислительное устройство определяет требуемые значения параметров корректирующего устройства и посредством исполнительных устройств устанавливает эти значения параметров. В результате характеристики замкнутой системы будут непрерывно корректироваться так, чтобы реализовать приближение их к желаемому виду.

Возможно также определение переходной или весовой функции системы при подаче на вход ступенчатого или импульсного воздействия и реализация воздействия на корректирующее устройство при наличии отклонения от желаемого вида переходного процесса.

Основной трудностью здесь является недопустимость подачи на вход значительных пробных воздействий, так как они могут нарушать основной процесс регулирования. Подача же малых пробных воздействий затрудняет выделение получающейся реакции на фоне помех и шумов.

Для контроля динамических характеристик возможно применение статистических методов. Пусть на входе системы действует случайный сигнал $g(t)$, вызывающий на ее выходе реакцию $y(t)$. Тогда взаимная корреляционная функция для этих двух функций времени может быть определена по выражению

$$R_{gy}(\tau) = \overline{g(t-\tau)y(t)} = \int_0^{\infty} w(\eta) \overline{g(t-\tau)g(t-\tau-\eta)} d\eta = \int_0^{\infty} w(\eta) R_g(\tau-\eta) d\eta, \quad (25.30)$$

где $w(t)$ — функция веса системы.

Если при помощи корреляторов определить корреляционные функции $R_g(\tau)$ и $R_{gy}(\tau)$, то решение интегрального уравнения (25.30) дает весовую функцию. Эта задача возлагается на вычислительное устройство (рис. 25.11).

Указанный метод наиболее прост, когда в пределах полосы пропускания системы $g(t)$ имеет белый спектр. Тогда

$$R_g(\tau-\eta) = a\delta(\tau-\eta) \quad \text{и} \quad R_{gy}(\tau) = aw(\tau).$$

При статистическом методе определения весовой функции возможно использование имеющихся во входном сигнале шумовых помех в качестве пробных сигналов, что является достоинством этого метода.

Кроме обычных критериев качества, самонастраивающиеся системы характеризуются временем и точностью самонастройки. Так как объект регулирования в самонастраивающейся системе, как правило, имеет переменные параметры, то определение динамических свойств системы по временным или частотным характеристикам должно производиться возможно

более быстро, чтобы можно было выявить свойства объекта в текущий момент времени. С другой стороны, все указанные выше методы требуют некоторого конечного времени, определяемого необходимостью накопления сигналов на фоне шумов. Так, например, при корреляционном методе время самонастройки обычно значительно превышает время переходного процесса, определяемое по затуханию весовой функции (25.30).

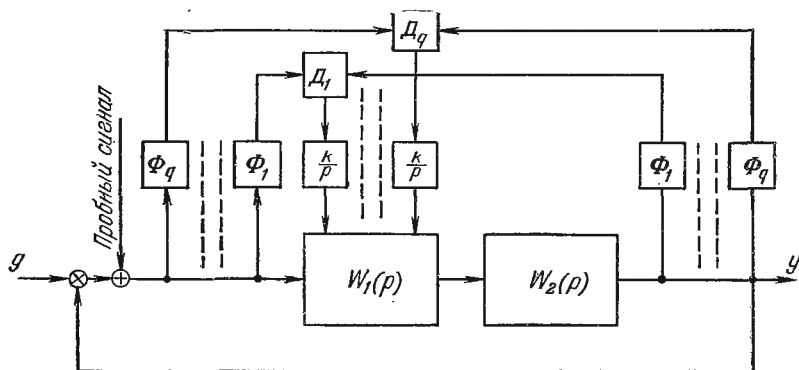


Рис. 25.12.

На рис. 25.12 в качестве примера изображена схема самонастраивающейся системы с определением амплитудных частотных характеристик. Работа схемы происходит следующим образом. На вход системы поступает пробный сигнал, содержащий фиксированные частоты $\omega_1, \dots, \omega_q$. Эти частоты на входе и выходе системы выделяются узкополосными фильтрами Φ , а затем в делительных устройствах D происходит деление выходной амплитуды на входную. Это дает фиксированные точки амплитудной частотной характеристики (или л. а. х.) на пробных частотах $\omega_1, \dots, \omega_q$. В случае отклонения частотной характеристики от заданного значения сигнал с выхода делительного устройства поступает через усилитель на исполнительный элемент, представляющий собой интегратор, который воздействует на корректирующее устройство с целью восстановления требуемого значения модуля частотной передаточной функции на данной частоте.

Нетрудно видеть, что процесс самонастройки в этой системе в некотором роде подобен автоматическому синтезу системы регулирования по ее частотным характеристикам. Число дискретных частот пробного сигнала определяется сложностью регулируемого объекта. Оно совпадает с числом опорных точек логарифмической амплитудной характеристики, которое надо иметь, чтобы осуществить синтез системы по методу л.а. х.

Таким образом, самонастраивающиеся системы этого типа (рис. 25.11) представляют собой, по существу, устройства автоматического синтеза систем регулирования по заданным качественным показателям.

Системы с экстремальной самонастройкой. Эти системы отличаются от рассмотренных выше систем с замкнутыми цепями самонастройки тем, что в них автоматически осуществляется оптимальный синтез системы автоматического регулирования. Структурная схема в этом случае совпадает со схемой, изображенной на рис. 25.11.

Для реализации оптимального синтеза в основу работы вычислительного устройства должен быть положен некоторый критерий оптимальности. При расчете систем автоматического регулирования часто используется критерий минимума среднеквадратичной ошибки, когда минимизируется

средний квадрат ошибки:

$$\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2 dt. \quad (25.31)$$

Очевидно, что реализовать эту оценку для самонастраивающейся системы затруднительно. Это связано, во-первых, с тем, что необходимо вычисление интеграла (25.31) в бесконечных пределах, и, во-вторых, с тем, что оценка остается неизменной во все время работы системы.

Практически легко реализуется минимизация оценки вида

$$F = \int_0^t x^2(\tau) e^{\frac{\tau-t}{T}} d\tau. \quad (25.32)$$

Устройство, реализующее выражение (25.32), представляет собой квадрат (звено, возводящее входную величину в квадрат) и последовательно включенное апериодическое звено с постоянной времени T . Функция веса такого звена

$$w(t) = e^{-\frac{t}{T}}.$$

Выходная величина этого устройства, записанная при помощи интеграла Дюамеля, совпадает с (25.32).

Постоянная времени T апериодического звена, которое является фильтром нижних частот, должна выбираться так, чтобы устройства изменения параметров корректирующего звена практически не реагировали на случайные быстрые изменения ошибки x .

Системы с экстремальной самонастройкой являются наиболее совершенными самонастраивающимися системами. Они обеспечивают оптимальную настройку системы в условиях изменения характеристик объекта, регулятора и возмущающих сил. Однако они являются наиболее сложными системами и их реализация сталкивается пока со значительными техническими трудностями.

Самонастраивающиеся системы с экстремальной настройкой относятся к категории экстремальных систем с поиском минимума или максимума некоторой величины, определяющей оптимум работы системы. В качестве регулируемых величин $y_1, \dots, y_n$ здесь выступают параметры корректирующего устройства, например общий коэффициент усиления, значения постоянных времени и передаточных коэффициентов и т. п. Исследование этих систем может производиться в соответствии с теорией экстремальных систем (§ 25.1).

Системы с самоорганизацией. Самоорганизующиеся системы по своей первоначальной структуре представляют собой набор элементов, связанных между собой случайным образом.

В дальнейшем при внешних возмущениях в них образуются устойчивые отрицательные и положительные обратные связи, подобно тому как в природе происходит приспособление живых организмов к различным внешним условиям. Для живых организмов также характерны отрицательные обратные связи, в результате которых эти организмы «уравновешивают» неблагоприятные внешние воздействия, и положительные обратные связи, усиливающие благоприятные воздействия.

Самоорганизующимся системам свойственна большая универсальность (приспособляемость) и большая надежность по сравнению с обычными системами.

Самоорганизующиеся системы еще не получили распространения, и работа с ними не выходит пока из стадии первых опытов. Так, например,

в литературе [47] описывается моделирование на математической машине ИБМ-704 процесса поиска методов решения новой задачи. В машину вводилось много различных программ, в том числе бессмысленные, и ставилась задача. Машина решала задачу наугад, чаще всего неправильно. Результат решения оценивался, и на основе оценки изменялся метод решения. После нескольких сотен тысяч попыток у машины «накопился опыт» и появилось суждение о правильном методе решения. В дальнейшем она придерживалась этого метода, несколько изменяя его, если изменялись условия.

Задача, которая ставилась машине, состояла в обработке 14-значного числа посредством 63 математических операций. Авторы эксперимента считают, что проще построить машину, способную самостоятельно выработать методику решения, чем точно составить алгоритмы этого решения.

Опыты с самоорганизующимися системами, несомненно, могут принести большую пользу конструкторам сложных систем управления, так как высшая стадия развития жизни на Земле — человек, — по сути дела, возникла на основе принципов самоорганизации неживой природы. Использование этих принципов может привести к весьма совершенным, надежным и универсальным системам управления.

Игровые системы. Игровые системы используются для управления различного рода операциями и, в частности, военными операциями. «Игра» или «борьба» может вестись против организованного противника или против сил природы (случайного процесса).

На рис. 25.13 изображена структурная схема игровой системы. Управляющая машина этой системы имеет так называемый игровой алгоритм. Он заключается в сравнении возможных в данной обстановке решений

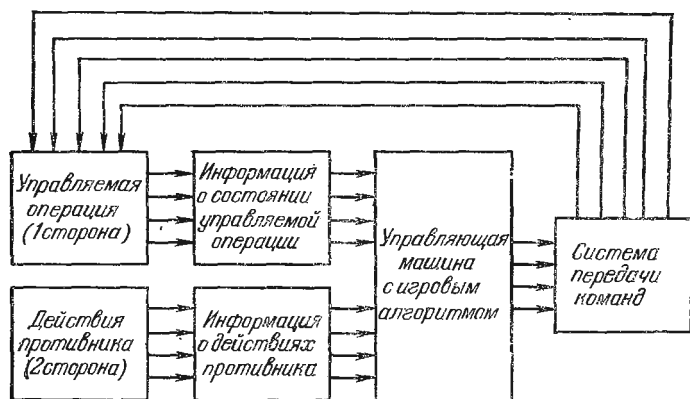


Рис. 25.13.

и выборе из большого числа решений оптимального. После принятия решения управляющая машина должна сформировать и передать к управляемой операции команды управления.

Сравнение вариантов решений делается управляющей машиной на основе заложенных в нее критериев. Эти критерии выражаются в виде некоторой функции, которую называют функцией выгоды. Установление рациональной функции представляет собой основную проблему при построении игровых систем.

При исследовании игровых систем в настоящее время используется специальная математическая дисциплина — теория игр. Главным содержанием теории игр является обоснование так называемых оптимальных стратегий ведения игры.

Наиболее полно теория игр разработана для конечных игр, для которых характерно конечное число ходов и, следовательно, конечное число возможных стратегий.

В управляющих машинах в настоящее время используются игровые алгоритмы двух видов.

Игровые алгоритмы первого вида используются в системах с набором шаблонных решений. Идея здесь заключается в том, что все возможные решения заранее исследуются и нумеруются. Задачей управляющей машины является выбор такого решения, для которого в сложившейся ситуации будет получено максимальное значение функции выгоды. Недостатком такого принципа является малая гибкость и приспособляемость игровой системы в условиях широкого изменения складывающейся обстановки ведения игры.

В игровых системах второго вида используется идея динамического программирования. Для динамического программирования характерным является решение задачи оптимальности по отдельным этапам и шагам. Поиск оптимального выбора на каждом этапе осуществляется управляющей машиной. Процесс управления в игровой системе с динамическим программированием является замкнутым дискретным процессом. Результат выполнения команд управления на предыдущем этапе является исходным для формирования команд управления на следующем этапе.

Игровые системы автоматического управления являются высшими формами систем управления вообще. Следует ожидать, что в ближайшем будущем они могут найти применение как в военной технике, так и в народном хозяйстве.

Наиболее разработана теория так называемых *дифференциальных игр*. К ним относятся: задача преследования одного управляемого объекта другим, задача приведения управляемого объекта в некоторое заданное состояние при действии заранее неизвестных возмущений, задача управления объектом при неполной текущей информации о его состоянии и другие родственные задачи. Предполагается при этом, что отыскиваются оптимальные решения всех этих задач. Наиболее полно теория дифференциальных игр разработана в монографии Н. Н. Красовского [64].

Обычно рассматривается следующая конфликтная ситуация. Два партнера (игрока) могут управлять процессами в некоторой динамической системе, которая описывается дифференциальными уравнениями, представленными в матричной форме:

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad (25.33)$$

где x — совокупность фазовых координат, u и v — управления, которыми могут распоряжаться соответственно первый и второй игроки. Так, например, если рассматривается преследование одного управляемого объекта другим, то x соответствует совокупности фазовых координат двух объектов, а u и v — управления одного и другого объектов.

Игра начинается в момент $t = t_0$ и считается законченной при $t = t_1$, когда точка (t, x) попадает на заданное многообразие N в рассматриваемом фазовом пространстве.

Задача первого игрока — закончить игру с минимальным значением показателя качества (функционала), называемого также *платой за игру*,

$$I = \int_{t_0}^{t_1} I_1(t, x, u, v) dt + I_2[x(t_1)], \quad (25.34)$$

где I_1 и I_2 — известные функции.

Задача второго игрока — помешать приведению точки (t, x) на заданное многообразие N или, при невозможности достичь этого, по крайней мере увеличить плату за игру (25.34).

Ограничения, которые обычно имеют место, задаются в большинстве случаев в виде ограничений на возможные управления: $u \in \tilde{U}$ и $v \in \tilde{V}$, где $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ — некоторые замкнутые области в пространствах управлений u и v . Могут существовать ограничения и для фазовых координат.

Пусть U и V — допустимые стратегии, которые могут выбирать игроки. Если первый игрок выбрал стратегию $U = U_*$, то наихудший результат для него будет при выборе вторым игроком стратегии $V = V^*$, максимизирующей плату за игру (25.34),

$$I(U_*, V^*) = \max_V I(U_*, V) = \eta(U_*). \quad (25.35)$$

Величина $\eta(U_*)$ соответствует самому большому проигрышу первого игрока, если он принял $U = U_*$. Естественно, что первый игрок будет искать такую стратегию $U = U^0$, для которой $\eta(U^0) = \min \eta(U)$ для всех допустимых стратегий U . Из этого следует, что первый игрок должен выбирать стратегию из условия

$$\eta(U^0) = \min_U \max_V I(U, V), \quad (25.36)$$

что соответствует оптимальному решению так называемой *минимаксной задачи*. Так как возможен случай, когда в допустимых стратегиях V нет такой стратегии V^* , которая давала бы максимум выражению (25.35), то формулу (25.36) следует записать в виде

$$\eta(U^0) = \min_U \sup_V I(U, V). \quad (25.37)$$

Для второго игрока аналогичным образом необходимо найти оптимальную *максиминную* стратегию $V = V^0$ из условий

$$\psi(V^0) = \max_V \psi(V), \quad \psi(V) = \inf_U I(U, V). \quad (25.38)$$

В этом случае второй игрок обеспечит себе выигрыш не меньше значения

$$\psi(V^0) = \max_V \inf_U I(U, V). \quad (25.39)$$

Первый игрок не может иметь гарантии, что его проигрыш будет меньше, чем минимальный выигрыш $\psi(V^0)$, который в соответствии с (25.39) гарантируется второму игроку. Поэтому $\eta(U^0) \geq \psi(V^0)$. В случае равенства $\eta(U^0) = \psi(V^0)$ возникает так называемая *седловая точка игры*, для которой

$$I(U^0, V) \leq I(U^0, V^0) \leq I(U, V^0), \quad (25.40)$$

а также

$$\min_U \max_V I(U, V) = \max_V \min_U I(U, V) = I(U^0, V^0). \quad (25.41)$$

Оптимальные стратегии U^0 и V^0 , соответствующие седловой точке игры, определяют для каждого игрока наилучший способ действий. Отклонение любого из игроков от оптимальной стратегии (при условии, что второй игрок придерживается своей оптимальной стратегии) может только ухудшить его результат.

Оптимальные минимаксная и максиминная стратегии U^0 и V^0 , не соответствующие седловой точке игры, не обладают подобным свойством.

Примеры дифференциальных игр и методы решения таких задач, как конфликтная задача сближения, игровая задача наведения, информационная игровая задача, задача оптимального преследования и уклонения и др. изложены в работе [64].

ТАБЛИЦА h -ФУНКЦИЙ

$\frac{x_i}{t}$	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	0,138	0,165	0,176	0,184	0,192	0,199	0,207	0,215	0,223	0,231	0,240	0,248	0,255	0,259	0,267	0,275	0,282	0,290	0,297	0,304	0,314
1,0	0,340	0,326	0,340	0,356	0,371	0,386	0,401	0,417	0,432	0,447	0,461	0,476	0,490	0,505	0,519	0,534	0,547	0,562	0,575	0,593	0,603
1,5	0,449	0,469	0,494	0,516	0,538	0,560	1,594	0,603	0,617	0,646	0,665	0,685	0,706	0,722	0,740	0,758	0,776	0,794	0,813	0,832	0,844
2,0	0,572	0,597	0,628	0,655	0,683	0,709	0,681	0,761	0,786	0,810	0,833	0,856	0,878	0,899	0,919	0,938	0,956	0,974	0,986	1,003	1,020
2,5	0,674	0,707	0,739	0,774	0,802	0,833	0,862	0,891	0,917	0,943	0,967	0,985	1,010	1,030	1,050	1,067	1,084	1,090	1,105	1,120	1,133
3,0	0,755	0,790	0,828	0,863	0,896	0,928	0,958	0,987	1,013	1,038	1,061	1,082	1,100	1,117	1,130	1,142	1,154	1,164	1,172	1,176	1,178
3,5	0,783	0,853	0,892	0,928	0,963	0,994	1,024	1,050	1,074	1,095	1,115	1,132	1,145	1,158	1,161	1,166	1,171	1,174	1,175	1,175	1,175
4,0	0,857	0,896	0,938	0,974	1,008	1,039	1,060	1,090	1,107	1,124	1,142	1,152	1,158	1,159	1,160	1,161	1,156	1,149	1,141	1,131	1,118
4,5	0,883	0,923	0,960	0,997	1,029	1,057	1,080	1,100	1,115	1,129	1,134	1,138	1,138	1,134	1,132	1,127	1,111	1,099	1,085	1,071	1,053
5,0	0,896	0,936	0,978	1,012	1,042	1,067	1,087	1,103	1,112	1,117	1,118	1,115	1,107	1,098	1,084	1,069	1,053	1,037	1,019	1,001	0,986
5,5	0,900	0,940	0,986	1,019	1,046	1,067	1,083	1,093	1,095	1,097	1,092	1,083	1,070	1,050	1,032	1,016	0,994	0,979	0,962	0,951	0,932
6,0	0,904	0,942	0,982	1,013	1,037	1,054	1,065	1,070	1,068	1,062	1,051	1,037	1,021	1,003	0,984	0,956	0,949	0,934	0,922	0,920	0,906
6,5	0,904	0,943	0,980	1,009	1,030	1,043	1,050	1,049	1,043	1,033	1,018	1,001	0,982	0,946	0,948	0,936	0,920	0,910	0,903	0,903	0,905
7,0	0,904	0,944	0,979	1,006	1,024	1,035	1,037	1,033	1,023	1,009	0,993	0,975	0,957	0,941	0,927	0,917	0,911	0,908	0,909	0,915	0,925
7,5	0,907	0,945	0,980	1,006	1,019	1,025	1,025	1,017	1,005	0,989	0,974	0,958	0,944	0,926	0,922	0,911	0,920	0,927	0,934	0,946	0,958
8,0	0,910	0,951	0,985	1,008	1,020	1,024	1,021	1,012	0,995	0,981	0,966	0,951	0,941	0,935	0,932	0,936	0,944	0,955	0,970	0,986	1,004
8,5	0,918	0,956	0,989	1,010	1,021	1,022	1,018	1,007	0,992	0,977	0,966	0,949	0,944	0,948	0,951	0,958	0,974	0,990	1,006	1,023	1,041
9,0	0,924	0,965	0,997	1,016	1,025	1,025	1,018	1,006	0,992	0,978	0,970	0,960	0,961	0,966	0,976	0,990	1,006	1,023	1,039	1,053	1,061
9,5	0,932	0,972	1,004	1,022	1,029	1,027	1,019	1,006	0,993	0,982	0,975	0,972	0,980	0,987	1,000	1,015	1,033	1,048	1,059	1,066	1,066
10,0	0,939	0,978	1,009	1,025	1,031	1,027	1,019	1,006	0,993	0,987	0,982	0,985	0,993	1,006	1,020	1,036	1,049	1,059	1,063	1,062	1,056
10,5	0,946	0,985	1,013	1,028	1,033	1,028	1,017	1,005	0,993	0,991	0,987	0,996	1,007	1,017	1,033	1,046	1,054	1,058	1,055	1,048	1,033
11,0	0,947	0,988	1,015	1,029	1,031	1,025	1,014	1,002	0,993	0,991	0,993	1,002	1,014	1,027	1,039	1,047	1,048	1,044	1,034	1,021	1,005
11,5	0,949	0,988	1,016	1,027	1,028	1,021	1,010	0,999	0,991	0,989	0,997	1,006	1,017	1,029	1,037	1,043	1,034	1,024	1,010	0,994	0,977
12,0	0,950	0,988	1,015	1,025	1,024	1,015	1,004	0,994	0,988	0,987	0,997	1,006	1,019	1,026	1,027	1,025	1,015	1,000	0,984	0,969	0,958
12,5	0,950	0,989	1,013	1,022	1,019	1,010	0,999	0,990	0,986	0,986	0,997	1,006	1,018	1,019	1,017	1,010	0,995	0,979	0,965	0,954	0,949

$\frac{x_i}{i}$	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
13,0	0,950	0,989	1,012	1,019	1,015	1,005	0,994	0,986	0,985	0,987	0,997	1,006	1,014	1,012	1,005	0,993	0,980	0,964	0,955	0,950	0,955
13,5	0,950	0,990	1,011	1,017	1,011	1,000	0,990	0,983	0,984	0,988	0,998	1,006	1,010	1,005	0,995	0,982	0,968	0,958	0,954	0,958	0,970
14,0	0,952	0,989	1,011	1,016	1,009	0,997	0,988	0,983	0,985	0,991	1,000	1,006	1,008	0,999	0,987	0,974	0,965	0,961	0,965	0,976	0,990
14,5	0,954	0,990	1,012	1,015	1,008	0,996	0,987	0,985	0,988	0,996	1,002	1,006	1,005	0,994	0,983	0,970	0,969	0,971	0,981	0,997	1,010
15,0	0,956	0,993	1,012	1,014	1,007	0,995	0,988	0,987	0,991	1,000	1,005	1,007	1,002	0,993	0,983	0,976	0,978	0,987	1,001	1,017	1,030
15,5	0,959	0,995	1,014	1,014	1,006	0,995	0,989	0,988	0,996	1,004	1,008	1,007	1,001	0,993	0,985	0,984	0,991	1,003	1,019	1,032	1,040
16,0	0,961	0,997	1,015	1,014	1,006	0,995	0,991	0,992	0,998	1,007	1,011	1,008	1,000	0,994	0,990	0,993	1,003	1,018	1,031	1,039	1,039
16,5	0,964	0,999	1,016	1,014	1,005	0,995	0,993	0,995	1,002	1,009	1,011	1,008	1,001	0,996	0,995	1,001	1,014	1,027	1,036	1,038	1,028
17,0	0,965	1,001	1,016	1,013	1,005	0,995	0,994	0,997	1,005	1,010	1,012	1,007	0,999	0,997	0,999	1,008	1,020	1,030	1,032	1,027	1,012
17,5	0,966	1,002	1,015	1,012	1,003	0,995	0,994	0,998	1,006	1,010	1,009	1,005	0,997	0,998	1,002	1,012	1,023	1,027	1,023	1,013	0,988
18,0	0,966	1,002	1,015	1,011	1,002	0,995	0,995	1,001	1,008	1,010	1,008	1,002	0,997	0,998	1,004	1,014	1,020	1,018	1,008	0,993	0,979
18,5	0,966	1,001	1,015	1,009	1,001	0,994	0,995	1,001	1,007	1,009	1,006	0,999	0,995	0,998	1,003	1,012	1,014	1,007	0,933	0,978	0,969
19,0	0,967	1,000	1,015	1,008	0,998	0,992	0,995	1,001	1,006	1,006	1,001	0,995	0,993	0,997	1,004	1,009	1,006	1,007	0,981	0,969	0,956
19,5	0,967	1,000	1,014	1,006	0,996	0,991	0,995	1,001	1,005	1,004	0,998	0,992	0,992	0,996	1,003	1,005	0,998	0,985	0,973	0,967	0,973
20,0	0,967	1,000	1,013	1,005	0,995	0,991	0,995	1,001	1,005	1,002	0,996	0,991	0,992	0,995	1,003	1,001	0,991	0,979	0,972	0,974	0,985
20,5	0,968	1,002	1,012	1,004	0,994	0,991	0,996	1,002	1,004	1,001	0,995	0,991	0,994	0,996	1,001	0,996	0,986	0,976	0,974	0,990	1,001
21,0	0,968	1,002	1,011	1,003	0,994	0,992	0,997	1,003	1,004	1,001	0,995	0,993	0,997	0,996	0,999	0,993	0,983	0,975	0,981	1,002	1,016
21,5	0,969	1,002	1,011	1,003	0,995	0,992	0,999	1,004	1,004	1,000	0,996	0,995	1,000	0,995	0,998	0,992	0,986	0,988	0,997	1,013	1,024
22,0	0,971	1,002	1,011	1,002	0,995	0,993	1,000	1,005	1,004	0,999	0,996	0,996	1,000	0,997	0,997	0,991	0,991	0,997	1,012	1,024	1,029
22,5	0,973	1,002	1,011	1,002	0,996	0,995	1,002	1,006	1,004	0,999	0,997	1,000	1,004	1,000	0,996	0,992	0,998	1,008	1,022	1,028	1,026
23,0	0,974	1,005	1,011	1,002	0,996	0,996	1,004	1,007	1,003	0,998	0,998	1,001	1,006	1,001	0,997	0,994	1,002	1,015	1,025	1,027	1,016
23,5	0,975	1,005	1,010	1,002	0,996	0,998	1,004	1,008	1,003	0,998	0,999	1,002	1,007	1,002	0,998	0,997	1,007	1,017	1,023	1,023	1,002
24,0	0,975	1,005	1,010	1,001	0,996	0,999	1,005	1,007	1,002	0,997	1,000	1,002	1,008	1,003	0,999	1,000	1,008	1,017	1,015	1,012	0,988
24,5	0,975	1,005	1,009	1,000	0,996	0,999	1,005	1,006	1,001	0,997	1,000	1,002	1,006	1,003	1,000	1,002	1,008	1,014	1,005	0,995	0,979
25,0	0,975	1,005	1,008	1,000	0,995	0,999	1,005	1,004	1,000	0,996	1,000	1,002	1,004	1,003	1,001	1,003	1,005	1,008	0,991	0,985	0,975
25,5	0,975	1,005	1,008	0,999	0,995	0,999	1,004	1,003	0,998	0,996	1,000	1,002	1,002	1,002	1,002	1,004	1,004	1,001	0,986	0,978	0,977
26,0	0,975	1,005	1,007	0,999	0,995	0,999	1,004	1,002	0,997	0,996	1,000	1,002	1,000	1,001	1,002	1,004	1,002	0,987	0,984	0,977	0,983

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\omega) d\omega}{A(j\omega) A(-j\omega)},$$

где

$$A(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$G(j\omega) = b_0(j\omega)^{2n-2} + b_1(j\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}$$

и все корни $A(j\omega)$ расположены в верхней полуплоскости;

$$I_1 = \frac{b_0}{2a_0a_1},$$

$$I_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0b_1}{a_2}}{2a_0a_1},$$

$$I_3 = \frac{-a_2b_0 + a_0b_1 - \frac{a_0a_1b_2}{a_3}}{2a_0(a_0a_3 - a_1a_2)},$$

$$I_4 = \frac{b_0(-a_1a_4 + a_2a_3) - a_0a_3b_1 + a_0a_1b_2 + \frac{a_0b_3}{a_4}(a_0a_3 - a_1a_2)}{2a_0(a_0a_3^2 + a_1^2a_4 - a_1a_2a_3)},$$

$$I_5 = \frac{M_5}{2a_0\Delta_5},$$

$$M_5 = b_0(-a_0a_4a_5 + a_1a_4^2 + a_2^2a_5 - a_2a_3a_4) + a_0b_1(-a_2a_5 + a_3a_4) +$$

$$+ a_0b_2(a_3a_5 - a_1a_4) + a_0b_3(-a_0a_3 + a_1a_2) +$$

$$+ \frac{a_0b_4}{a_5}(-a_0a_1a_5 + a_0a_3^2 + a_1^2a_4 - a_1a_2a_3),$$

$$\Delta_5 = a_0^2a_5^2 - 2a_0a_1a_4a_5 - a_0a_2a_3a_5 + a_0a_3^2a_4 + a_1^2a_4^2 + a_1a_2^2a_5 - a_1a_2a_3a_4,$$

$$I_6 = \frac{M_6}{2a_0\Delta_6},$$

$$M_6 = b_0(-a_0a_3a_5a_6 + a_0a_4a_5^2 - a_1^2a_6^2 + 2a_1a_2a_5a_6 + a_1a_3a_4a_6 -$$

$$- a_1a_4^2a_5 - a_2^2a_5^2 - a_2a_3^2a_6 + a_2a_3a_4a_5) + a_0b_1(-a_1a_5a_6 + a_2a_5^2 + a_3^2a_6 - a_3a_4a_5) +$$

$$+ a_0b_2(-a_0a_5^2 - a_1a_3a_6 + a_1a_4a_5) + a_0b_3(a_0a_3a_5 + a_1^2a_6 - a_1a_2a_5) +$$

$$+ a_0b_4(a_0a_1a_5 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 + a_1a_2a_3) + \frac{a_0b_5}{a_6}(a_0^2a_5^2 + a_0a_1a_3a_6 -$$

$$- 2a_0a_1a_4a_5 - a_0a_2a_3a_5 + a_0a_3^2a_4 - a_1^2a_2a_6 + a_1^2a_4^2 + a_1a_2^2a_5 - a_1a_2a_3a_4),$$

$$\Delta_6 = a_0^2 a_5^3 + 3a_0 a_1 a_3 a_5 a_6 - 2a_0 a_1 a_4 a_5^2 - a_0 a_2 a_3 a_5^2 - a_0 a_3^2 a_6 + a_0 a_3^2 a_4 a_5 + \\ + a_1^3 a_6^2 - 2a_1^2 a_2 a_5 a_6 - a_1^2 a_3 a_4 a_6 + a_1^2 a_4^2 a_5 + a_1 a_2^2 a_5^2 + a_1 a_2 a_3^2 a_6 - a_1 a_2 a_3 a_4 a_5,$$

$$I_7 = \frac{M_7}{2a_0 \Delta_7},$$

где

$$M_7 = b_0 m_0 + a_0 b_1 m_1 + a_0 b_2 m_2 + \dots + a_0 b_6 m_6,$$

$$m_0 = a_0^2 a_6 a_7^2 - 2a_0 a_1 a_6^2 a_7 - 2a_0 a_2 a_4 a_7^2 + a_0 a_2 a_5 a_6 a_7 + a_0 a_3 a_5 a_6^2 + a_0 a_4^2 a_5 a_7 - \\ - a_0 a_4 a_5^2 a_6 + a_1^3 a_6^3 + 3a_1 a_2 a_4 a_6 a_7 - 2a_1 a_2 a_5 a_6^2 - a_1 a_3 a_4 a_6^2 - a_1 a_4^3 a_7 + a_1 a_4^2 a_5 a_6 + \\ + a_2^2 a_7^2 - 2a_2^2 a_3 a_6 a_7 - a_2^2 a_4 a_5 a_7 + a_2^2 a_5^2 a_6 + a_2 a_3 a_4^2 a_7 - a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 - a_2 a_3^2 a_6^2,$$

$$m_1 = a_0 a_4 a_7^2 - a_0 a_5 a_6 a_7 - a_1 a_4 a_6 a_7 + a_1 a_5 a_6^2 - a_2^2 a_7^2 + 2a_2 a_3 a_6 a_7 + \\ + a_2 a_4 a_5 a_7 - a_2 a_5^2 a_6 - a_3^2 a_6^2 - a_3 a_4^2 a_7 + a_3 a_4 a_5 a_6,$$

$$m_2 = a_0 a_2 a_7^2 - a_0 a_3 a_6 a_7 - a_0 a_4 a_5 a_7 + a_0 a_5^2 a_6 - a_1 a_2 a_6 a_7 + a_1 a_3 a_6^2 + a_1 a_4^2 a_7 - a_1 a_4 a_5 a_6,$$

$$m_3 = -a_0^2 a_7^2 + 2a_0 a_1 a_6 a_7 + a_0 a_3 a_4 a_7 - a_0 a_3 a_5 a_6 - a_1^2 a_6^2 - a_1 a_2 a_4 a_7 + a_1 a_2 a_5 a_6,$$

$$m_4 = a_0^2 a_5 a_7 - a_0 a_1 a_4 a_7 - a_0 a_1 a_5 a_6 - a_0 a_2 a_3 a_7 + a_0 a_3^2 a_6 + a_1^2 a_4 a_6 + a_1 a_2^2 a_7 - a_1 a_2 a_3 a_6,$$

$$m_5 = a_0^2 a_3 a_7 - a_0^2 a_5^2 - a_0 a_1 a_2 a_7 - a_0 a_1 a_3 a_6 + 2a_0 a_1 a_4 a_5 + a_0 a_2 a_3 a_5 - \\ - a_0 a_3^2 a_4 + a_1^2 a_2 a_6 - a_1^2 a_4^2 - a_1 a_2^2 a_5 + a_1 a_2 a_3 a_4,$$

$$m_6 = \frac{1}{a_7} (a_0^2 a_1 a_7^2 - 2a_0^2 a_3 a_5 a_7 + a_0^2 a_5^3 - 2a_0 a_1^2 a_6 a_7 + a_0 a_1 a_2 a_5 a_7 + 3a_0 a_1 a_3 a_5 a_6 - \\ - 2a_0 a_1 a_4 a_5^2 + a_0 a_2 a_2^2 a_7 - a_0 a_2 a_3 a_5^2 - a_0 a_3^3 a_6 + a_0 a_3^2 a_4 a_5 + a_1^3 a_6^2 + a_1^2 a_2 a_4 a_7 - \\ - 2a_1^2 a_2 a_5 a_6 - a_1^2 a_3 a_4 a_6 + a_1^2 a_4^2 a_5 - a_1 a_2 a_3 a_7 + a_1 a_2^2 a_5^2 + a_1 a_2 a_3^2 a_6 - a_1 a_2 a_3 a_4 a_5),$$

$$\Delta_7 = -a_0^3 a_7^3 + 3a_0^2 a_1 a_6 a_7^2 + a_0 a_2 a_5 a_7^2 + 2a_0^2 a_3 a_4 a_7^2 - 3a_0^2 a_3 a_5 a_6 a_7 - a_0^2 a_4 a_5^2 a_7 + \\ + a_0^2 a_5^3 a_6 - 3a_0 a_1^2 a_6^2 a_7 - 3a_0 a_1 a_2 a_4 a_7^2 + a_0 a_1 a_2 a_5 a_6 a_7 + 3a_0 a_1 a_3 a_5 a_6^2 - a_0 a_1 a_3 a_4 a_6 a_7 + \\ + 2a_0 a_1 a_4^2 a_5 a_7 - 2a_0 a_1 a_4 a_5^2 a_6 - a_0 a_2^2 a_3 a_7^2 + 2a_0 a_2 a_3^2 a_6 a_7 + a_0 a_2 a_3 a_4 a_5 a_7 - \\ - a_0 a_2 a_3 a_5^2 a_6 - a_0 a_3^3 a_6^2 - a_0 a_3^2 a_4^2 a_7 + a_0 a_3^2 a_4 a_5 a_6 + a_1^3 a_6^3 + 3a_1^2 a_2 a_4 a_6 a_7 - 2a_1^2 a_2 a_5 a_6^2 - \\ - a_1^2 a_3 a_4 a_6^2 - a_1^2 a_4^2 a_7 + a_1^2 a_4^2 a_5 a_6 + a_1 a_2^3 a_7^2 - 2a_1 a_2^2 a_3 a_6 a_7 - a_1 a_2^2 a_4 a_5 a_7 + \\ + a_1 a_2^2 a_5^2 a_6 + a_1 a_2 a_3^2 a_6^2 + a_1 a_2 a_3 a_4^2 a_7 - a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6.$$

1. Айзерман М. А., Теория автоматического регулирования. Изд-во «Наука», 1966.
2. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Абсолютная устойчивость регулируемых систем. Изд-во АН СССР, 1963.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний. Изд. 2-е, Физматгиз, 1959.
4. Анцимов В. И., Вавилов А. А., Фатеев А. В., Сборник примеров и задач по линейной теории автоматического регулирования. Госэнергоиздат, 1959.
5. Беллман Р., Динамическое программирование. Изд-во иностр. литер., 1959.
6. Беллман Р., Процессы управления с адаптацией. Изд-во «Наука», 1964.
7. Беллман Р., Введение в теорию матриц. Изд-во «Наука», 1969.
8. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О., Некоторые вопросы математической теории процессов управления. Изд-во иностр. литер., 1962.
9. Беллман Р., Дрейфус С., Прикладные задачи динамического программирования. Изд-во «Наука», 1965.
10. Бесекерский В. А., Динамический синтез систем автоматического регулирования. Изд-во «Наука», 1970.
11. Под ред. Бесекерского В. А., Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления. Изд. 4-е, изд-во «Наука», 1972.
12. Бесекерский В. А., Востоков С. Б., Цейтлин Я. М., Электромеханические сглаживающие устройства. Изд-во «Судостроение», 1964.
13. Бесекерский В. А., Попов Е. П., Теория систем автоматического регулирования. Изд-во «Наука», 1966.
14. Бесекерский В. А., Фабрикант Е. А., Динамический синтез систем гироскопической стабилизации. Изд-во «Судостроение», 1968.
15. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 2-е, Физматгиз, 1958.
16. Боднер В. А., Теория автоматического управления полетом. Изд-во «Наука», 1964.
17. Боднер В. А. Системы управления летательными аппаратами. Изд-во «Машиностроение», 1973.
18. Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления. Изд-во «Наука», 1966.
19. Булгаков Б. В., Колебания. Гостехиздат, 1954.
20. Бутенин Н. В., Элементы теории нелинейных колебаний. Судпромгиз, 1962.
21. Быховский М. Л., Чувствительность и динамическая точность систем управления. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1964, № 6.
22. Вавилов А. А., Частотные методы расчета нелинейных систем. Изд-во «Энергия», 1970.
23. Ван-Трис Г., Синтез оптимальных нелинейных систем управления. Изд-во «Мир», 1969.
24. Васильев Д. Ф., Митрофанов Б. А., Рабкин Г. Л. и др., Проектирование и расчет следящих систем. Изд-во «Судостроение», 1964.
25. Васильев Д. В., Чунч В. Г., Системы автоматического управления. Изд-во «Высшая школа», 1967.
26. Виленкин С. Я., Статистические методы исследования стационарных процессов и систем автоматического регулирования. Изд-во «Советское радио», 1967.
27. Власов Н. П., Теория линейных следящих систем, работающих на переменном токе. Изд-во «Энергия», 1964.
28. Воронов А. А., Основы теории автоматического управления. Часть I. Линейные системы регулирования одной величины. Изд-во «Энергия», 1965.
29. Воронов А. А., Основы теории автоматического управления. Часть II. Специальные линейные и нелинейные системы автоматического регулирования одной величины. Изд-во «Энергия», 1966.
30. Воронов А. А., Основы теории автоматического управления. Часть III. Оптимальные, многосвязные и адаптивные системы. Изд-во «Энергия», 1970.

31. Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э., Математические основы теории управляемых систем. Изд-во «Наука», 1969.
32. Гольдфарб Л. С., О некоторых нелинейностях в системах регулирования. Автоматика и телемеханика, 1947, № 5.
33. Горская Н. С., Крутов И. Н., Рутковский В. Ю., Динамика нелинейных сервомеханизмов. Изд-во АН СССР, 1959.
34. Гузенко А. П., Основы автоматического регулирования. Изд-во «Наука», 1967.
35. Гусев В. Г., Методы исследования процессов управления и обработки информации в цифровых автоматических системах. Изд-во «Наука», 1972.
36. Гусев В. Г. Методы исследования точности цифровых автоматических систем. Изд-во «Наука», 1973.
37. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч., Пространство состояния в управлении. Изд-во «Наука», 1970.
38. Джеймс Х., Никольс Н., Филипс Р., Теория следящих систем. Изд-во иностр. литер., 1953.
39. Джури Э., Импульсные системы автоматического регулирования. Физматгиз, 1963.
40. Джури Е. И., Цыпкин Я. З., Теория дискретных автоматических систем (обзор). Автоматика и телемеханика, 1970, № 6.
41. Егоров К. В., Основы теории автоматического регулирования. Изд-во «Энергия», 1967.
42. Емельянов С. В., Системы автоматического управления с переменной структурой. Изд-во «Наука», 1967.
43. Под ред. Емельянова С. В., Теория систем с переменной структурой. Изд-во «Наука», 1970.
44. Зубов В. И., Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Судпромгиз, 1959.
45. Зубов В. И., Колебания в нелинейных и управляемых системах. Изд-во «Судостроение», 1962.
46. Зубов В. И., Теория оптимального управления. Изд-во «Судостроение», 1966.
47. Иващенко Н. Н. Автоматическое регулирование. Изд-во «Машиностроение», 1973.
48. Ишлинский А. Ю., Механика гироскопических систем. Изд-во АН СССР, 1963.
49. Казаков И. Е., Доступов В. Г., Статистическая динамика нелинейных систем. Физматгиз, 1962.
50. Калман Р. Е., Об общей теории систем управления. Труды I конгресса ИФАК, т. 2, Изд-во АН СССР, 1961.
51. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А., Многомерные дискретные системы управления. Изд-во «Наука», 1966.
52. Козлов Ю. М., Юсупов Р. М., Беспорядковые самонастраивающиеся системы. Изд-во «Наука», 1969.
53. Коршунов Ю. М., Математические основы кибернетики. Изд-во «Энергия», 1972.
54. Коршунов Ю. М., О построении эквивалентного комплексного коэффициента усиления нелинейного импульсного элемента. Автоматика и телемеханика, 1962, № 5.
55. Коршунов Ю. М., Бобиков А. И., Цифровые сглаживающие и преобразующие системы. Изд-во «Энергия», 1969.
56. Косякин А. А., Статистическая теория квантования по уровню. Автоматика и телемеханика, 1961, № 6.
57. Косякин А. А., Устойчивость и колебания цифровых автоматических систем. Автоматика и телемеханика, 1970, №№ 3 и 4.
58. Кочетков В. Т., Поцелуев А. В., Статистический синтез дискретных нелинейных систем управления. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1968, № 4.
59. Красовский А. А., О двухканальных системах автоматического регулирования с антисимметричными связями. Автоматика и телемеханика, 1957, № 2.
60. Красовский А. А., Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами. Изд-во «Машиностроение», 1969.
61. Красовский А. А., Поспелов Г. С., Основы автоматики и технической кибернетики. Госэнергоиздат, 1962.
62. Красовский Н. Н., К теории оптимального регулирования. Прикладная математика и механика, 1959, № 4.
63. Красовский Н. Н., Теория управления движением. Изд-во «Наука», 1968.
64. Красовский Н. Н., Игровые задачи о встрече движений. Изд-во «Наука», 1970.
65. Красовский Н. Н., Моисеев Н. Н., Теория оптимальных управляемых систем. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1967, № 5.

66. К р и н е ц к и й И. И., Расчет нелинейных автоматических систем. Гостехиздат УССР, 1962.
67. К р у г Е. К., А л е к с а н д р и д и Т. М., Д и л и г е н с к и й С. Н., Цифровые регуляторы. Госэнергоиздат, 1966.
68. К р у т ь к о П. Д., Дискретный аналог δ -функции Дирака. Автоматика и телемеханика, 1962, № 7.
69. К р у т ь к о П. Д., Статистическая динамика импульсных систем. Изд-во «Советское радио», 1963.
70. К р у т ь к о П. Д., Вариационные методы синтеза систем с цифровыми регуляторами. Изд-во «Советское радио», 1967.
71. К у з н и щ и к Л. Т., Расчет и проектирование дискретных систем управления. Машгиз, 1962.
72. К у з о в к о в Н. Т., Динамика систем автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1968.
73. К у р о п а т к и н П. В., Теория автоматического управления. Изд-во «Высшая школа», 1973.
74. К у х т е н к о А. И., Проблема инвариантности в автоматике. Гостехиздат УССР, 1963.
75. Под ред. Л е о н д е с а К. Т., Современная теория систем управления. Изд-во «Наука», 1970.
76. Л е т о в А. М., Устойчивость нелинейных регулируемых систем. Физматгиз, 1962.
77. Л е т о в А. М., Динамика полета и управление. Изд-во «Наука», 1969.
78. Л и в ш и ц Н. А., П у г а ч е в В. Н., Вероятностный анализ систем автоматического управления, т. 1 и 2. Изд-во «Советское радио», 1963.
79. Л о й ц я н с к и й Л. Г., Л у р ь е А. И., Курс теоретической механики, т. II. Гостехиздат, 1955.
80. Л у р ь е А. И., Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. Гостехиздат, 1950.
81. Л у р ь е А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.
82. Л я п у н о в А. М., Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
83. М е е р о в М. В., Системы многосвязного регулирования. Изд-во «Наука», 1965.
84. М е р р и з м К., Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью. Изд-во «Мир», 1967.
85. Под ред. М и ш к и н а Э. и Б р а у н а Л., Приспосабливающиеся автоматические системы. Изд-во иностр. лит-ры, 1963.
86. Н е л е п и п Р. А., Точные аналитические методы в теории нелинейных автоматических систем. Изд-во «Судостроение», 1967.
87. Под ред. Н е т у ш и л а А. В., Теория автоматического управления, ч. 1 и 2. Изд-во «Высшая школа», 1968, 1972.
88. Н и к о л а е в Ю. А., П е т у х о в В. П., Ф е к л и с о в Г. Н., Ч е м о д а н о в Б. К., Динамика цифровых следящих систем. Изд-во «Энергия», 1970.
89. Н ь ю т о н Д., Г у л д А., К а й з е р Д., Теория линейных следящих систем. Физматгиз, 1961.
90. О п п е л ь т В., Основы техники автоматического регулирования. Госэнергоиздат, 1960.
91. П а в л о в А. А., Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию. Изд-во «Наука», 1966.
92. П е р в о з в а н с к и й А. А., Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. Физматгиз, 1962.
93. П е р о в В. П., Статистический синтез импульсных систем. Изд-во «Советское радио», 1959.
94. Под ред. П е т р о в а Б. Н., Автоматическая оптимизация управляемых систем. Изд-во иностр. лит-ры, 1960.
95. Под ред. П е т р о в а Б. Н., С о л о д о в н и к о в а В. В., Т о п ч и е в а Ю. И., Современные методы проектирования систем автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1967.
96. П о н т р я г и н Л. С., Б о л ь т я н с к и й В. Г., Г а м к р е л и д з е Р. В., М и щ е н к о Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.
97. П о п о в В. М., Гиперустойчивость автоматических систем. Изд-во «Наука», 1970.
98. П о п о в Е. П., Динамика систем автоматического регулирования. ГИТТЛ, 1954.
99. П о п о в Е. П., Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. Изд-во «Наука», 1973.
100. П о п о в Е. П., П а л ь т о в И. П., Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1960.
101. Под ред. П о п о в а Е. П. и Т о п ч и е в а Ю. И., Метод гармонической линеаризации в проектировании нелинейных систем. Изд-во «Машиностроение», 1970.

102. Под ред. Попова Е. П. и Топчиева Ю. И., Нелинейные корректирующие устройства в системах автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1970.
103. Под ред. Попова Е. П. и Федорова С. М., Методы синтеза нелинейных систем автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1970.
104. Под ред. Попова Е. П. и Нелемина Р. А., Точные методы исследования нелинейных систем автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1970.
105. Под ред. Попова Е. П. и Пономарева В. М., Нелинейная оптимизация систем автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1970.
106. Под ред. Попова Е. П. и Доступова Б. Г., Статистические методы в проектировании нелинейных систем автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1970.
107. Поспелов Г. С., Импульсные системы автоматического регулирования. В сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», вып. 3, Машгиз, 1950.
108. Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Физматгиз, 1963.
109. Под ред. Пугачева В. С., Основы автоматического управления. Изд-во «Наука», 1974.
110. Пупков К. А., Статистический расчет нелинейных систем автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1965.
111. Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М., Чувствительность систем автоматического управления. Изд-во «Энергия», 1969.
112. Ротач В. Я., Импульсные системы автоматического регулирования. Изд-во «Энергия», 1964.
113. Свешников А. А., Прикладные методы теории случайных функций. Судпромгиз, 1961.
114. Серебренников М. Г., Гармонический анализ. Гостехиздат, 1948.
115. Сигалов Г. Г., Мадорский Л. С., Основы теории дискретных систем управления. Изд-во «Высшая школа», 1973.
116. Смит О. Дж. М., Автоматическое регулирование. Физматгиз, 1962.
117. Соколов Т. Н., Электромеханические системы автоматического управления. Госэнергоиздат, 1952.
118. Солодов А. В., Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. Физматгиз, 1962.
119. Солодов А. В., Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления и контроля. Изд-во «Наука», 1967.
120. Солодовников В. В., Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. Физматгиз, 1960.
121. Под ред. Солодовникова В. В., Теория автоматического регулирования. Книги I, II и III. Изд-во «Машиностроение», 1967.
122. Старикова М. В., Автоколебания и скользящий режим в системах автоматического регулирования. Машгиз, 1962.
123. Торо В. Д., Паркер С. Р., Принципы проектирования систем автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1963.
124. Траксел Дж., Синтез систем автоматического регулирования. Машгиз, 1959.
125. Под ред. Траксела Дж. Дж., Справочная книга по технике автоматического регулирования. Госэнергоиздат, 1962.
126. Ту Ю. Т., Цифровые и импульсные системы автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1964.
127. Тэлор Дж., Пестель М., Анализ и расчет нелинейных систем автоматического управления. Изд-во «Энергия», 1964.
128. Удерман Э. Г., Метод корневого годографа в теории автоматического управления. Госэнергоиздат, 1963.
129. Уланов Г. М., Регулирование по возмущению. Госэнергоиздат, 1960.
130. Фатеев А. В., Основы линейной теории автоматического регулирования. Госэнергоиздат, 1959.
131. Федоров С. М., Литвинов А. П., Автоматические системы с цифровыми управляющими машинами. Изд-во «Энергия», 1965.
132. Фельдбаум А. А., Вычислительные устройства в автоматических системах. Физматгиз, 1959.
133. Хлыпало Е. Н., Нелинейные системы автоматического регулирования. Изд-во «Энергия», 1967.
134. Хлыпало Е. И., Нелинейные корректирующие устройства в автоматических системах. Изд-во «Энергия», 1973.
135. Цыпкин Я. З., Теория релейных систем автоматического регулирования. Гостехиздат, 1955.
136. Цыпкин Я. З., Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, 1963.
137. Цыпкин Я. З., Попков Ю. С., Теория нелинейных импульсных систем. Изд-во «Наука», 1973.
138. Цыпкин Я. З., Основы теории обучающихся систем. Изд-во «Наука», 1970.

139. Ч а н г Ш е л д о н С. Л., Синтез оптимальных систем автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1964.
140. Ч е р н е ц к и й В. И., Д и д у к Г. А., П о т а п е н к о А. А., Математические методы и алгоритмы исследования автоматических систем. Изд-во «Энергия», 1970.
141. Ч е с т н а т Г., М а й е р Р., Проектирование и расчет следящих систем и систем регулирования, части 1 и 2. Госэнергоиздат, 1959.
142. Ч е т а е в Н. Г., Устойчивость движения. Гостехиздат, 1946.
143. Под ред. Ш а т а л о в а А. С., Задачник по теории автоматического управления. Изд-во «Энергия», 1971.
144. Ю р е в и ч Е. И., Теория автоматического управления. Изд-во «Энергия», 1969.
145. B e l l m a n R., Stability Theory of Differential Equations. McGraw-Hill, New York, 1953. Русский перевод: Б е л л м а н Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. ИЛ, 1954.
146. E v a n s W. R., Control System Dynamics. New York, 1954.
147. G e l b A., V a n d e r - V e l d e W. E., The multiple input describing funktion in nonlinear system design. McGraw-Hill, New York, 1968.
148. I s a a c s R., Differential Games. Wiley, New York, 1965.
149. J u r y E. I., Theory and Applications of the z-Transform Method. Wiley, New York, 1964.
150. S a v a n t C. J., Basic Feedback Control Systems Design. New York, 1958.
151. S i l j a k D. D., Nonlinear systems. John Wiley & Sons, New York, London, 1969.
152. T o u J. T., Modern Control Theory. McGraw-Hill, New York, 1964.
153. Z a d e h L. A., D e s o e r C. A., Linear Systems Theory. McGraw-Hill, New York, 1963. Русский перевод: З а д е Л., Д е з о е р Ч., Теория линейных систем. Изд-во «Наука», 1970.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютная псевдочастота 464, 707
 — устойчивость 521
 Абсцисса абсолютной сходимости 177
 Автоколебания 487, 504, 528, 582, 594
 и д., 602 и д., 719
 — несимметричные 602
 Автоколебательная система регулирования
 602 и д.
 Автокорреляционная функция 310
 Автоматическая система — см. Система
 автоматическая
 Автоматический поиск 40, 739
 — регулятор 12
 — синтез 745
 Автопилот 13, 522, 529, 535
 Адаптивная система 14, 48
 Алгоритм игровой 748
 Амплитудная характеристика 64, 236
 — — логарифмическая 65, 161, 701
 — — — асимптотическая 71, 72
 — — — желаемая 351
 — — — нормированная 76
 — — — располагаемая 350
 Амплитудно-фазовая характеристика 63,
 149
 — — логарифмическая 68
 Анализатор 43, 45, 47
 Аналитическое конструирование регулято-
 ров 387
 Аналоговый процесс 187
 Антивибратор 269, 270
 Антисимметричные связи 165
 Аперiodическая граница устойчивости 140
 Аперiodическое звено второго порядка 72
 — — первого порядка 69
 Аппроксимация Бриллюэна — Вентцеля —
 Крамера 398
 Асимптотическая устойчивость 134, 515
 Астатизм 110, 111, 203
 — второго порядка 155, 361
 — первого порядка 365
 —, повышение порядка 244
 Астатическая система 203, 602

 Базис векторный 123
 Башкирова метод 170, 401, 633
 Безынерционное звено 69
 Бел 65
 Беллмана метод 383, 748
 — уравнение 387
 Белый шум 320
 — — с ограниченной спектральной плот-
 ностью 321
 Бесселя формула 721
 Бифуркация 510, 511
 Блок автоматической системы 15

 Боковые частоты 94
 Бриллюэна — Вентцеля — Крамера аппрок-
 симация 398
 Быстродействие 201, 209, 214

 Вариационная задача 376, 378
 — — со свободным концом траектории
 383
 Варьированная система 239
 Вектор возмущения 120
 — математических ожиданий 305
 — случайных величин 305
 — управления 120
 Векторное пространство возмущения 123
 — — выходных величин 123
 — — состояния 123
 — — управления 123
 Величина входная 15
 — выходная 15
 — регулярная 12
 — случайная 293
 — — векторная 305
 — — дискретная 294
 — — непрерывная 299
 Вероятность 294
 Вертикаль инерциальная 257
 Вершина графа 118
 Вещественная частотная характеристика
 65, 210
 Взаимная корреляционная функция 310,
 314, 469
 Вибрации 660 и д.
 Вибрационное сглаживание нелинейностей
 (вибрационная линеаризация) 612, 613,
 662
 Видоизмененная частотная характеристика
 534
 Винара задача 335, 378
 Винара — Хопфа уравнение 335
 Возбуждение автоколебаний жесткое 560
 Воздействие возмущающее 12
 — задающее 12
 — регулирующее 12
 — случайное 293 и д.
 Возмущения 134
 Возмущенное движение 133, 134
 Волновое уравнение 420
 Временное запаздывание 413, 553, 599, 696
 Время запаздывания 210, 413
 — нарастания 210
 — переходного процесса 209
 Вход 15
 Вынужденные колебания 648 и д., 654
 Высшие гармоники 541, 582
 Выход 15
 Вышнеградского диаграмма 220

- Гамильтона уравнения 684
 Гармоники высшие 541, 582
 Гармоническая линеаризация 541, 624
 — — в цифровых системах 719
 — — при несимметричных колебаниях 616
 Гармонический закон 205
 Гаусса — Зайделя метод 735
 Гаусса закон 302
 Гидравлический демпфер 79, 83
 — серводвигатель 280
 Гиперповерхность 516
 Гипотеза эргодическая 309
 Гирскоп двухстепенный 273
 — трехстепенный 273
 Гирскопический элемент 74
 Гиростабилизация 13
 Гистерезисная петля 29, 487, 495, 617, 618, 671
 Годограф корневой 342
 Градиент функции 732
 Граница устойчивости 137, 218
 — — апериодическая 140
 — — колебательная 138, 140, 148, 154, 201, 360
 Граф 118
 Гурвица критерий устойчивости 139, 140
 — определитель 140, 216
 Датчик рассогласования 12
 Движение варьированное 239
 — возмущенное 133, 134
 — дополнительное 239
 — невозмущенное 133
 — основное 239
 — по гармоническому закону 205
 — с постоянной скоростью 204
 — с постоянным ускорением 205
 Декада 67
 Дельта-функция 59, 181, 187
 — четная 318
 Демодулятор фазочувствительный 264
 Демпфер гидравлический 79, 83
 Демпфирование 282
 — с введением отрицательных фазовых сдвигов 288
 — с подавлением высоких частот 283
 — — — средних частот 287
 — с подавлением высоких частот 285
 Детектирование синхронное 733
 Детектор синхронный 734
 Децибел 65
 Диаграмма Вышнеградского 220
 — качества затухания симметричных нелинейных колебаний 626
 — точечного преобразования 510
 Динамическая ошибка 34
 — — квадратичная 224
 Динамическое звено 56 и д.
 — программирование 383, 748
 Дискрета 432
 Дискретная коррекция 711
 — система 27, 693
 Дисперсия 297, 301, 667
 — оценки качества 242
 Дифференциальные игры 748
 Дифференциальный закон распределения 300
 Дифференциатор 272
 Дифференцирование статистическое 330
 Дифференцирующее звено 56
 — — идеальное 87
 — — пассивное 286
 — — с замедлением 87
 Дифференцирующий элемент 250
 Добротность по моменту 131
 — по скорости 110, 131, 132, 204, 466
 — по ускорению 248, 466
 Дюамеля — Карсона интеграл 60, 121
 D-разбиение 149, 217
 Единичная импульсная функция 59, 169, 187
 — ступенчатая функция 169
 — трапеция 186
 Жесткое возмущение автоколебаний 562
 Зависимости существенно нелинейные 52
 Задача аналитического конструирования регуляторов 387
 — вариационная 376, 378
 — Винера 335, 378
 — со свободным концом траектории 383
 — терминальная 383
 Задающее воздействие 12
 Зазор 563, 612, 621
 Закон больших чисел 299
 — наведения 33
 — распределения 295
 — — дифференциальный 300
 — — интегральный 299
 — — нормальный (закон Гаусса) 302
 — — Пуассона 295
 — регулирования 34, 35, 107
 — — линейный 35
 — — нелинейный 35, 36
 — — — логический 37
 — — — оптимизирующий 38
 — — — параметрический 38
 — — — функциональный 36
 — —, оптимизация 377
 — управления 107
 Замороженные коэффициенты 410
 — реакции 410
 Запоздывание 210, 413, 696
 — в нелинейной системе 553
 — в реле 599
 — инерционное апериодического звена 71
 — транспортное 414
 Запас устойчивости 201, 209
 — —, методы повышения 282
 — — по амплитуде 232
 — — по фазе 232
 Запоминание экстремума 734
 Затухание за период 216
 Захватывание, условия 648
 Звено апериодическое второго порядка 72
 — — первого порядка 69
 — безынерционное 69
 — динамическое 56 и д.
 — дифференцирующее 56
 — — идеальное 87
 — — пассивное 286
 — — с замедлением 87
 — изодромное 83
 — импульсное 16, 26, 430

- Звено интегрирующее 56, 266, 268, 271
 — — идеальное 79
 — — неустойчивое 93
 — — пассивное 286
 — — с замедлением 83
 — интегро-дифференцирующее 266
 — квазиколебательное 92
 — — с отрицательным затуханием 93
 — квазиконсервативное 92
 — колебательное 74
 — — с отрицательным затуханием 92
 — консервативное 77
 — корректирующее 262
 — линейное с запаздыванием 413
 — минимально-фазовое 65
 — нелинейное 473
 — неминимально-фазовое 92
 — неустойчивое 90
 — позиционного (статического) типа 56, 78—81
 — постоянного запаздывания 364
 — релейное 16, 28, 543
 — с модулированным сигналом 93
 — устойчивое (с самовыравниванием) 90
 — фазосдвигающее 266
 Знакоопределенная функция 513
 Знакопеременная функция 513
 Знакопостоянная функция 513
 Значение случайной величины среднее 296
 — — — среднеквадратичное 297
 — — — центрированное 297
 Зона, запретная для фазовых характеристик 235, 723
 — застоя 492
 — насыщения 495, 612
 — нечувствительности 29, 487, 495, 501, 612, 618, 671
 — перекрытия 493
 Игра дифференциальная 748
 — конечная 748
 Игровые системы 747
 Изображающая точка 480
 Изображение Карсона — Хевисайда 54, 55, 202, 223
 — Лапласа 54, 55, 62, 177, 179, 202, 223
 — — решетчатой функции 436—438
 — Фурье 62, 182, 227, 314, 404
 Изодромное звено 83
 — регулирование 111, 112
 Изоглина 511
 Импульсное звено 16, 26, 27, 430
 Импульсный фильтр 432
 Инвариантность по отношению к входному воздействию 253
 — — — к задающему воздействию 252
 — полная 255, 258
 — частичная 255
 Инвертирование 191
 Инерциальная вертикаль 257
 Инженерная психология 48
 Инженерный синтез 338
 Интеграл Дюамеля — Карсона 60, 121
 — Фурье 176, 183
 — —, энергетическая форма 314
 Интегральное регулирование 109
 Интегральные оценки 222
 Интегральный закон распределения 299
 Интегратор электронный 190
 Интегрирование статистическое 330
 Интегрирующее звено 56, 266, 268, 271
 — — идеальное 79
 — — неустойчивое 93
 — — пассивное 266
 — — с замедлением 83
 Интегрирующий привод 82, 83
 Интегро-дифференцирующее звено 266
 Канонические переменные 525
 — разложения случайной функции 325
 — уравнения 525
 Карсона преобразование 60
 Карсона — Хевисайда изображение 54, 55, 202, 223
 — — преобразование 177, 179, 407
 Качество регулирования 201
 — — в импульсной системе 465
 — — в нелинейной системе 623 и д.
 — —, улучшение 262 и д.
 Качка нерегулярная 323
 Квадратичная интегральная оценка 223
 Квадратор 746
 Квазиколебательное звено 92, 93
 Квазиконсервативное звено 92
 Квазипериодический режим 729
 Квантование по времени 431, 694
 — по уровню 431, 694, 717
 Колебания вынужденные нелинейных систем 648 и д.
 — —, несимметричные, с медленно меняющейся составляющей 654
 — квазипериодические 730
 Колебательная граница устойчивости 138, 140, 148, 154, 201, 360
 Колебательное звено 74
 — — с отрицательным затуханием 92
 Колебательность 216, 233
 Команды в ЦВМ 199
 Комбинированное регулирование 714
 Консервативное звено 77
 Конструирование аналитическое 387
 Контрольная точка 357
 Координатные функции 325
 Координаты фазовые 104
 Корень среднегеометрический 214
 Корневой годограф 342
 Корректирующая программа 719
 Корректирующее звено 262
 Корректирующие средства 269, 373, 708
 Коррекция дискретная 711
 Коррелированные случайные функции 311
 Коррелятор 313
 Корреляционная матрица 305
 — функция 310, 311, 314, 469
 Копи матрица 121
 Коэффициент корреляции 305
 — масштабный 189
 — ошибки 207
 — передачи звена 53, 56
 — стативма 203
 — усиления амплитуды 642
 — — звена 53
 — — разомкнутой системы 108
 Коэффициенты гармонической линеаризации 541, 543, 550
 — замороженные 410

- Коэффициенты канонического разложения 325
- Кривая Михайлова 143, 216, 551, 554
- переходного процесса 168 и д.
- *D*-разбиения 149
- Критерий качества 43, 201, 375
- — частотный 231
- минимума среднеквадратичной ошибки 333
- оптимальности 374, 683
- Сильвестра 388
- точности 201
- управляемости Калмана 125
- устойчивости 138
- — Гурвица 139, 140
- — Михайлова 146
- — Найквиста 151, 426, 464
- — Рауса 139
- Крутизна по моменту 131
- Лагранжа множители 380
- Лапласа изображение 54, 55, 62, 177, 179, 180, 202, 223
- — решетчатой функции 436—438
- преобразование 60, 177, 179, 180, 404, 406
- Линеаризация 49
- вибрационная — см. Сглаживание нелинейностей вибрационное
- гармоническая 541, 624
- — при несимметричных колебаниях 616
- статистическая 667, 668
- Линейная система 326
- — импульсная 430 и д.
- — с запаздыванием 413 и д.
- Линия особая для нелинейной системы 485
- переключения 686
- равного затухания 224
- равной степени устойчивости 224
- Логическое устройство 497, 576, 634
- Лорана ряд 450
- Люфт — см. Зазор
- Ляпунова метод прямой 512
- теорема о неустойчивости нелинейных систем 517
- — об устойчивости нелинейных систем 514, 516
- теоремы о линеаризованной системе 138
- функция 513
- Мажоранта 215
- Максиминная задача 750
- Максимум отклонения оценки качества среднеквадратичный 242
- Масштабирование 191
- Математическое ожидание 296, 66
- Матрица корреляционная 305
- Коши (матрица весовых функций) 121
- Матрица-столбец математических ожиданий 305
- случайных величин 305
- Машина вычислительная непрерывного действия (моделирующая) 171, 187, 189, 339
- — цифровая 227, 199, 693 и д.
- — электромеханическая 188, 197
- Метод Башкирова численно-графический 170, 401, 633
- Беллмана динамического программирования 383, 748
- гармонического баланса 540
- гармонической линеаризации 540, 616, 624, 720
- Гаусса — Зайделя 735
- замороженных коэффициентов 410
- — реакций 410
- запоминания экстремума 734
- изоклин 511
- корневой 212, 341
- корневых годографов 342
- логарифмических переходных характеристик 350 и д.
- Ляпунова прямой (вторая метода Ляпунова) 512
- малого параметра 540
- наискорейшего спуска 736
- операторный 182
- — Хевисайда 178
- последовательной оптимизации на базе нелинейного программирования 689
- припасовывания 478, 523
- производной по времени 735
- синхронного детектирования 733
- Солодовникова вещественных частотных характеристик 183
- стандартных переходных характеристик 346 и д.
- точечного преобразования 509
- частотный определения автоколебаний 590
- — Попова В. М. 533
- численный 200
- эквивалентной линеаризации 540
- Минимаксная задача 750
- Минимально-фазовое звено 65
- Минимум интегральной оценки 230
- Миноранта 215
- Михайлова кривая 143, 216, 551, 554
- критерий устойчивости 143
- Мнимая частотная характеристика 65
- Многоконтурная система 160
- Многомерная система 13, 119
- Множители Лагранжа 380
- Моделирование 188, 339, 747
- типичных нелинейных характеристик 194
- Модель математическая 44
- электромеханическая 188, 197 и д.
- электронная 188 и д.
- — матричного типа 189, 196
- — структурного типа 189 и д.
- Модулированный сигнал 93
- Модуляция амплитудно-импульсная первого рода 457
- Момент корреляционный 305
- центральный смешанный 305
- *m*-го порядка 297
- — — смешанный 305
- — — центральный 297
- Наблюдаемость 124
- Набор задачи на электромеханической модели 198
- — на электронной модели 191

- Найквиста критерий устойчивости 426, 464
 Насыщение 495, 620, 673
 Не полностью наблюдаемая система 125, 126
 — — управляемая система 125
 Невозмущенное движение 133
 Нескоррелированные случайные функции 310
 Нелинейная система — *см.* Система регулирования нелинейная
 Нелинейное звено 473
 — программирование 689
 Нелинейность динамическая 37
 — привода 572
 — статическая 36
 — существенная 52
 Неминимально-фазовое звено 92
 Несимметрия автоколебаний 602
 Неустойчивое звено 90
 Неустойчивость «в большом» 487
 — нелинейных систем, теорема Ляпунова 517
 — структурная 246
 Нормальный закон распределения 302
 Нормированная корреляционная функция 310, 313, 314
 Нули передаточной функции 216
 Область аperiodических процессов 220
 — допустимых отклонений регулируемой величины в переходном процессе 210
 — монотонных процессов 220
 — устойчивости 137, 219
 Обратная связь 12, 114
 — — гибкая 273
 — — жесткая 273
 — — изоморфная 281
 — — местная 263
 — — неединичная 259
 — — отрицательная 276
 — — положительная 281
 Обучение машины человеком 44
 Объект регулирования 12, 105
 — управления 9, 12
 — — многомерный 119
 Огибающая релаксационной функции 433
 — — — основная 433
 Ограничения 376
 Октава 67
 Определитель Гурвица 140, 216
 Определяющий эллипсоид 739
 Оптимальность по быстродействию 375, 685
 Оптимальный синтез 374, 378
 Оптимизатор качества 43
 Оптимизация закона регулирования (управления) 377
 — последовательная на базе нелинейного программирования 693
 — программы регулирования (управления) 377
 — систем регулирования нелинейная 682 и д.
 Оптимизирующий нелинейный закон регулирования 38
 Оригинал 177
 Основное движение 239
 Особая линия 485
 — точка 485
 Отклонение средневероятное 301, 303
 — среднее 297, 301
 — среднеквадратичное 298, 301
 Относительная амплитудная ошибка 358
 — псевдочастота 464
 Оценка интегральная 222
 — — квадратичная 223
 — — — — — улучшенная 228
 Ошибка амплитудная относительная 358
 — динамическая 34
 — — квадратичная 224
 — — скоростная 205, 607
 — среднеквадратичная 330
 — статическая 34, 131, 202, 607
 — фазовая 35°
 Параметрический нелинейный закон регулирования 38
 Параметры Вышградского 219
 Передаточная функция — *см.* Функция передаточная
 Передаточное число 53
 Переменные канонические 525
 Перерегулирование 209
 Переходная функция 58
 — характеристика 58, 209
 — — стандартная 346
 Период Шуллера 258
 Периодический режим 720, 724
 Периодическое решение 549, 552, 553
 Петля гистерезисная 29, 487, 617, 618, 671
 Плата за игру 749
 Плоскость фазовая 480
 Плотность вероятности 300
 — — двумерная 307, 389
 — — n -мерная 307, 309
 — спектральная 316, 326
 — — взаимная 318
 — — нормированная 318
 — — случайного стационарного решетчатого процесса 470
 Площадь квадратичная регулирования 223
 Повышение порядка астатизма 246
 — точности 244 и д.
 Позиционное звено 56, 78—81
 Поиск автоматический 40
 — — шаговый 738
 Показатель затухания 623
 — колебательности 233, 465
 Ползунова регулятор 18
 Полином характеристический 103, 106, 143
 Полная инвариантность 255, 259
 Полностью неуправляемая система 125
 — управляемая система 125
 Полоса пропускания 95
 — — эквивалентная 237
 Полусы передаточной функции 218
 Помехи случайные 307, 677
 Понятна принцип максимума 683, 684
 Попова В. М. метод частотный 533
 — теорема 533, 534
 Постоянная времени звена 53
 — — изоморфного устройства 248
 Предельная устойчивость 534
 Предельный цикл полуустойчивый 511
 — — устойчивый 486
 Предначальные условия 180

- Преобразование Карсона 60
 — Карсона — Хевисайда 177, 179, 406
 — Лапласа 60, 177, 179, 180, 404, 406
 — дискретное 435
 — — по начальным условиям слева 180
 — — — — справа 180
 — точечное 509
 — Фурье 63, 176
 Привод интегрирующий 83, 198, 245
 Принцип максимума Понтрягина 683, 684
 — оптимальности 384
 — Ползунова — Уатта 107
 — Понселе 107
 — суперпозиции 168
 Припасовывание 478, 523
 Программа корректирующая 719
 — работы ЦВМ 200
 — регулирования 32
 — — временная 32
 — —, оптимизация 377
 — — параметрическая 33
 Программирование динамическое 383, 748
 — нелинейное 689
 Пропорциональное регулирование 108
 Пространство векторное возмущения 124
 — — выходных величин 124
 — — состояния 123
 — — управления 124
 — состояний 123
 — фазовое 479, 480, 499
 Процесс аналоговый 187
 — аperiodический 487
 — переходный 168, 210
 — — колебательный (приближенное исследование) 623
 — — скользящий 501
 — случайный (стохастический) 305
 — — в нелинейных системах 667
 — — стационарный 308
 — — центрированный 320
 — чисто случайный 307
 Псевдочастота абсолютная 464, 707
 — относительная 464
 Психология инженерная 48
 Пуассона закон распределения 295
 Разложение каноническое случайной функции 325
 Разностное уравнение 434
 Разность вторая обратная 434
 — — прямая 433
 — первая обратная 433
 — — прямая 433
 Разомкнутая система 104
 Распределение случайной величины — см.
 Закон распределения
 — — — равномерное 301
 Рассогласование 12
 Рауса критерий устойчивости 139
 Ребро графа 118
 Регулирование изодромное 111, 112
 — интегральное 109
 — комбинированное 714
 — по внешнему воздействию 107
 — по отклонению 107
 — по производной от ошибки 112, 250
 — пропорциональное 108
 — сепаратное 122
 — статическое 203
 Регулирование экстремальное 733
 Регулируемая величина 12
 Регулирующее воздействие 12
 Регулятор автоматический 12
 — давления 494
 — — газа в трубопроводе 419
 — курса торпеды 21, 29, 490, 504
 — напряжения 21, 30, 489, 505
 — непрямого действия 13
 — Ползунова 18
 — прямого действия 13
 — скорости двигателя 20, 30, 32, 417
 — температуры 20, 24, 28, 430, 565, 596
 — Уатта 19
 Режим квазипериодический 729
 — периодический 720
 — — симметричный 724
 Реле 24
 Релейная система 28, 489, 523
 Релейное звено 16, 28, 543
 Релея формула 226, 315
 Решение общее 168
 — периодическое 549, 552, 553
 — полное 168
 — частное (вынужденное) 168
 Решетчатая функция 432
 — — импульсная единичная 439
 — — случайная 469
 — — смещенная 432
 — — элементарная 324
 Робототехника 48
 Ряд Лорана 450
 — Фурье 176
 Самовыравнивание 90
 — отрицательное 91
 — положительное 91
 Самолет с автопилотом 13, 522, 529, 535
 Самонастройка параметров 41
 — — по возмущению 45
 — — экстремальная 44, 745
 — структуры 46
 Самообучение системы 44
 Самооптимизация системы 43
 Самоорганизация 46, 746
 Свойство фильтра 548
 Связь обратная 12, 114
 — — гибкая 273
 — — жесткая 273
 — — изодромная 281
 — — местная 263
 — — неединичная 259
 — — отрицательная 276
 — — положительная 281
 Сглаживание нелинейностей вибрационное 614, 613, 662
 Седло 486
 Седловая точка игры 750
 Сельсин 142
 Сепаратриса 487
 Серводвигатель гидравлический 280
 Сервомеханизм 24
 Сильвестра критерий 388
 Синтез системы регулирования 338 и д.
 — — — автоматический 745
 — — — инженерный 338
 — — — оптимальный 374
 — — — по заданным качественным показателям 378

Синтез системы регулирования с переменными параметрами 409
 — — с ЦВМ 700
 Синхронное детектирование 733
 Система автоматическая 9, 10
 — — дискретного действия 15, 16
 — — замкнутая 10, 11
 — — импульсная 15, 17, 430
 — — линейная 16, 17
 — — — обыкновенная 17
 — — — особая 17
 — — с запаздыванием 17, 413
 — — с переменными параметрами 17, 391
 — — с распределенными параметрами 17, 418
 — — с сосредоточенными параметрами 17
 — — незамкнутая 10
 — — — нелинейная 17, 473
 — — непрерывного действия 15
 — — релейного действия 15, 16
 — — цифровая 15, 16, 18, 693
 — автоматического управления 13
 — — — движущимся объектом 288
 — — — самолетом 13, 615
 — игровая 746
 —, наблюдаемая не полностью 125
 —, — полностью 126
 —, не наблюдаемая полностью 126
 —, не управляемая полностью 125
 — регулирования 12 (см. также Регулятор)
 — — автоколебательная 602 и д.
 — — адаптивная 14, 39, 48
 — — астатическая 203, 602
 — — варьированная 239
 — — двумерная 122
 — — с антисимметричными связями 165
 — — дискретная 27, 693
 — —, инвариантная по отношению к задающему воздействию 252
 — — исходная 239
 — — комбинированного 14, 254, 714
 — — линейная 326
 — — — импульсная 430 и д.
 — — — с запаздыванием 413 и д.
 — — многоконтурная 160
 — — многомерная (связанная) 13, 21, 119, 121
 — — нелинейная 473 и д.
 — — — с зоной нечувствительности 488
 — — — с нелинейной характеристикой привода регулирующего органа 495
 — — оптимальная 374
 — — приспособляющаяся 48
 — — программного 13, 203
 — — разомкнутая 104
 — — релейная 28, 489, 523
 — — с автоматической оптимизацией 48
 — — с логическим устройством 497, 576, 634
 — — с нелинейным приводом регулирующего органа 518
 — — с переменной структурой 39, 498, 537
 — — с переменным коэффициентом усиления 496
 — — с переменными параметрами 391

Система регулирования с распределенными параметрами 418
 — — с самонастройкой параметров 41
 — — — — по возмущению 45
 — — — — программы 40
 — — — — структуры 46
 — — с ЦВМ 431, 693 и д.
 — — самонастраивающаяся 14, 39, 41, 741
 — — — с замкнутой цепью самонастройки 743
 — — — с разомкнутой цепью самонастройки 741
 — — — с экстремальной самонастройкой 745
 — — — — самооптимизирующаяся 14
 — — — — самоорганизующаяся 14, 39, 46, 746
 — — связанная 13, 21, 119, 121
 — — собственно самонастраивающаяся 41
 — — статическая 203, 260, 602
 — — устойчивая 135
 — — — абсолютно 153
 — — — асимптотически 134
 — — — нейтрально 138, 154
 — — — условно 154
 — — экстремальная 40, 733
 — — — настройки колебательного контура 737
 — — следящая 12, 23, 127, 203, 209, 290, 557, 630, 637
 — — дистанционная 142
 — — с зазором 487, 493
 — — с зоной нечувствительности 487
 — — с линейным и квадратичным трением 496
 — — — — и сухим трением 492
 — — с саморегулированием параметров 46
 — — электромеханическая 22
 — — стабилизации 13, 203
 — — управляемая 124
 — —, — не полностью 125
 — —, — полностью 125
 Скользящий переходный процесс 501
 Скоростная ошибка 204, 607
 Случайная величина 293
 — — векторная 305
 — — дискретная 294
 — — непрерывная 299
 Случайное воздействие 293 и д.
 Случайный процесс 305
 — — в нелинейных системах 667
 — — стационарный 308
 — — централизованный 320
 Событие случайное 292
 Соединение звеньев параллельное 114
 — — последовательное 113
 Солодовников метод вещественных частотных характеристик 183
 Спектральная плотность 316
 — — взаимная 318
 — — нормированная 318
 — — случайного стационарного решетчатого процесса 470
 Средневероятное отклонение 301, 303
 Среднегеометрический корень 213
 Среднее значение случайной величины 296
 — — отклонение 297, 301
 Среднеквадратичная ошибка 330
 Среднеквадратичное значение случайной величины 297

- Среднеквадратичное отклонение 298, 301
 Средства корректирующие 262, 373, 708
 Стандартные переходные характеристики 346
 Статистическая нелинейная линеаризация 607, 668
 Статистическое дифференцирование 330
 — интегрирование 330
 Статическая ошибка 34, 201, 607
 Степень устойчивости 214
 Стратегия оптимальная ведения игры 747, 750
 Структура переменная — см. Система регулирования с переменной структурой
 Ступенчатая функция 59
 Суммирование 191
 Суперпозиция 168
 Схема структурная 55, 113, 15
- Тахогенератор 130, 256
 Телеуправление 23, 33
 Теорема Ляпунова о неустойчивости нелинейных систем 517
 — — об устойчивости нелинейных систем 514, 516
 — Попова В. М. 533, 534
 — разложения 181
 — свертывания 182
 — эргодическая 309
 Теоремы Ляпунова о линеаризованной системе 138
 Теория игр 746
 — — дифференциальных 749
 — инвариантности 252
 Терминальная задача управления 383
 Типовой входной сигнал следящей системы 321
 Точечное преобразование 509, 510
 Точка изображающая 480
 — контрольная 357
 — особая 485
 Точность вычислительных машин 188, 199
 — систем регулирования 201 и д. 244 и д.
 Траектория корней 342
 — фазовая 480, 481, 499
 — — оптимальная 375
 Транспортное запаздывание 414
 Трапеция единичная 186
 Трение сухое 52, 487, 492, 507
- Уатта регулятор 19
 Узел неустойчивый 486
 — устойчивый 486
 Управление 13
 — векторное 390
 — дистанционное 22, 24
 — комбинированное 254
 — оптимальное 375
 — скалярное 387
 — торпедой по курсу 21
 Управляемость 124
 Упреждение фазовое 285, 287
 Уравнение Беллмана 387
 — Винера — Хопфа 335
 — волновое 420
 — движения объекта при наличии автоматического регулирования 104
 — замыкания 105
 — звена в отклонениях 51
- Уравнение линейной части системы 475
 — разностное (в конечных разностях) 434
 — смещенное 216
 — характеристическое 106, 135
 Уравнения возмущенного движения 135
 — Гамильтона 684
 — канонические 525
 — линеаризованные процесса регулирования в отклонениях (уравнения в вариациях) 51
 — чувствительности 240
 — Эйлера 378
 Усилитель операционный 189
 — электронный 128
 Условия захватывания 648
 — начальные нулевые 173
 — предельной устойчивости 534
 — предначальные 180
 Условный экстремум 379
 Устойчивость абсолютная 521, 533
 — автоколебаний 528
 — асимптотическая 134, 515
 — «в малом» 487, 510
 — в целом 514
 — импульсных систем 463
 — линеаризованной системы 134
 — нелинейных систем, теорема Ляпунова 515
 — периодического решения 549, 553, 554
 — по Ляпунову 134, 481
 — предельная 534
 — системы с переменными параметрами 407
 — условная 154
 Устройство арифметическое в ЦВМ 199
 — запоминающее в ЦВМ 199
 — изотропное 247
 — корректирующее нелинейное 637
 — — параллельного типа 263
 — — последовательного типа 263
 — — — — пассивное 265
 — логическое 497, 576, 634
 — управляющее в ЦВМ 199
- Фазовая ошибка 358
 — плоскость 480
 — траектория 480, 481, 499
 — — оптимальная 375
 — частотная характеристика 64
 — — — — логарифмическая 65, 161
 Фазовое пространство 479, 480, 499
 — упреждение 285, 287
 Фазовые координаты 104
 Фазосдвигающее звено 266
 Фазочувствительный демодулятор 264
 Фильтр 548, 743
 — импульсный 34
 — с запоминанием 694
 — с фиксацией 694
 Фокус неустойчивый 485
 — устойчивый 485
 Форма матричная уравнений многомерного объекта 119
 Формула Бесселя 720
 — Релея 226, 315
 Функции случайные коррелированные 311
 — — некоррелированные 310
 Функционал 374, 683, 748
 Функциональный нелинейный закон регулирования 36

- Функция веса 59, 392, 394
 — — нормальная 392
 — — приведенная 454
 — — сопряженная 393
 — времени, абсолютно интегрируемая 176
 — —, медленно меняющаяся 61
 — выходы 747
 — единичная импульсная 59, 169, 187
 — — ступенчатая 169
 — знакоопределенная 513
 — знакопеременная 513
 — знакопостоянная 513
 — координатная 325
 — корреляционная (автокорреляционная) 310
 — — в импульсной системе 469
 — — взаимная 310, 314
 — — в импульсной системе 469
 — — нормированная 310, 313, 314
 — — стационарного процесса 311
 — Ляпунова 513
 — начальных условий 181
 — передаточная замкнутой системы 106
 — — — по ошибке 106, 207
 — — звена 54
 — — по возмущению 57
 — — линейной части системы 475
 — — разомкнутой системы 105, 181
 — — частотная 61
 — — параметрическая 404
 — переходная звена 58
 — распределения 299
 — решетчатая 432
 — — импульсная единичная 439
 — — случайная 469
 — — смещенная 432
 — — случайная элементарная 324
 — — смещения 604, 656
 — — ступенчатая 59
 — — единичная 59
 — — характеристическая 304
 — — чувствительности 239
 — — логарифмическая 241
 Фурье изображение 62, 182, 227, 314, 404
 — — интеграл 176, 183
 — —, энергетическая форма 314
 — — преобразование 176
 — — двустороннее 317
 — — ряд 176
 Характеристика нелинейная 53
 — — с зоной нечувствительности 194, 619
 — — с насыщением 620
 — — сглаженная 612
 — — типа люфта или зазора 194, 621
 — — переходная 58, 209
 — — стандартная 346
 — — релейная 52, 194, 616
 — — идеальная 618, 670
 — — несимметричная 618, 670
 — — однозначная с зоной нечувствительности 671
 — — с гистерезисной петлей 617, 671
 — — с зоной нечувствительности 618
 — — статическая 29
 Характеристика частотная амплитудная 64, 236
 — — — логарифмическая 65, 161
 — — — асимптотическая 71, 72
 — — — желаемая 350
 — — — кормируемая 76
 — — — располагаемая 350
 — — — системы с ЦВМ 701
 — — амплитудно-фазовая 63, 151
 — — — логарифмическая 68
 — — вещественная 65, 210
 — — видоизмененная 534
 — — мнимая 65
 — — фазовая 64, 644
 — — — логарифмическая 65, 161
 Характеристическая функция 304
 Характеристический полином 103, 106, 143
 Характеристическое уравнение 106, 135
 Хевисайда операторный метод 178
 Центр 487
 Центрированное значение случайной величины 297
 Цикл предельный полуустойчивый 510
 — — устойчивый 487
 Частичная инвариантность 255
 Частное решение 168
 Частота среза 237
 Частотный критерий качества 231
 Частоты боковые 94
 Число передаточное 53
 Чисто случайный процесс 307
 Чувствительность 239
 Чувствительный элемент 104, 127
 Шулера период 258
 Шум белый 320
 — — с ограниченной спектральной плотностью 321
 Эйлера уравнение 378
 Эквивалентная полоса пропускания 237
 Экстраполиатор 454
 — с фиксацией на период 458
 Экстремаль 229, 378
 Экстремальная система 39, 733, 737
 Экстремальное регулирование 733
 Экстремум 379, 735
 Элемент гироскопический 74
 — дифференцирующий 250
 — импульсный идеальный 453
 — чувствительный 104, 128
 Эллипсоид определяющий 739
 Эргодическая гипотеза 309
 — теорема 309
 D-разбиение 149, 217
 h-функция 186
 w-преобразование 464, 701
 z-преобразование 436, 439, 694
 — двустороннее 470
 δ -функция 59, 181, 187
 μ -кривые 235